ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

52. BAND

ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG
DER
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

VON

KARL SCHEEL

ZWEIUNDFÜNFZIGSTER BAND

Mit 276 Textfiguren

(Abgeschlossen November 1928—Januar 1929)

VERLAG VON JULIUS SPRINGER, BERLIN

1929

Unveränderter Nachdruck 1970
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Alle Rechte,
namentlich das Recht der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Fotodruck: Mikrokopie GmbH, 8 München 22, Bruderstraße 9

Inhalt.

Erstes und zweites Heft.

Abgeschlossen am 16. November 1928.

Seite

H. Mark und **Karl Wolf,** Über die Polarisation der charakteristischen Röntgenstrahlung. Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 29. September 1928) 1

E. Rupp, Über Elektronenbeugung an einem geritzten Gitter. (Aus dem Forschungsinstitut der AEG, Berlin-Reinickendorf.) Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 29. September 1928) 8

B. Rosen, Über diffuse Molekülspektra. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 25. September 1928) 16

H. Sirk, Über den Zusammenhang zwischen Oberflächenspannung und Verdampfungswärme. (Eingegangen am 4. Oktober 1928) 21

Wolfgang Finkelnburg, Über das Molekülspektrum des Wasserstoffs mit Wellenlängenmessungen von 3667 Linien zwischen λ 4861 (H_β) und 3314 Å.-E. (Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Bonn.) Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 27. September 1928) 27

P. Lasareff, Über die theoretischen Grundlagen der Flimmerphotometrie. Erste Mitteilung: Die Gesetze der Flimmerphotometrie beim Dunkelsehen. (Eingegangen am 13. September 1928) 119

Fr. Klingelfuss, Die Funkenspannung bei Drucken $p < 760$ mm Hg und das Minimumpotential, unter Berücksichtigung der Elektrodenfunktion dargestellt. Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 24. September 1928) . . 126

Arnold Dworsky, Ein neuer Versuch über die Mitführung des Äthers. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Januar 1928) 141

A. v. Engel, Zur Kenntnis des Wechselstromlichtbogens in Flüssigkeiten. (Bemerkung zu der gleichnamigen Arbeit von Bodforss und Frölich.) Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 26. September 1928) 145

H. Stumpen, Nachtrag zu der Arbeit: Bestimmungen von Schwächungskoeffizienten verschiedener Metalle und organischer Verbindungen im kurzwelligen Röntgengebiet. (Eingegangen am 10. Oktober 1928) 150

Drittes und viertes Heft.

Abgeschlossen am 22. November 1928.

W. Kuhn, Zur Frage nach der Energieübertragung bei Kernstößen. (Eingegangen am 23. Oktober 1928) 151

Hans Th. Wolff, Zur Theorie der lichtelektrischen Wirkung. (Eingegangen am 18. Oktober 1928) 158

L. Rosenfeld, Quantenmechanische Theorie der natürlichen optischen Aktivität von Flüssigkeiten und Gasen. (Eingegangen am 21. Oktober 1928) . . 161

W. Weizel, Entkopplung des Elektronenbahndrehimpulses von der Molekülachse durch die Rotation bei He_2. (Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Rostock.) Mit 6 Abbild. (Eingegangen am 10. Oktober 1928) 175

Seite

M. J. Druyvesteyn, Über die Ionisation durch Elektronen in einem homogenen elektrischen Felde. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 6. Oktober 1928) 197

D. Enskog, Magnetismus und Kernbau. (Eingegangen am 7. Oktober 1928) 203

Hans Bauer, Die Brechung der Materiewellen vom Standpunkte der speziellen Relativitätstheorie. (Eingegangen am 22. September 1928) 221

Fritz Sauter, Intensitätsproblem und Lichtquantentheorie. (Der Comptonsche Streuprozeß.) [Aus dem Zentral-Röntgeninstitut der Universität Innsbruck (Vorstand Prof. Dr. Stannig).] Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 26. September 1928) 225

Herbert Mayer, Über eine experimentelle Methode zur Messung von Molekularstrahlung. Erste Mitteilung. Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 10. Oktober 1928) 235

Theodor Sexl, Zur Theorie des Einplattenradiometers. (Eingegangen am 2. Oktober 1928) 249

V. Ambarzumian, Über die Beziehung zwischen der Lösung und der Resolvente der Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichts. (Eingegangen am 29. September 1928) 263

Mieczysław Jeżewski, Über dielektrische Anisotropie der nematischen Flüssigkeiten im magnetischen Felde. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 9. Oktober 1928) 268

E. Bengtsson und **E. Hulthén,** Über eine experimentelle Prüfung der Kombinationsregeln unter den Bandenspektren. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 11. Oktober 1928) 275

Felix Joachim von Wiśniewski, Fortpflanzung des Lichtes durch fremde Kraftfelder. III. (Eingegangen am 5. Oktober 1928) 280

H. Boas, Über die optische Abbildung von Nichtselbstleuchtern. Bemerkungen zur Arbeit von Herrn Siedentopf. (Eingegangen am 7. Oktober 1928) 287

C. J. Bakker, T. L. de Bruin und **P. Zeeman,** Bemerkung zu der Arbeit: Der Zeemaneffekt des Argonfunkenspektrums (Ar II). (Eingegangen am 28. Oktober 1928) 299

Berichtigungen 300

Fünftes und sechstes Heft.

Abgeschlossen am 4. Dezember 1928.

R. Karnop und **G. Sachs,** Versuche über die Rekristallisation von Metallen. II. (Mitteilung aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Metallforschung.) Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 5. November 1928) 301

Franz Wolf, Versuch über die Polarisationsfähigkeit eines Elektronenstrahls. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 18. Oktober 1928) 314

E. Brüche und **W. Littwin,** Experimentelle Beiträge zur Radiometerfrage. (Vorläufige Mitteilung.) Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 28. September 1928) 318

E. Brüche und **W. Littwin,** Ähnliche Eigenschaften und ähnliche Radiometerkurven von N_2–CO und CO_2–N_2O. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 20. Oktober 1928) 334

Andrew M. Mac Mahon, Zur Kenntnis der Alkalihalogenidphosphore mit Kupferzusatz. Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 2. August 1928) . . 336

Seite

Jean Becquerel, Über das Vorhandensein zweier verschiedener magnetischer Drehvermögen in einem einachsigen Kristall längs der Achse und längs einer Achsennormale. Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 16. August 1928) 342

J. Frenkel, Die Wellenmechanik des rotierenden Elektrons und die Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes. (Eingegangen am 25. September 1928) 356

Bengt Edlén, Präzisionsmessungen in der K-Serie der Elemente 30 Zn bis 44 Ru. Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 8. Oktober 1928) 364

N. v. Raschevsky, Beitrag zur Theorie der physikalisch-chemischen Periodizität. (Eingegangen am 18. September 1928) 372

J. B. Seth, Chetan Anand und **Mahabir Dayal,** Änderung der Magnetisierungsintensität eines Eisendrahtes beim Recken. Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 14. August 1928) 382

N. Akulov, Über die Magnetostriktion der Eiseneinkristalle. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 8. August 1928) 389

Nikolaus Nyberg, Zum Aufbau des Farbenkörpers im Raume aller Lichtempfindungen. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 9. Juli 1928) . . 406

W. D. Kusnezow (in Gemeinschaft mit N. A. Bessonow und N. F. Pitschenin), Besonderer Fall des Mechanismus der äußeren Reibung. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 8. Oktober 1928) 420

Heinz Pose, Experimentelle Untersuchungen über die Diffusion langsamer Elektronen in Edelgasen. Mit 15 Abbildungen. (Eingegangen am 11. Oktober 1928) 428

G. I. Pokrowski, Über die Lichtzerstreuung in Wasser. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 30. Oktober 1928) 448

K. Schaposchnikow, Zum Davisson-Germereffekt. (Eingeg. am 15. Oktober 1928) 451

Siebentes und achtes Heft.

Abgeschlossen am 17. Dezember 1928.

Rud. Suhrmann und **Hans Theissing,** Über den Einfluß des Wasserstoffs auf die lichtelektrische Elektronenemission des Kaliums. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Oktober 1928) 453

W. Gerlach und **N. Little,** Die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität von Gläsern. (Vorläufige Mitteilung.) (Eingegangen am 20. November 1928) 464

W. Bothe und **H. Fränz,** Untersuchungen über die durch α-Strahlen erregte Röntgenstrahlung. (Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.) Mit 16 Abbildungen. (Eingegangen am 25. Oktober 1928) . . 466

J. Holtsmark, Zur Theorie der Elektronenstreuung und der Stoßerregung. (Eingegangen am 29. Oktober 1928) 485

G. Gamow und **F. G. Houtermans,** Zur Quantenmechanik des radioaktiven Kerns. Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 29. Oktober 1928) . . . 496

G. Gamow, Zur Quantentheorie der Atomzertrümmerung. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 10. November 1928) 510

Karl Steiner, Die Polarisation des Elektronenstoßleuchtens bei Edelgasen. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 12. Oktober 1928) 516

Erwin Krömer, Zeemaneffekt und Termordnung im Spektrum des einfach ionisierten Chroms. (Eingegangen am 22. Oktober 1928) 531

Seite

L. v. Hámos, Bemerkungen zur Wirkungsweise des elektrooptischen Momentverschlusses von I. W. Beams und Deutung einiger damit ausgeführter Versuche. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 25. Oktober 1928) . . 549

Felix Bloch, Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 10. August 1928) 555

Berichtigung zu der Arbeit: „Über die Polarisation der charakteristischen Röntgenstrahlung". Von H. Mark und Karl Wolf 600

Neuntes und zehntes Heft.

Abgeschlossen am 31. Dezember 1928.

F. Hund, Über Zuordnungsfragen, insbesondere über die Zuordnung von Multiplettermen zu Seriengrenzen. Mit 4 Abbild. (Eingegang. am 15. November 1928) 601

H. Klumb und **Peter Pringsheim,** Über die Überführung angeregter $2\,^3P_1$-Hg-Atome in den metastabilen Zustand $2\,^3P_0$. Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 6. November 1928) 610

Robert Jaeger, Eine Kompensationsmethode zur Messung schwacher Ströme. (Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.) Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 9. November 1928) 627

Lise Meitner, Das β-Strahlenspektrum des Radiothors als Absorptionsspektrum seiner γ-Strahlen. Mit 2 Abbild. (Eingegangen am 27. September 1928) 637

Lise Meitner, Das γ-Strahlenspektrum des Radiothors in Emission. (Eingegangen am 27. September 1928) 645

Otto Klemperer, Über die Befreiung des Elektrons aus der Metalloberfläche durch langsame positive Ionen. (Eingegangen am 23. November 1928) 650

J. L. Snoek jun., Zur Prüfung der Schrödingerschen Theorie. II. (Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Utrecht.) (Eingegangen am 15. November 1928) 654

Yoshio Fujioka, Experimentaluntersuchungen über die Heliumbanden. Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 5. November 1928) 657

C. Zwikker, Messungen der spezifischen Wärme von Wolfram zwischen 90 und 2600° abs. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 3. November 1928) 668

Jean Becquerel und **W. J. de Haas,** Zerlegung des Faradayeffekts in zwei Erscheinungen verschiedenen Ursprungs. Diamagnetische und paramagnetische Rotationspolarisation. Magnetisierungsgesetz fester Kristalle. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 16. August 1928) 678

N. A. Salessky, Über die Anfangsleitfähigkeit von Gips und Steinsalz. Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 17. Oktober 1928) 695

A. D. Goldhammer, Untersuchungen über die Anfangsströme im Quarz. Mit 11 Abbildungen. (Eingegangen am 17. Oktober 1928) 708

M. v. Laue, Notiz zur Quantentheorie des Atomkerns. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 20. November 1928) 726

V. S. Vrkljan, Bemerkung über die Freiheitsgrade in der Wellenmechanik. (Eingegangen am 31. Oktober 1928) 735

Seite

W. E. Laschkarew und **S. D. Hertzrücken,** Eine Verbesserung des Totalreflektometers für Röntgenstrahlen. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 9. November 1928) 739

G. A. Kjandsky, Über Kapazitätsmessungen mittels piezoelektrischer Oszillatoren und Resonatoren. (Vorläufige Mitteilung.) Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 13. November 1928) 743

Fr. Klingelfuss, Die Funkenspannung bei Drucken $p < 760$ mm Hg und das Minimumpotential, unter Berücksichtigung der Elektrodenfunktion dargestellt. (Nachtrag zur ersten Mitteilung.) (Eingegangen am 22. November 1928) 746

Carl Leiss, Neues Absorptionsgefäß für variable Flüssigkeitsschichten. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 24. November 1928) 748

Carl Leiss, Evakuierbare Funkenstrecke. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 24. November 1928) 750

L. W. Mc Keehan, Magnetostriktion: Bemerkungen zu einer Mitteilung von Herrn Alfred Schulze. (Eingegangen am 29. Oktober 1928) 752

Berichtigung 754

Elftes und zwölftes Heft.

Abgeschlossen am 9. Januar 1929.

R. O. Herzog und **W. Jancke,** Über Deformationsversuche bei Faserstoffen. (Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Faserstoffchemie.) (Vorläufige Mitteilung.) Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 26. November 1928) 755

K. Philipp und **K. Donat,** Die weitreichenden α-Teilchen des Radiums C. (Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie, Abteilung Hahn-Meitner.) Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 1. Dezember 1928) 759

Alfred Brill, Die Temperaturstrahlung der Fixsterne. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 22. November 1928) 767

Martin Söderman, Die K-Strahlung der leichtesten Elemente (Al bis Be). Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 21. November 1928) 795

W. Bleeker, Über das Intensitätsverhältnis in den Flügeln stark umgekehrter Multipletts. (Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Reichsuniversität Utrecht.) Mit 3 Abbild. (Eingegangen am 15. November 1928) 808

Gerhard Herzberg, Über die Bandenspektren von CO, nach Versuchen mit der elektrodenlosen Ringentladung (mit einem Anhang über die Swan- und Cyanbanden). Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 2. November 1928) 815

John B. Taylor, Das magnetische Moment des Lithiumatoms. (Untersuchungen zur Molekularstrahlmethode aus dem Institut für physikalische Chemie der Hamburgischen Universität, Nr. 9.) Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 17. November 1928) 846

O. Klein und **Y. Nishina,** Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac. (Eingegangen am 30. Oktober 1928) 853

Y. Nishina, Die Polarisation der Comptonstreuung nach der Diracschen Theorie des Elektrons. (Eingegangen am 30. Oktober 1928) 869

Seite

Mieczysław Jeżewski, Über die dielektrischen Eigenschaften der nematischen Flüssigkeiten im gleichzeitigen magneto- und elektrostatischen Felde. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 23. November 1928) 878

John Mead Adams, Bemerkung über die innere Austrittsarbeit bei der Elektronenemission des Silbers. (Eingegangen am 3. November 1928) . . . 882

Joseph Kaplan, Die Stabilität des Silberatomrumpfes. (Eingegangen am 8. November 1928) 883

E. Brody, Elektrische Polarisation in Isolatoren, hervorgerufen durch Beschleunigung. (Eingegangen am 28. November 1928) 884

Fr. Klingelfuss, Die Funkenspannung bei Drucken $p < 760$ mm Hg und das Minimumpotential, unter Berücksichtigung der Elektrodenfunktion dargestellt. (Zweiter Nachtrag.) (Eingegangen am 30. November 1928) . . 890

Autorenregister 892

Über die Polarisation der charakteristischen Röntgenstrahlung.

Von **H. Mark** und **Karl Wolf** in Ludwigshafen a. Rh.

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 29. September 1928.)

Es wurde mit einer photographischen Methode gefunden, daß der mögliche Polarisationsgrad der charakteristischen Kupfer-K-Strahlung innerhalb der Fehlergrenze von etwa 1% liegt.

Bis 1926 lagen keine Experimente über die Polarisation der charakteristischen Röntgenstrahlung vor. Es war lediglich die Gesamtstrahlung untersucht worden mit dem Ergebnis, daß deren teilweise Polarisation der Bremsstrahlung zuzuschreiben ist. Die sekundäre charakteristische Strahlung (Fluoreszenzstrahlung) wurde von Mark und Szilard* untersucht. Es ergab sich für Eisen-$K\alpha$ den theoretischen Erwartungen entsprechend keine Polarisation. A. H. Compton** bestätigte neuerdings dieses Ergebnis für Silberfluoreszenzstrahlung. Die erste Arbeit über primäre charakteristische Strahlung stammt von Bishop***. Er fand mit einer ionometrischen Methode, daß die Molybdän-$K\alpha$-Strahlung teilweise polarisiert sei. Da dieses Ergebnis sehr schwer mit theoretischen Vorstellungen in Übereinstimmung zu bringen ist, untersuchten wir die Polarisation der charakteristischen Strahlung nach einer anderen Methode (photographisch). Wir fanden, daß die Kupfer-K-Strahlung innerhalb der Fehlergrenze unpolarisiert ist. Mittlerweile sind zwei Arbeiten erschienen****, die auch ionometrisch zum gleichen Ergebnis kamen.

Die Methode war folgende: Die Röntgenstrahlung fällt nach Durchgang durch ein Blendensystem $B1$, $B2$, $B3$ (Fig. 1) und ein Filter N auf ein Kristallpulver A, das so gewählt ist, daß möglichst intensiv unter dem Glanzwinkel 45° reflektierende Netzebenen vorhanden sind. Der Debye-Scherrer-Kegel dieser Reflexion ist also nahezu eine Ebene. Sie schneidet einen konzentrisch um den ursprünglichen Strahl herumgelegten Film F in einem Kreis $K1$, der beim Aufrollen des Films als gerade Linie erscheint. Eine Polarisation des einfallenden Strahles zeigt sich dann in einer um π (halbe Länge des Films) periodischen Intensitätsschwankung

* H. Mark und L. Szilard, ZS. f. Phys. **35**, 743, 1926.

** A. H. Compton, Proc. Nat. Acad. **14**, 549, 1928.

*** J. B. Bishop, Phys. Rev. **28**, 625, 1926.

**** H. Haas, Ann. d. Phys. **85**, 470, 1928 (Fe $K\alpha$-Strahlung); J. A. Bearden, Proc. Nat. Acad. **14**, 539, 1928 (Mo $K\alpha$).

der Linie. Es müssen also z. B. die Stellen x_1, x_2 (Fig. 1) stärker geschwärzt erscheinen als y_1, y_2. Das Kristallpulver A dient gleichsam als Analysator der Strahlung. Damit nun in Wirklichkeit eine Reflexion unter 90° nach allen Seiten ohne Absorption möglich ist, wurde das

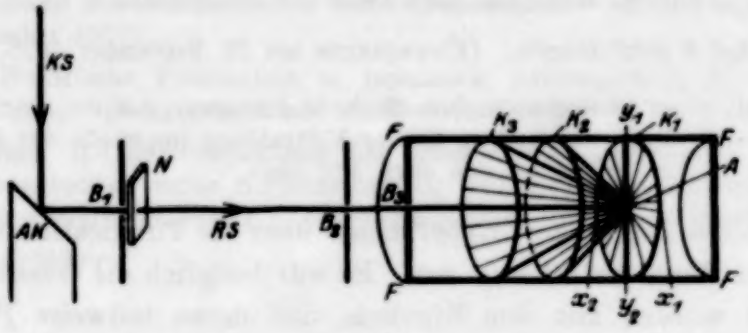


Fig. 1.
K S Kathodenstrahl, *R S* Röntgenstrahl, *A K* Antikathode, B_{1-3} Blenden, *N* Filter, *A* Analysator, *F* Film, K_{1-3} Debye-Scherrer-Kegel.

Kristallpulver auf das schief abgeschnittene Ende einer Achse *D* (Fig. 2) aufgebracht und während der Aufnahme gedreht. Alles weitere ergibt sich aus Fig. 1 und Fig. 2.

Mit dieser Methode, deren Erfolg im Falle polarisierter Strahlung Fig. 3 zeigt*, wurde die von der Röhre kommende primäre Strahlung untersucht. Als Analysator wurden dreierlei Kristallarten verwendet:

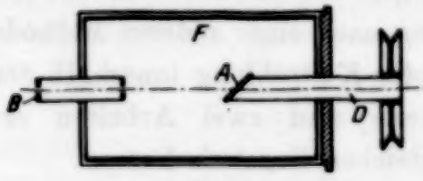


Fig. 2.
A Analysator, *B* Blendenrohr, *D* Drehachse, *F* Fim.

1. Kupfer [für Kupfer-$K\alpha$-Strahlung und die Cu (311)-Ebene ist der Glanzwinkel $= 45^0\,3'$].

2. Magnesium [für Kupfer-$K\alpha$-Strahlung und die Magnesium-(203)-Ebene (gew. hex. indiziert) ist $\vartheta = 44^0\,45'$].

3. Platin [für Kupfer-$K\beta$-Strahlung und Pt (400) ist $\vartheta = 45^0$].

Die Spannung der Röhre wurde variiert von 20 bis 60 kV. Da ein streifender Austritt der Röntgenstrahlung von der Antikathode depolarisierend wirken könnte, wurde ein Teil der Aufnahmen mit einer Röhre gemacht, deren Antikathode einen Winkel von 45° mit dem ausgeblendeten Strahl einschloß. Trotz dieser größtmöglichen Variation der Bedingungen zeigte keine der Aufnahmen merkliche Polarisation. In Fig. 4, 5 und 6 sind drei der Filme abgebildet (4 mit Kupfer, 5 mit Magnesium, 6 mit Platin als

* Kupfer-$K\alpha$-Strahlung, durch Reflexion an NaCl (422) polarisiert, mit Pt analysiert (H. Mark und L. Szilard, ZS. f. Phys. **35**, 743, 1926).

Analysator). Die Linien, für die der Glanzwinkel am nächsten gleich 45° ist, wurden der Länge nach, also in Richtung des Pfeils, mit einem selbstregistrierenden Photometer durchphotometriert. Dicht neben der Linie wurde auch der Schleier in derselben Richtung registriert. Fig. 7 zeigt die Photometerkurve der Linie Kupfer (311), über der Linie diejenige des Schleiers, Fig. 8 die Magnesium-(203)-Linie nebst Schleier. Die zahlenmäßige Auswertung dieser Kurven gibt Tabelle 1 und 2. In Spalte 1 stehen die

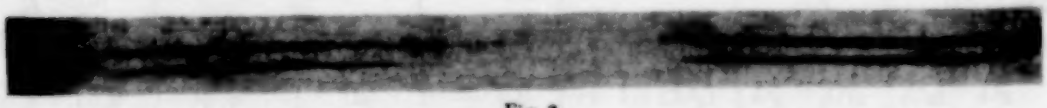


Fig. 3.
Polarisierte Cu-$K\alpha$-Strahlung mit Pt analysiert.

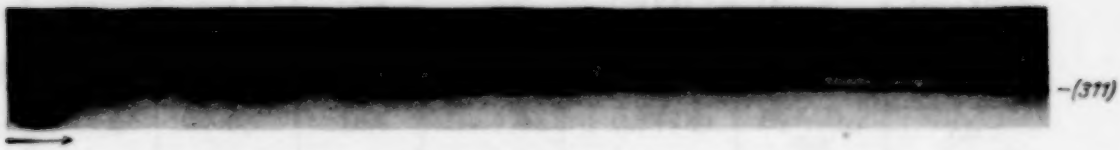


Fig. 4.
Cu-$K\alpha$-Strahlung mit Cu analysiert.

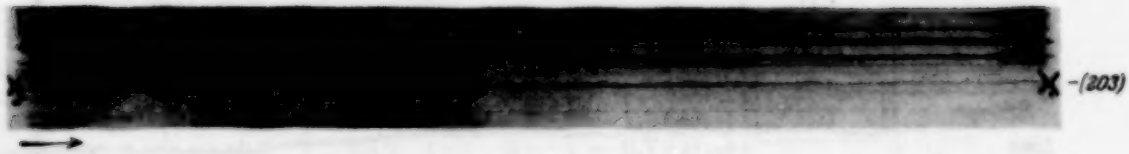


Fig. 5.
Cu-$K\alpha$-Strahlung mit Mg analysiert.

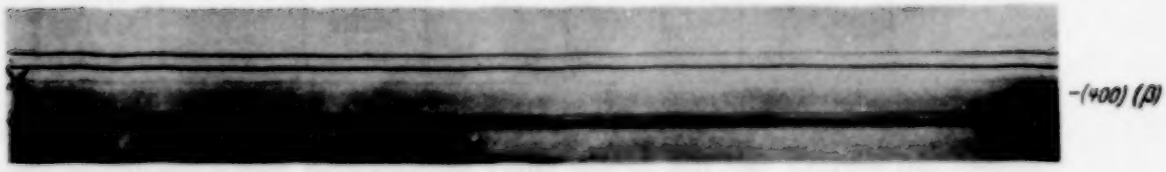


Fig. 6.
Cu-$K\beta$-Strahlung mit Pt analysiert.

Galvanometerausschläge für 17 in gleichem Abstand befindliche Punkte der Linie. Diese Ausschläge messen die Lichtdurchlässigkeit des Films an der betreffenden Stelle. Sie sind also ein umgekehrtes Maß für die Schwärzung und somit für die Intensität der Strahlung. (Die Schwärzungen lagen alle unterhalb 0,5, also im streng linearen Gebiet.) Spalte 2 gibt die prozentuale Abweichung der Werte aus Spalte 1 von ihrem Mittelwert. Spalte 3 enthält die Galvanometerausschläge für dieselben Punkte des Schleiers, Spalte 4 ihre prozentuale Abweichung vom Mittelwert. Um

nun die Schwankungen zu erhalten, die auf Polarisation der reinen charakteristischen Strahlung zurückzuführen sein können, ist folgendes zu berücksichtigen. In der Strahlung können noch polarisierte Teile von Bremsstrahlung oder Streustrahlung (Filter oder Blenden) enthalten sein. Es muß sich das in einer Intensitätsschwankung des Schleiers äußern. An der Stelle der Linie superponiert sich diese Schwärzung der durch

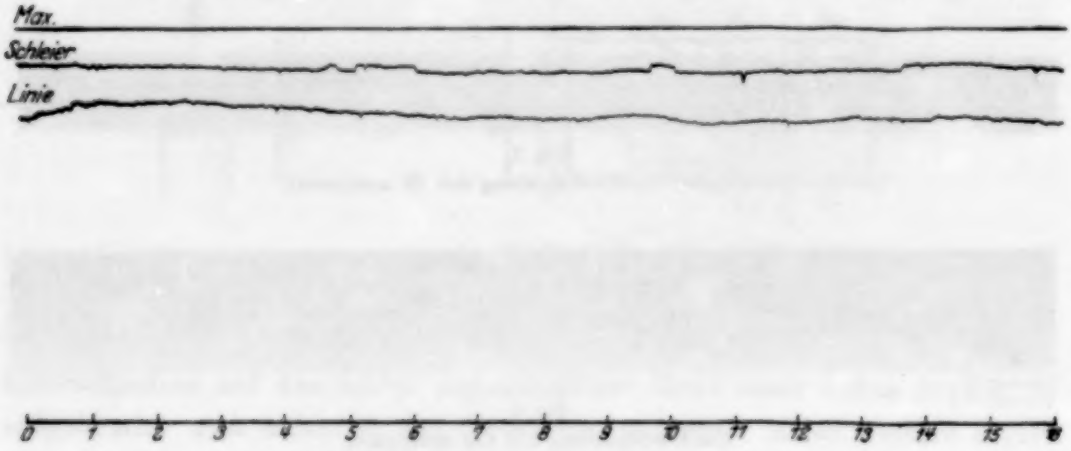


Fig. 7. Photometerkurve von Cu (311).

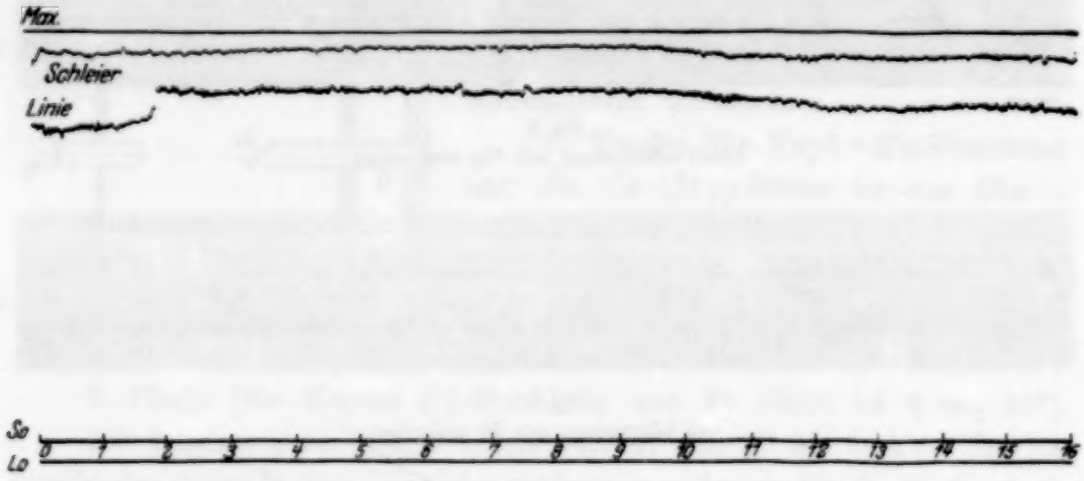


Fig. 8. Photometerkurve von Mg (203).

die charakteristische Strahlung hervorgerufenen. Außerdem kann der Film an verschiedenen Stellen verschieden empfindlich sein. Um also die wahre, weder durch Brems- oder Streustrahlung, noch durch Empfindlichkeitsschwankungen längs des Films bedingte Abweichung der auf charakteristische Strahlung zurückzuführenden Schwärzung vom Mittelwert zu erhalten, muß man die Abweichung des Schleiers von der Abweichung

Tabelle 1.

Film Fig. 4, Photometerkurve Fig. 7.

	1	2	3	4	5	6	7
Nr.	Galvanometer-Ausschlag Linie	Abweichung vom Mittelwert Linie %	Galvanometer-Ausschlag Schleier	Abweichung vom Mittelwert Schleier %	Abweichung Linie — Abweichung Schleier D	Meßgenauigkeit	Möglicher Polarisationsgrad
0	13,8	+ 2,2	16	+ 1,9	+ 0,3 (D_0)	D_0-D_8 0,5	D_4-D_0 0,6
1	13,8	+ 2,2	16	+ 1,9	+ 0,3 (D_1)	D_1-D_9 0,9	D_4-D_8 1,1
2	13,9	+ 3	16	+ 1,9	+ 1,1 (D_2)	D_2-D_{10} 1,3	$D_{12}-D_8$ 1,4
3	13,8	+ 2,2	15,9	+ 1,3	+ 0,3 (D_3)	D_3-D_{11} 1,9	$D_{12}-D_{16}$ 1,5
4	13,7	+ 1,5	15,8	+ 0,6	+ 0,9 (D_4)	D_4-D_{12} 2,5	D_4-D_{16} 1,0
5	13,6	+ 0,7	15,7	0	+ 0,7 (D_5)	D_5-D_{13} 1,4	$D_{12}-D_0$ 1,9
6	13,4	— 0,7	15,5	— 1,3	+ 0,6 (D_6)	D_6-D_{14} 0,6	7,5
7	13,4	— 0,7	15,5	— 1,3	+ 0,6 (D_7)	D_7-D_{15} 0,7	Mittel 1,3
8	13,3	— 1,5	15,5	— 1,3	— 0,2 (D_8)	D_8-D_{16} 0,3	
9	13,5	0	15,6	— 0,6	+ 0,6 (D_9)	10,1	
10	13,3	— 1,5	15,5	— 1,3	— 0,2 (D_{10})		
11	13,2	— 2,2	15,6	— 0,6	— 1,6 (D_{11})	Mittel 1,1	
12	13,2	— 2,2	15,6	— 0,6	— 1,6 (D_{12})		
13	13,4	— 0,7	15,7	0	— 0,7 (D_{13})		
14	13,5	0	15,7	0	0 (D_{14})		
15	13,4	— 0,7	15,6	— 0,6	— 0,1 (D_{15})		
16	13,4	— 0,7	15,6	— 0,6	— 0,1 (D_{16})		
	Mittel 13,5		Mittel 15,7				

der Linie subtrahieren. Diese Werte stehen in Spalte 5. Falls die Schwankungen einen periodischen Gang zeigen mit der Periode der halben Filmlänge, können sie durch Polarisation der charakteristischen Strahlung verursacht sein. Andernfalls stellen sie die innerhalb der Meßgenauigkeit der Methode liegenden Fehler dar. Der Film war so eingelegt, daß für den Fall der Polarisation an den Stellen 0, 4, 8, 12, 16 die Minimal- bzw. Maximalwerte der Intensität liegen müßten. Bildet man also die Differenzen von je zwei um π gegeneinander verschobenen Werten der Spalte 5, also D_0 bis D_8, D_1 bis D_9, D_2 bis D_{10} usw., so gibt der Mittelwert dieser Zahlen die Meßgenauigkeit der Methode, da diese um π gegeneinander verschobenen Punkte auch bei Polarisation gleiche Intensität haben müßten. Bildet man hingegen die Differenzen derjenigen Werte,

Tabelle 2.

Film Fig. 5, Photometerkurve Fig. 8.

Nr.	1 Galvanometer-Ausschlag Linie	2 Abweichung vom Mittelwert Linie %	3 Galvanometer-Ausschlag Schleier	4 Abweichung vom Mittelwert Schleier %	5 Abweichung Linie − Abweichung Schleier D	6 Meßgenauigkeit	7 Möglicher Polarisationsgrad
2	15,2	+ 2,5	15,7	− 0,1	(D_2) + 2,6	D_2-D_{10} 1,9	D_4-D_8 0,8
3	15	+ 1,1	15,8	+ 0,5	(D_3) + 0,6	D_3-D_{11} 0	$D_{12}-D_8$ 0,2
4	15,15	+ 2,2	15,9	+ 1,1	(D_4) + 1,1	D_4-D_{12} 0,6	$D_{12}-D_{16}$ 0
5	15,15	+ 2,2	15,9	+ 1,2	(D_5) + 1,0	D_5-D_{13} 2,5	D_4-D_{16} 2,6
6	15,1	+ 1,8	15,9	+ 1,2	(D_6) + 0,6	D_6-D_{14} 1,8	3,6
7	15	+ 1,1	15,9	+ 1,1	(D_7) 0	D_7-D_{15} 0,9	Mittel 0,9
8	15,1	+ 1,8	15,95	+ 1,5	(D_8) + 0,3	D_8-D_{16} 1,8	
9	15,1	+ 1,8	15,95	+ 1,5	(D_9) + 0,3	9,5	
10	15	+ 1,2	15,8	+ 0,5	(D_{10}) + 0,7		
11	14,8	− 0,2	15,6	− 0,8	(D_{11}) + 0,6	Mittel 1,36	
12	14,7	− 0,9	15,5	− 1,4	(D_{12}) + 0,5		
12	14,4	− 2,9	15,5	− 1,4	(D_{12}) − 1,5		
13	14,4	− 2,9	15,5	− 1,4	(D_{13}) − 1,5		
14	14,45	− 2,6	15,5	− 1,4	(D_{14}) − 1,2		
15	14,45	− 2,6	15,55	− 1,7	(D_{15}) − 0,9		
16	14,35	− 3,2	15,55	− 1,7	(D_{16}) − 1,5		
	Mittel 14,83		Mittel 15,72				

Da an der Stelle 12 eine Unstetigkeit vorhanden ist, sind in der Tabelle zwei Werte angegeben. Die Werte 0 und 1 sind nach Fig. 8 offensichtlich infolge unbekannter Störungen zu klein. Sie wurden daher nicht vermessen.

die um $\pi/2$ verschoben sind, also im Falle der Polarisation Punkten verschiedener Intensitäten entsprechen, z. B. D_4 bis D_0, D_4 bis D_8, D_{12} bis D_8 usw., so gibt ihr Mittelwert ein direktes Maß in Prozenten für den Polarisationsgrad der Strahlung. Es scheint uns berechtigt, die Prozente (Spalte 2 bzw. 4) vom Galvanometerausschlag als der tatsächlich gemessenen Größe zu rechnen und nicht von der Schwärzung. Ebenso ändert die Tatsache, daß wir die prozentualen Abweichungen der Linie bzw. des Schleiers voneinander abzogen und nicht die Absolutwerte, kaum etwas an der Genauigkeit des Resultats. Es wurde also näherungsweise der Ausdruck

$$\frac{J_\perp - J_\parallel}{J_{\text{mittel}}} = \frac{2\,(J_\perp - J_\parallel)}{J_\perp + J_\parallel}$$

bestimmt und als Polarisationsgrad in Prozenten errechnet. Aus Spalte 6, Tabelle 1, findet man die mittlere Meßgenauigkeit zu 1,1 %, den möglichen mittleren Polarisationsgrad aus Spalte 7 zu 1,3 %. Aus Spalte 6, Tabelle 2, ergibt sich die Fehlergrenze zu 1,4 %, der mögliche mittlere Polarisationsgrad zu 0,9 %.

Man sieht, daß diese Werte für den Polarisationsgrad durchaus in der Größenordnung der Fehlergrenzen liegen, daß also innerhalb dieser Grenzen eine Polarisation der charakteristischen Strahlung nicht besteht.

Herrn Dr. E. Hochheim, Oppau, in dessen Laboratorium die Photometrierungen durchgeführt wurden, sind wir zu großem Dank verpflichtet.

Ludwigshafen a. Rh, Hauptlaboratorium der I. G. Farbenindustr. A. G.

(Aus dem Forschungsinstitut der AEG, Berlin-Reinickendorf.)

Über Elektronenbeugung an einem geritzten Gitter.

Von **E. Rupp** in Berlin.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 29. September 1928.)

Nach der Methode des streifenden Einfalls wird an einem mechanisch geritzten Gitter Elektronenbeugung nachgewiesen für verschiedene streifende Einfallswinkel und bei 70, 150 und 310 Volt Geschwindigkeit der Elektronen. Die de Broglie-sche Wellenlängenbeziehung $\lambda = \frac{h}{m v}$ ist, soweit die Genauigkeit der Versuche reicht, auf $\pm 2\%$ in Übereinstimmung mit der nach einer Relativmethode und absolut aus Längenmessungen gemessenen Elektronenwellenlänge.

§ 1. Die bisherigen Versuche, die sich mit Elektronenbeugung befassen, sind mit Kristallen als Gittern, also mit Potentialgittern, durchgeführt worden. Es entstand die wichtige Frage, ob ein mechanisch geritztes Gitter ebenfalls Beugungsphänomene ergeben wird. Die hier mitzuteilenden Versuche bejahen diese Frage und erlauben die Feststellung, daß für ein geritztes Gitter die de Broglie-sche Wellenlängenbeziehung gültig ist bis zur Fehlergrenze dieser Versuche, bis auf $\pm 2\%$.

Die Methode, mit geritztem Gitter Elektronenbeugung zu erhalten, schließt sich unmittelbar an an die von A. Compton für die Beugung von Röntgenstrahlen durchgeführte Methode des streifenden Einfalls am Gitter, da die zu erwartende Wellenlänge mittelschneller Elektronen von der Größenordnung gewöhnlicher Röntgenstrahlen ist.

§ 2. Die Methode des streifenden Einfalls. Ein Elektronenstrahl falle unter dem streifenden Winkel Θ auf das Gitter auf, wo er unter demselben Winkel reflektiert wird. Der reflektierte Strahl trifft bei R auf eine Auffangefläche. Tritt Beugung am Gitter ein, so sei α der Beugungswinkel, der gemessen werden kann aus den Entfernungen $l =$ Gittermitte — Auffangefläche und $a = RB$ (Fig. 1). Für diesen Fall des streifenden Einfalls gilt die Beziehung

$$n \lambda = \frac{d}{2} \alpha (\alpha + 2\Theta),$$

wenn d die Gitterkonstante des geritzten Gitters, wie sie aus optischen Methoden folgt, λ die Wellenlänge der Elektronenwelle und n die Ordnung des Beugungsbildes ist.

Bei Anwendung dieser Gleichung sind d und α bekannt, λ und Θ gesucht. Die Messung der Wellenlänge λ kann nach einer Relativmethode wie nach einer absoluten Methode geschehen.

a) Relativmethode. Für λ wird Gültigkeit der de Broglieschen Beziehung $\lambda = \frac{h}{m v}$ vorausgesetzt und bei ein und demselben Winkel Θ am Apparat der Beugungswinkel α bei verschiedener Strahlgeschwindigkeit bestimmt. Ist die de Broglie sche Beziehung gültig, so muß die Auswertung ein und denselben Wert für Θ ergeben.

b) Absolutmethode. Ist außer dem Beugungswinkel erster Ordnung auch noch der zweiter oder gar dritter Ordnung bekannt, so können λ

Fig. 1.

und Θ absolut bestimmt werden. Die Elektronenwellenlänge folgt dann wie in der Lichtoptik aus reinen Längenmessungen. Bei vorliegender Untersuchung konnten beide Methoden Anwendung finden.

§ 3. Bedingungen, um Elektronenbeugung zu erhalten. Zur erfolgreichen Durchführung der Versuche erwiesen sich drei Bedingungen als ausschlaggebend:

1. Ein auf Metall geritztes Gitter. Das verwendete Gitter war auf Spiegelmetall geritzt. Es hatte 1300 Teile/cm, also $d = 7{,}70 \cdot 10^{-4}$ cm, gemessen mit der grünen Quecksilberlinie.

2. Abbildung des Elektronenstrahls mit Magnetspule. Um eine scharfe Abbildung des Elektronenstrahls zu erhalten, wurde das Verfahren von H. Busch* in Anwendung gebracht, den Elektronenstrahl beim Eintritt in die Eintrittsblende der Versuchsröhre durch ein inhomogenes Magnetfeld auf dem photographischen Film abzubilden. Ist die Magnetspule kurz gegenüber der Strahllänge, so kann man, wie Busch gezeigt hat, den Elektronenstrahl abbilden auf Grund einer Beziehung, die ganz der optischen Linsenformel entspricht. Die Einstellung der Stromstärke in der Spule muß empirisch erfolgen. Einzelheiten folgen in § 4. Um das erdmagnetische Feld zu kompensieren, war in der Nähe des Filmhalters ein ringförmiger Stabmagnet angebracht, ein einfaches Verfahren, das ebenfalls Busch angegeben hat.

* H. Busch, Arch. f. Elektrot. **18**, 583, 1927.

3. Beschießen des Gitters mit schnellen Elektronen. Da das Gitter nicht ausgeheizt werden konnte, wurde es in Zwischenpausen während einer Aufnahme mit schnellen Elektronen beschossen in folgender Weise: Vor Beginn der Aufnahme wurde das Gitter zwei bis drei Minuten mit Elektronen von 1500 oder 3000 Volt beschossen. Dann wurde die Aufnahme in Gang gebracht, drei bis vier Minuten lang. Hierauf wurde

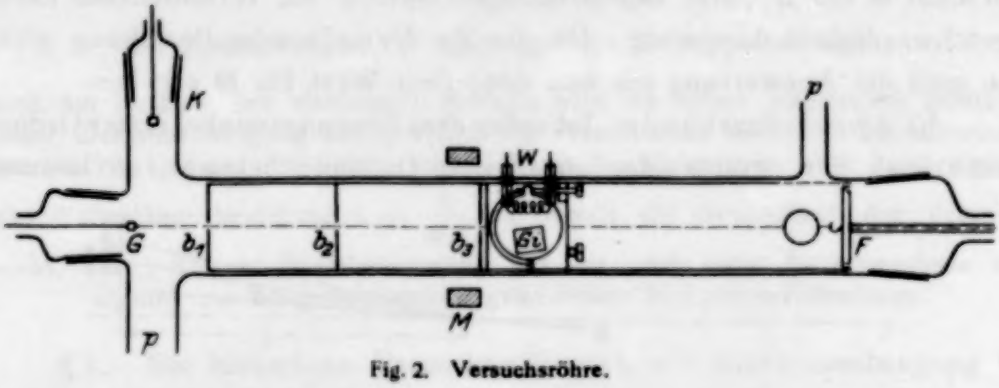


Fig. 2. Versuchsröhre.

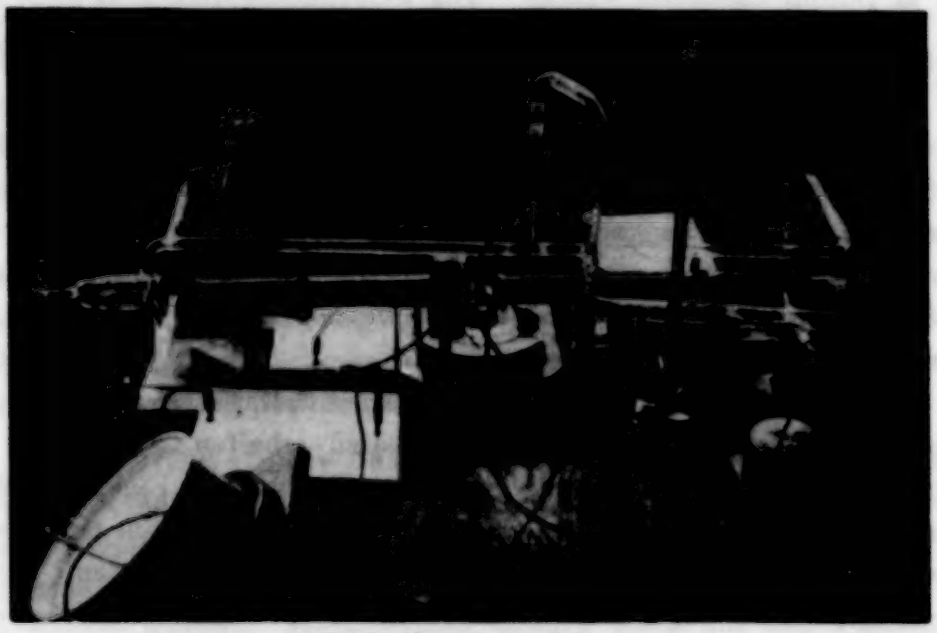


Fig. 3. Versuchsanordnung.
Kathode rechts, Filmhalter links.

das Gitter wieder zwei Minuten beschossen und dann nach Abkühlen des Gitters die Aufnahme fortgesetzt usw. Die ganze Aufnahme dauerte 10 bis 15 Minuten.

§ 4. Die Versuchsröhre. Die Versuchsröhre ist in Fig. 2 schematisch gezeichnet. Ein Bild der Versuchsanordnung gibt Fig. 3. Die Elektronen liefert ein mit Bariumoxyd bedeckter Wolframdraht *K*.

Zwischen der Kathode und einem zweiten Glühdraht G liegt eine Spannung von etwa 12 Volt; zwischen diesem Glühdraht und der Blende b_1 die variierte Hauptspannung. Auf diese Weise wird erreicht, daß das Licht des Glühdrahtes die Aufnahme auf dem photographischen Film nicht stört. Die drei Blenden b_1, b_2, b_3 sind 0,8 cm hoch und 0,1 bis 0,2 mm breit. Über der dritten Blende befindet sich die Magnetspule M (10000 Windungen), die die erste Blende b_1 auf dem Film F abbildet.

Hinter b_3 trifft der Elektronenstrahl auf das Gitter Gi. Das Gitter kann senkrecht zur Röhrenachse und in einem Winkel zur Röhrenachse mittels Mikrometerschrauben gedreht werden. Dazu wird der den Filmhalter tragende Schliff weggenommen. Dem Gitter gegenüber befindet sich eine Wolframspirale W zur Beschießung des Gitters. Damit während dieser Beschießung kein Licht des Glühdrahtes auf den Film am Halter eindringt, kann der Film mit einer Platte abgedeckt werden, die durch einen Schliff betätigt wird. Die Entfernung $b_1 b_3$ beträgt 32 cm, $Gi - F$ 38,5 cm.

Die Kathode und der zweite Glühdraht G liegen auf negativer Spannung. Alle anderen Teile sind geerdet; der gesamte Elektronenstrahl von b_1 bis F hat Metallschutz. Die photographischen Filme wurden mit Öl sensibilisiert. An zwei Stellen p der Röhre wird abgepumpt.

§ 5. Justierung des Gitters. Der zweite Glühdraht G an der Kathode, ein Platindraht, dient zur Justierung des Gitters mit Licht. Dazu wird der Filmhalter weggenommen und eine lichtelektrische Zelle mit vorgesetztem Spalt an diese Stelle gebracht. Erst werden die Blenden eingestellt und dann das Gitter in folgender Weise justiert: Das Gitter wird senkrecht zur Röhrenachse in den Lichtstrahlengang hineingeschoben und die Lichtintensität dabei gemessen. Man erhält eine Kurve, wie Fig. 4 zeigt. So kann der Ort $l = 0$, wo die Gitterebene den Elektronenstrahl erreicht, genau ermittelt werden.

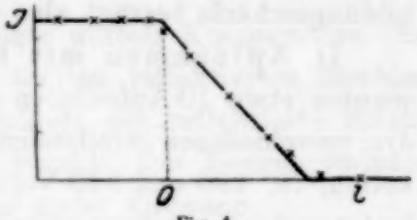


Fig. 4.

Nun wird der Spalt vor der lichtelektrischen Zelle auf 0,1 mm verengt, das Gitter in einem Winkel zur Röhrenachse gedreht und wieder die Lichtintensität gemessen als Funktion der Gitterdrehung.

Durch Kombination beider Drehungen kann festgestellt werden, wann die Gitterebene parallel zum Lichtstrahl am Orte 0 gerade in den Strahl eintritt, und von dieser Stellung aus kann ein streifender Einfallswinkel eingestellt werden. Die unmittelbare Messung des streifenden Einfallswinkels Θ ließ sich nicht mit der nötigen Genauigkeit durchführen.

In Fig. 3 ist auch der ringförmig gebogene Stabmagnet zu erkennen und die Vorrichtung, die Klappe vor dem Filmhalter hochzuziehen.

§ 6. Versuchsergebnisse. I. Einstellaufnahmen. Es seien zuerst Aufnahmen mitgeteilt, die Schärfe der Einstellung zu zeigen (Fig. 5).

a) Eine Abbildung des Elektronenstrahls von 70 Volt Geschwindigkeit ohne genügende Kompensation des erdmagnetischen Feldes.

b) Derselbe Strahl nach Kompensation des Erdfeldes durch den Stabmagnet. Man sieht deutlich den Einfluß der Kompensation.

c) Eine Abbildung des 150 Volt-Strahls.

d) Eine Aufnahme, die Abbildungsschärfe der Anordnung zu prüfen. Dazu wurde vor die erste Blende der Versuchsröhre ein Draht von 0,2 mm und ein Draht von 0,02 mm quer übergespannt. Auf der Aufnahme erkennt man, daß der Draht von 0,2 mm sich scharf abgebildet hat,

a b c d

Fig. 5. Einstellaufnahmen.

während der Draht von 0,02 mm noch gerade angedeutet ist. Die Abbildungsschärfe beträgt also etwa 0,1 mm.

II. Aufnahmen mit Gitter. Mit dem Gitter im Strahlengang wurden etwa 40 Aufnahmen gemacht, die verwertet werden konnten, bei drei verschiedenen streifenden Einfallswinkeln und drei Strahlgeschwindigkeiten, 70, 150 und 310 Volt. Aufnahmen bei 40 Volt Strahlgeschwindigkeit wurden vergebens versucht. Nicht alle Stellen des Gitters erwiesen sich als wirksam, von sieben Stellen konnten drei verwendet werden, aber auch hier sind die Beugungsbilder nicht auf der ganzen Länge des reflektierten Strahls zu sehen. Es scheint, als ob ein auf einen Einkristall geritztes Gitter am günstigsten wäre.

Von den gewonnenen Aufnahmen zeigt Fig. 6 einige Beispiele.

a) reflektierter Strahl von 70 Volt $\Theta = 3{,}0 \cdot 10^{-3}$,
b) „ „ „ 70 „ $\Theta = 1{,}1 \cdot 10^{-3}$,
c) „ „ „ 150 „ $\Theta = 3{,}0 \cdot 10^{-3}$,
d) „ „ „ 150 „ $\Theta = 2{,}2 \cdot 10^{-3}$,
e) „ „ „ 150 „ $\Theta = 3{,}0 \cdot 10^{-3}$,
f) „ „ „ 310 „ $\Theta = 1{,}1 \cdot 10^{-3}$.

Man erkennt auf den Aufnahmen mit kleinerem streifenden Einfallswinkel $\Theta = 1{,}1 \cdot 10^{-3}$ den reflektierten Strahl und die Beugung erster Ordnung. Auf den Aufnahmen mit größerem streifenden Einfallswinkel $\Theta = 3{,}0 \cdot 10^{-3}$ auch noch Beugung zweiter Ordnung, und auf der Aufnahme Fig. 6d Beugung erster, zweiter und dritter Ordnung. Ein größerer streifender Einfallswinkel scheint also für das Heraustreten der höheren Ordnungen günstiger zu sein*.

Diese Aufnahmen stehen in voller Analogie zu Beugungsbildern von Röntgenstrahlen an demselben Gitter.

Daß die Erscheinung Elektronen zukommt, wurde geprüft einmal durch Weglassen der Spannung zwischen K und b_1, dann durch einen ablenkenden Stabmagnet.

§ 7. Auswertung der Aufnahmen. Zur Auswertung der Aufnahmen wurde das zwischen K und b_1 (Fig. 2) liegende Potential als

a b c d e f

Fig. 6. Aufnahmen mit Gitter.

richtig angenommen. Die Ausmessung erfolgte mittels Komparators. Es ist oft schwierig, auf die Mitte des stets breiten reflektierten Strahles einzustellen. Bei manchen Aufnahmen verläuft der reflektierte Strahl unter einem spitzen Winkel zum gebeugten Strahl. Der Beugungswinkel zweiter Ordnung ist stets ungenauer als der erster Ordnung.

I. Relativmethode. Sämtliche auswertbaren Aufnahmen nach der Relativmethode § 2a sind in der Tabelle 1 zusammengestellt.

a_1, a_2 Abstand Mitte des reflektierten Strahles bis zum gebeugten Strahl erster bzw. zweiter Ordnung in Millimetern. α_1, $\alpha_2 \cdot 10^{-3}$ Beugungswinkel erster bzw. zweiter Ordnung $\alpha = \frac{a}{l}$, wobei $l = 38{,}5$ cm. $\Theta_1, \Theta_2 \cdot 10^{-3}$ die unter Annahme der Gültigkeit der de Broglieschen Beziehung berechneten streifenden Einfallswinkel, deren Konstanz bei Änderung der Strahlgeschwindigkeit diese Beziehung bestätigt.

---

* Das Beugungsmaximum zwischen Gitter und reflektiertem Bild ist nur bei 310 Volt angedeutet, bei der anderen Aufnahme nicht feststellbar.

Tabelle 1

70 Volt $\sim$ 1,47 Å

Nr.	a_1	a_2	a_1	a_2	ϑ_1	ϑ_2	Nr.	a_1	a_2	a_1	a_2	ϑ_1	ϑ_2
56	2,08	3,1	5,40	8,05			27	1,47	2,4	3,82	6,2		
57	2,04	3,0	5,30	7,8			28	1,42	—	3,70	—		
58	1,92	—	5,0	—	1,18	1,0	30	1,51	2,45	3,92	6,4		
59	1,83	2,8	4,75	7,3	± 0,15	± 0,2	32	1,50	2,4	3,88	6,2	3,03	2,9
62	2,13	3,0	5,28	7,8			35	1,46	2,4	3,80	6,2	± 0,1	± 0,1
71	1,9	—	4,94	—			36	1,42	2,5	3,70	6,5		
72	1,98	—	5,14	—			38	1,55	2,4	4,03	6,2		
							39	1,58	2,5	4,10	6,5		

150 Volt $\sim$ 1,00 Å

Nr.	a_1	a_2	a_1	a_2	ϑ_1	ϑ_2	Nr.	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3
44	1,51	2,41	3,91	6,25			22	1,16	2,1	—	3,00	5,45	—			
45	1,59	2,51	4,14	6,52			23	1,15	—	—	2,98	—	—			
47	1,70	2,3	4,4	6,0			40	1,16	1,9	2,5	3,00	4,95	6,5			
49	1,70	2,3	4,4	6,0			42	1,08	—	—	2,7	—	—			
65	1,60	2,3	4,15	6,0	1,08	1,15	43	1,22	1,9	—	3,18	4,95	—	2,96	3,10	3,03
66	1,55	2,4	4,03	6,25	± 0,1	± 0,15	48	1,17	1,80	2,4	3,04	4,7	6,2	± 0,08	± 0,15	± 0,15
67	1,60	2,5	4,15	6,5			50	1,12	1,80	2,47	2,90	4,7	6,4			
68	1,53	2,4	3,98	6,25			52	1,13	1,7	2,4	2,94	4,4	6,2			
69	1,58	2,4	4,10	6,25			53	1,08	1,8	2,4	2,7	4,7	6,2			

310 Volt $\sim$ 0,70 Å

70	1,2	1,85	3,1	4,8		
74	1,3	—	3,4	—		
75	1,3	—	3,4	—	1,0	1,2
76	1,3	—	3,4	—	± 0,1	± 0,1
77	1,3	1,95	3,4	5,0		
78	1,5	—	3,9	—		

$\theta = 1{,}10 \cdot 10^{-3} \pm 0{,}12$

$\theta = 3{,}01 \cdot 10^{-3} \pm 0{,}1$

Aus der Tabelle folgt für den kleineren streifenden Einfallswinkel $\Theta = 1{,}10 \cdot 10^{-3} \pm 0{,}1$, für den größeren streifenden Einfallswinkel $\Theta = 3{,}01 \cdot 10^{-3} \pm 0{,}08$. Für letzteren Winkel zeigen die Messungen für 150 Volt einen mittleren Fehler von $\pm 3\%$, die von 70 Volt von $\pm 4\%$. Die Messungen bei 310 Volt sind am ungenauesten mit $\pm 10\%$ Fehlern.

II. Absolutmethode. Tabelle 2. Diese Methode wurde nur mit Elektronen von 150 Volt durchgeführt, wo Beugungsbilder bis dritter Ordnung erhalten wurden. Es kamen zwei streifende Einfallswinkel in Anwendung. Die Genauigkeit der Aufnahme Nr. 46 (Fig. 6 d) ist die größte in der Untersuchung erreichte, der mittlere Fehler der Wellenlängenangabe ist $\pm 2\%$, wie er aus Fehlern der Spannungsmessung (Kontaktpotentiale) herrühren kann. Für die anderen Aufnahmen beträgt der mittlere Fehler $\pm 3\%$.

Tabelle 2.

Nr.	150 Volt									
	a_1	a_2	a_3	α_1	α_2	α_3	Θ_1	Θ_2	Θ_3	λ
46	1,30	2,05	2,60	3,38	5,34	6,80	2,15	2,20	2,30	$1{,}00 \pm 0{,}02$
40	1,16	1,9	2,5	wie Tabelle 1			$2{,}98 \pm 0{,}05$	$3{,}08 \pm 0{,}10$	$3{,}03 \pm 0{,}10$	$1{,}00 \pm 0{,}03$
48	1,17	1,80	2,4							
50	1,12	1,80	2,47							
52	1,13	1,7	2,4							
53	1,08	1,8	2,4							

Ein inneres Gitterpotential, wie es bei Elektronenbeugung an Kristallen in der Größenordnung von 10 bis 20 Volt gefunden wurde, läßt sich danach nicht feststellen.

Die de Broglie sche Beziehung vermag also, soweit die Genauigkeit der Messungen reicht, eine exakte Angabe der Wellenlänge der Elektronenwelle zu liefern. Andere Bestimmungsstücke der Elektronenwelle sind uns bisher nicht bekannt. Versuche des Verfassers, Polarisation der Elektronenwelle nachzuweisen, haben bisher zu keinem Ergebnis geführt. Doch werden diese Versuche weiter fortgesetzt.

Herrn Professor Pohl danke ich herzlich für die mir in Göttingen gewährte Gastfreundschaft.

Berlin-Reinickendorf, September 1928.

Über diffuse Molekülspektra.

Von **B. Rosen** in Berlin.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 25. September 1928.)

Es ist am Beispiel des Schwefelspektrums gezeigt worden, daß die Annahme von Augerprozessen zur Erklärung der Verwaschenheit der Banden nicht immer ausreicht; auch die Vergrößerung des Wirkungsquerschnitts bei höheren Kernschwingungsamplituden dürfte dazu beitragen. Dort, wo Augerprozesse energetisch stattfinden können, scheint ihr Vorhandensein im Schwefeldampf sichergestellt zu sein*.

Als Resultat einer langjährigen Arbeit haben Henri und seine Schüler zur Deutung der diffusen Molekülspektra den Begriff des Vordissoziationszustandes ausgearbeitet**. Die von ihnen durchgeführte systematische Untersuchung einer Reihe organischer und anorganischer Substanzen zeigte, daß ihre Spektra fast immer aus zwei oder mehreren Teilgebieten zusammengesetzt sind, von denen mindestens ein Gebiet nur aus kontinuierlichen Banden besteht. Henri teilt die vollständigen Spektra in drei Teilgebiete: Gebiet der vollen Quantelung (normale Bandenspektra), Gebiet, in dem zwar die Elektronenbewegung und die Kernschwingung noch gequantelt sind, die Rotation aber nicht mehr (diffuse Banden mit Kantenstruktur), und schließlich Gebiet, wo die Elektronenbewegung allein noch gequantelt ist (ein breites diffuses Band); indem dieses letzte Gebiet im Einklang mit Franck der vollständigen Dissoziation zugeordnet wird, entspricht das vorletzte nach Henri dem Übergang in den Vordissoziationszustand. Die Vorstellungen über diesen Zustand sind nicht sehr präzis; er kann entweder durch Vergrößerung der Kernschwingungsenergie oder durch Überführung von Elektronen auf höhere Quantenbahnen erreicht werden; die Atome sind im Vordissoziationszustand locker gebunden, ohne aber ganz auseinanderzufallen, die Moleküle sind leichter zu chemischen Reaktionen anzuregen usw.

Ungefähr gleichzeitig mit dem Begriff des Vordissoziationszustandes ist von Franck und Born der Begriff des Quasimoleküls eingeführt worden, der, ohne mit jenem identisch zu sein, doch vieles gemeinsam mit ihm hat. Born und Franck suchten auch den diffusen Charakter einiger Bandensysteme dadurch zu erklären, daß die Lebensdauer der erregten

---

* Anmerkung bei der Korrektur. R. de L. Kronig (ZS. f. Phys. **50**, 347, 1928) hat neulich quantenmechanisch berechnet, daß die theoretisch zu erwartende Häufigkeit der Angerprozesse dem experimentellen Befund am S_2 durchaus entspricht.

** Zusammenfassung: V. Henri, Structure des Molécules, Kap. 5, S. 82, Paris 1925. Neuere Darstellung: V. Henri und R. Wurmser, Journ. de phys. **8**, 289, 1927.

Moleküle klein gegenüber der zu quantelnden Periode ist. Später hat Franck gezeigt, daß diese Erklärung jedenfalls nicht die einzig mögliche ist.

In neuerer Zeit haben Bonhoeffer und Farkas* diese Frage wieder aufgenommen und einen Versuch gemacht, die diffusen Banden durch Verbreiterung der Rotationslinien infolge innerer Stöße (Augerprozesse) zu deuten; das angeregte Molekül kann strahlungslos zerfallen, indem seine Quantenenergie in Translationsenergie der auseinanderfliegenden Atome oder Molekülbruchstücke umgewandelt wird. Die dadurch eintretende Verkürzung der Lebensdauer äußert sich in der Vergrößerung der Linienbreite, die Rotationslinien überlagern sich, und die entsprechenden Banden scheinen kontinuierlich zu sein. Durch Untersuchung des ultravioletten Ammoniakspektrums haben Bonhoeffer und Farkas ihre Ansichten bekräftigt.

Die Spektra der meisten Substanzen, die Henri und seine Schüler untersucht haben, sind komplizierter Natur, keines von ihnen ist meines Wissens bisher vollständig analysiert worden. Es schien deshalb für die Klärung aller damit zusammenhängenden Fragen von großer Wichtigkeit, entweder das ganze Spektrum einer bereits spektral analysierten Substanz nach diffusen Banden abzusuchen, oder umgekehrt ein Spektrum, in dem Henri Übergänge von diskreter zu kontinuierlicher Struktur beobachtet hat, in seiner Gesamtheit zu analysieren.

Gelegentlich einer Arbeit über die Molekülspektra in der sechsten Gruppe des periodischen Systems** habe ich vor einem Jahre das bereits von Henri und Teves*** studierte S_2-Spektrum analysiert und gefunden, daß die diffusen Banden entgegen ihrer Annahme demselben Elektronenübergang angehören wie die Banden mit Feinstruktur. Sie unterscheiden sich von den letzteren dadurch, daß sie den Übergängen zu höheren Kernschwingungsniveaus des einzigen bisher bekannten angeregten Zustandes entsprechen, während die Banden mit Feinstruktur Übergängen entsprechen, die zu den tieferen Kernschwingungsniveaus desselben angeregten Zustandes führen.

In einer zweiten vor kurzem erschienenen Arbeit**** habe ich auch den langwelligen, im Sichtbaren liegenden Teil des Schwefelspektrums untersucht und ein Kantenschema für das ganze Spektrum angegeben. In der Vermutung, daß die Ursache der Verwaschenheit der Banden in der

* K. F. Bonhoeffer und L. Farkas, ZS. f. phys. Chem. **134**, 337, 1927.
** B. Rosen, ZS. f. Phys. **43**, 69, 1927.
*** V. Henri und M. C. Teves, C. R. **179**, 1156, 1927; M. C. Teves, Diss. Zürich 1926.
**** B. Rosen, ZS. f. Phys. **48**, 545, 1928.

großen Kernschwingungsamplitude zu suchen ist, wollte ich schon damals die Feinstruktur dieser langwelligen Banden, die auf den höheren Kernschwingungsniveaus des Normalzustandes ihren Ursprung haben, untersuchen, konnte diese Arbeit aber mangels geeigneter Spektralapparate nicht durchführen.

Durch das liebenswürdige Entgegenkommen des Herrn Präsidenten Paschen ist es mir jetzt möglich gewesen, einige Absorptionsaufnahmen mit dem großen 6 m-Gitter der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt zu machen. Ich habe das Schwefelspektrum von 3000 bis 5000 Å in der ersten und zweiten Ordnung (Auflösung 4 bzw. 2 Å auf 1 mm) aufgenommen und konnte feststellen, daß bei Temperaturen oberhalb 500° und bei Drucken oberhalb 20 mm alle Banden, deren Wellenlängen größer als 3650 Å sind, keine Spur von Rotationsstruktur aufweisen; andererseits haben Henri und Teves gezeigt, daß die kurzwellige Grenze der Rotationsquantelung bei 2794 Å liegt.

Wenn man diese Resultate mit dem Kantenschema des Schwefelspektrums vergleicht, so sieht man, daß alle Banden, die von höheren als dem 7. Kernschwingungsniveau des normalen oder zu höheren als dem 10. Kernschwingungsniveau des erregten Zustandes führen, keine Rotationsquantelung mehr zeigen. Als Erklärung scheint mir nur die Vergrößerung des Wirkungsquerschnitts bei den größeren Amplituden möglich, die bewirkt, daß bereits bei 20 mm Druck die einzelnen Rotationslinien sich überlappen. Die Erklärung durch Augerprozesse scheint in diesem Falle ausgeschlossen zu sein, da die verfügbare Energie von 27 500 $+ 5000\,\mathrm{cm}^{-1} = 32\,500\,\mathrm{cm}^{-1}$ (die der Grenze bei 3650 Å + der Kernschwingungsenergie im 7. Kernschwingungsniveau des Normalzustandes entspricht) die Dissoziationsenergie bei weitem nicht erreicht.

Wegen der Schwäche der Banden (deren Ursache darin liegt, daß sie von den höheren Kernschwingungsniveaus des Normalzustandes ausgehen) konnte ich bei niedrigeren Drucken und Temperaturen keine brauchbaren Spektren erhalten; die für solche Aufnahmen erforderlichen langen Absorptionsstrecken konnte ich aus technischen Gründen nicht verwenden.

Was die kurzwellige Grenze der kontinuierlichen Bandenstruktur angeht, so scheinen mir die Ergebnisse im S_3-Dampf die Theorie von Bonhoeffer und Farkas zu bekräftigen. Im kurzwelligen Gebiet konnte ich leider nur mit geringerer Dispersion arbeiten, so daß die Rotationsfeinstruktur nicht untersucht werden konnte.

Nach Henri und Teves haben die Banden in diesem Gebiet Gruppenstruktur, indem die einzelnen Bandengruppen aus mehreren Banden be-

stehen, deren jede ihrerseits die gleiche Rotationsfeinstruktur aufweist. Da die Feinheiten auf der Aufnahme nicht reproduziert werden können, habe ich die allgemeine Gestalt des Spektrums, das ich bei verschiedenen Drucken und Temperaturen aufgenommen habe, in der Fig. 1 schematisch dargestellt.

Die Gruppenstruktur scheint mir nur dadurch vorgetäuscht zu sein, daß die Banden der Serie $n = 0$ viel stärker sind als die übrigen, sie bilden die „Gruppenkanten". Wegen ihrer Stärke sind die anderen zwischen ihnen liegenden Banden bei höheren Drucken nur in einiger Entfernung von der Gruppenkante zu sehen. Die Abstände der Banden innerhalb der Gruppen sind, mit zwei Ausnahmen, entgegen früheren Angaben durchaus unregelmäßig. Eine Einordnung dieser Banden in das Kanten-

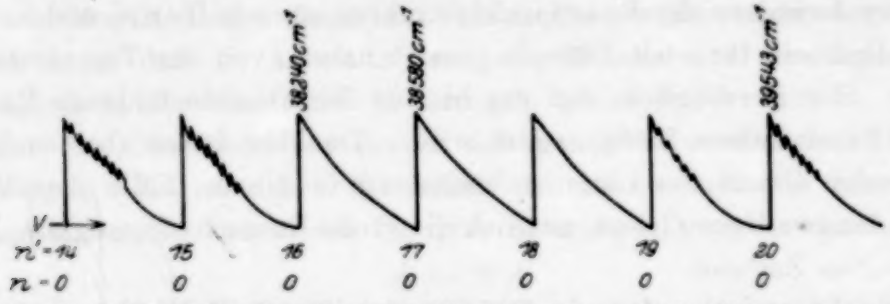


Fig. 1. Schematische Darstellung des Schwefelspektrums in der Umgebung der kurzwelligen Grenze der Gruppenstruktur. Die Ordinaten bedeuten Durchlässigkeit.

schema ist wegen ihrer großen Zahl, ihres kleinen gegenseitigen Abstandes und der relativen Ungenauigkeit der Messung bei der kleinen Dispersion nicht eindeutig.

Nach Henri und Teves verschwindet die Gruppenstruktur ganz plötzlich bei der Grenze 38 569 cm^{-1}. Wie ich durch eine Reihe von Aufnahmen feststellen konnte, ist die Bande $n = 0$, $n' = 16$, deren Kante bei 38 240 cm^{-1} liegt, die letzte, die solche Gruppenstruktur noch aufweist, die Bande $n = 0$, $n' = 17$ mit der Kante bei 38 580 cm^{-1} ist bereits ganz kontinuierlich. Bei der Änderung der Temperatur von 500 bis 800° und des Druckes von 0,1 bis 10 mm ändert sich diese Grenze nicht.

Bemerkenswert ist die Tatsache, daß die Gruppenstruktur weiter im Ultraviolett wieder erscheint. In der Bande $n = 0$, $n' = 20$ ist sie bereits angedeutet und wird nach kürzeren Wellen hin immer stärker. Nur ist sie hier weniger ausgeprägt, da die Serie $n = 0$ selbst ihre vorherrschende Rolle verliert und die durch diese Serie bedingte übersichtliche Einordnung in „Gruppen" in eine unübersichtliche Verteilung gleich starker, nahe aneinanderliegender Kanten, die sich bei Atmosphärendruck bis zu 43 000 cm^{-1} verfolgen läßt, übergeht.

Die Deutung liegt nach der Theorie von Bonhoeffer und Farkas auf der Hand: die Grenze bei 38 580 cm^{-1} ist dadurch bedingt, daß die dabei aufgenommene Strahlungsenergie der Dissoziationsenergie des S_2-Moleküls gleich ist. Es liegt also eine Resonanz im Heisenbergschen Sinne vor. Die Augerprozesse sind hier so häufig, daß die Breite der einzelnen Linien die Kantenstruktur der benachbarten Kanten vollständig verwischt. Nur die weit voneinander entfernten starken Kanten der Serie $n = 0$ bleiben erhalten. Weiter von der Resonanzstelle nimmt die Häufigkeit der Augerprozesse ab — die Kantenstruktur kommt wieder zum Vorschein.

Was die Feinstruktur der einzelnen Kanten angeht, so verschwindet sie nach Henri noch früher — bei 2794,2 Å = 35 778 cm^{-1}. Diese Grenze des Verschwindens der Rotationsfeinstruktur ist, wie Henri und Schou* ganz allgemein für viele Dämpfe gezeigt haben, von der Temperatur abhängig. Es ist möglich, daß der bis zur Dissoziation fehlende Energiebetrag durch äußere Stöße ersetzt wird. Denkbar ist es aber auch, daß der einzige Grund der Linienverbreiterung in diesem Falle derselbe ist wie im langwelligen Gebiet, nämlich die große Kernschwingungsamplitude im erregten Zustand.

Die Dissoziationsenergie 38 580 cm^{-1} des S_2-Moleküls stimmt mit dem von mir aus der Konvergenzgrenze der Bandenserien ermittelten Werte von 39 500 $\pm$ 1500 cm^{-1} gut überein**.

Es scheint, daß in allen von Henri untersuchten Spektren beide Ursachen der Verwaschenheit von Banden — äußere Stöße bei höheren Kernschwingungsamplituden und innere Stöße als Folge der Resonanz der Anregungs- und der Dissoziationsenergie — gleichzeitig zur Wirkung kommen.

Diese Arbeit wurde durch ein Stipendium des Elektrophysikausschusses der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft, der ich meinen aufrichtigsten Dank ausspreche, ermöglicht.

Herrn Prof. P. Pringsheim, der diese Arbeit mit Interesse verfolgte, bin ich zu besonderem Dank verpflichtet.

Berlin, September 1928.

---

* V. Henri und S. A. Schou, ZS. f. Phys. **49**, 774, 1928.

** Das von Foote und Mohler (Bur. Stand. Sci. Nr. 400, 1920) nach der Elektronenstoßmethode bei 4,8 V = 38 800 cm^{-1} gefundene kritische Potential entspricht vermutlich nicht der Dissoziation in zwei unangeregte Atome, sondern dem ziemlich scharf ausgeprägten Schwerpunkt des ganzen Bandensystems.

Über den Zusammenhang zwischen Oberflächenspannung und Verdampfungswärme.

Von **H. Sirk** in Laibach.

(Eingegangen am 4. Oktober 1928.)

Es wird eine Beziehung zwischen u, der Gesamtenergie der Oberfläche pro Flächeneinheit, die sich aus der Oberflächenspannung γ bekanntlich nach dem zweiten Hauptsatz zu $u = \gamma - T\frac{d\gamma}{dT}$ berechnen läßt, dem Molekularvolumen beim Siedepunkt V und der molekularen inneren Verdampfungswärme A (in Erg gemessen) abgeleitet unter Verwendung der Loschmidtzahl $L = 6{,}06 \cdot 10^{23}$.

Stefan* hat als erster darauf hingewiesen, daß ein Zusammenhang zwischen Oberflächenspannung und Verdampfungswärme dadurch gefunden werden kann, daß die Arbeit A', um eine Molekel aus dem Innern der Flüssigkeit in die Oberfläche zu bringen, gleich ist der Arbeit, um sie aus der der Oberfläche ins Innere des (genügend verdünnten) Dampfes zu bringen. Es ist daher die Arbeit A, um sie aus dem Innern der Flüssigkeit in das Innere des Dampfes zu bringen, gegeben durch

$$A = 2A'. \tag{1}$$

Diese Beziehung wendet Eucken** auf die Molekeln eines Moles an. Er betrachtet die Oberflächenschicht als unimolekular und schreibt ihr eine Dicke gleich der eines mittleren Molekularabstandes $\sqrt[3]{\frac{V}{L}}$ zu, so daß das Mol in dieser Schicht eine Fläche $V:\sqrt[3]{\frac{V}{L}} = V^{2/3}L^{1/3}$ bedeckt. Die doppelte Gesamtenergie eines solchen Oberflächenstückes ist nach (1) gleich der in mechanischem Maße gemessenen inneren molekularen Verdampfungswärme. Es ist also

$$A = 2uV^{2/3}L^{1/3}. \tag{2}$$

Eucken findet diese Beziehung der Größenordnung nach an vier Stoffen bestätigt und schreibt die Unstimmigkeiten hauptsächlich dem Umstand zu, daß „die Dichte der Oberflächenschicht nicht konstant, sondern veränderlich ist".

Aus (2) folgt

$$\frac{A}{uV^{2/3}} = 2L^{1/3} = 1{,}69 \cdot 10^8. \tag{3}$$

---

* J. Stefan, Wied. Ann. **29**, 655, 1886.

** A. Eucken, Grundriß der physikalischen Chemie, S. 128.

Es ist also der Quotient aus molekularer Verdampfungswärme durch $u V^{2/3}$, die sogenannte molekulare Oberflächenenergie, eine Konstante. Aus den von Eucken gegebenen Zahlen folgt für diesen Quotienten bei Hg = 1,54, C_6H_6 = 2,33, Anilin = 2,61, O_2 = 2,54.

Walden* berechnet den Quotienten (3) beim normalen Siedepunkt aus Experimentaldaten, wobei er als Verdampfungswärme die gesamte Verdampfungswärme verwendet, doch kommt in den von ihm gewählten Beispielen der Unterschied gegenüber der inneren Verdampfungswärme als zu klein nicht in Betracht. Walden findet so an der Hand von 25 nicht assoziierten Stoffen für den unter (3) angegebenen Quotienten 5,40, wenn die Verdampfungswärme in Kalorien gemessen wird. Rechnet man sie in Erg um, so ergibt sich

$$\frac{A}{u V^{2/3}} = 2{,}26 \cdot 10^8.$$

Es erscheint nun möglich, auf Grund neuer Ansichten über die Natur der Oberflächenspannung und der neuen Anschauungen über den Aufbau der Molekel aus elektrischen Massen, einen Wert für den Quotienten (3) abzuleiten.

Bezüglich der Oberflächenspannung zeigen die Arbeiten von Madelung** und Born und Courant***, daß bei Verschiebung einer Molekel aus dem Innern der Flüssigkeit in die Oberflächenschicht ihr Energie zugeführt werden muß, nicht nur zur Überwindung der molekularen Anziehungskräfte, sondern auch zu der bei isothermer Oberflächenvergrößerung notwendigen Veränderung ihrer kinetischen Energie, und daß infolgedessen die Oberflächenspannung zerfällt in einen statischen Anteil χ, der von der Wärmebewegung der Molekeln unabhängig ist, und in einen dynamischen Anteil, der durch Betrachtung des Eigenschwingungsspektrums der gesamten Flüssigkeit auf Grund der Quantentheorie berechnet werden kann. Nach Born und Courant ist

$$\gamma = \chi - \frac{K}{V^{2/3}} T,$$

wo K eine positive Größe ist, die nur wenig von der Temperatur und den Materialkonstanten abhängig ist und durch universelle Konstanten ausgedrückt werden kann. K ist, wenn man $\chi V^{2/3}$ als temperaturunabhängig annimmt, gleich der Konstanten des Eötvösschen Gesetzes

* P. Walden, Ion. Bd. I, S. 403; siehe auch ZS. f. anorg. Chem. **157**, 41, 1926.

** Phys. ZS. **14**, 729, 1913.

*** Ebenda **14**, 731, 1913.

und konnte in hinreichender Übereinstimmung mit den Messungen berechnet werden. Wenn man in

$$-K = \frac{d(\gamma V^{2/3})}{dT} = V^{2/3}\frac{d\gamma}{dT} + \gamma\frac{dV^{2/3}}{dT}$$

das zweite Glied vernachlässigt, was wegen der geringen Wärmeausdehnung gestattet ist, so wird

$$\chi = \gamma - T\frac{d\gamma}{dT}.$$

Es wird also mit Annäherung χ, der statische Anteil der Oberflächenspannung, gleich der Gesamtenergie pro Quadratzentimeter Oberfläche. Es wird daher im folgenden χ mit u identifiziert werden.

Debye* hat χ, den statischen Anteil der Oberflächenspannung, ebenso wie die innere potentielle Energie einer Flüssigkeitsmasse, die deren Verdampfungswärme definiert, aus bestimmten Annahmen über den Aufbau der Molekeln aus elektrischen Massen berechnet. Er nimmt an, daß die Molekeln sogenannte Quadrupole, im ganzen neutrale deformierbare Aggregate von positiven und negativen elektrischen Ladungen sind, die bei Abwesenheit eines fremden elektrischen Feldes kein Moment haben, weil der Schwerpunkt der positiven Ladungen mit denen der negativen zusammenfällt. In einem elektrischen Felde wird die Molekel verzerrt und erhält so ein der Feldstärke proportionales elektrisches Moment. Der Proportionalitätsfaktor α, die Polarisierbarkeit, ist eine für die betreffende Molekel charakteristische Größe, ebenso wie τ, das mittlere elektrische Trägheitsmoment, das die Intensität des Feldstärkequadrats in der Umgebung eines solchen Quadrupols im Mittel über alle möglichen Orientierungen bestimmt. Molekeln, bei denen der Schwerpunkt der positiven nicht mit dem Schwerpunkt der negativen Ladungen zusammenfällt, sogenannte Dipole, werden von Debye in der erwähnten Arbeit nicht betrachtet. Aus Dipolmolekeln bestehende Stoffe geben sich durch ihr dielektrisches Verhalten zu erkennen und zeigen gegenüber dem Gesetz der übereinstimmenden Zustände und der Regel von Eötvös auf Molekularassoziation beruhende Anomalien. Von derartigen anormalen Stoffen wird im folgenden abgesehen und vorausgesetzt, daß die betrachteten Stoffe dem Gesetz der übereinstimmenden Zustände gehorchen. Innerhalb eines Molekülaggregats herrscht infolge der elektrischen Felder der Quadrupole ein mittleres Feldstärkequadrat, das durch den Molekulardurchmesser s definiert wird. Man kann nämlich annehmen, daß die aus

* P. Debye, Phys. ZS. 21, 178, 1920.

Elektronenbahnen und Kern aufgebaute Molekel für gewisse Vorgänge, wie z. B. Molekularzusammenstöße, undurchdringlich ist, so daß man weiter mit den Vorstellungen des Molekulardurchmessers im Sinne der kinetischen Gastheorie arbeiten kann. Dieses elektrische Feldstärkequadrat ist am Rande des Molekularaggregats am kleinsten und steigt mit zunehmender Entfernung vom Rande asymptotisch auf den im Innern herrschenden Wert an, der praktisch schon in einer Tiefe von etwa dem dreifachen Molekulardurchmesser erreicht wird. Da das mittlere Feldstärkequadrat im Verein mit der Polarisierbarkeit α einer einzelnen Molekel die Arbeit definiert, die eine Molekel leistet, wenn sie sich aus dem feldfreien Raume ins Innere eines Molekularaggregats bewegt, so ist es möglich, die Arbeit zu berechnen, welche eine gegebene Anzahl von Molekeln leistet, wenn sie ursprünglich in unendlicher Entfernung voneinander befindlich, sich zu einem Aggregat von bestimmtem Volumen vereinigen. Derselbe Energiebetrag muß auch dem Molekularaggregat zugeführt werden, um seine Molekeln so weit voneinander zu entfernen, daß sie keine Kräfte aufeinander ausüben. Wenn wir uns unter dem Molekularaggregat eine Flüssigkeit vorstellen, so ist dieser Energiebetrag die Wärmemenge, die ihr zur Verdampfung zugeführt werden muß, wenn man annehmen kann, daß die potentielle Energie der Molekeln des Dampfes infolge seiner geringen Dichte vernachlässigt werden kann und von der zugeführten Wärmemenge das Äquivalent der bei der Verdampfung geleisteten äußeren Arbeit abgezogen wird. Wenn wir die erwähnte Eergie für die L-Molekeln eines Moles berechnen, so erhalten wir demnach die innere molekulare Verdampfungswärme (A in Erg gemessen). Nach den angedeuteten Methoden berechnet Debye

$$A = \frac{6\pi}{5} \frac{\alpha r^2}{s^6} \frac{L^2}{V}. \tag{4}$$

Der Umstand, daß das mittlere Feldstärkequadrat innerhalb der Flüssigkeit bei Annäherung an die Oberfläche sich in berechenbarer Weise ändert, ermöglicht es Debye, die Arbeit zu berechnen, um eine Molekel aus dem Innern der Flüssigkeit bis auf einen bestimmten Abstand unterhalb der Oberfläche zu bringen. Daraus läßt sich die Arbeit berechnen, die notwendig ist, um die Molekeln, deren Mittelpunkt in einer unendlich dünnen zur Oberfläche parallelen Schicht vom Inhalt 1 liegen, aus dem Innern der Flüssigkeit an ihren Ort zu bringen, und daraus durch Integration die Arbeit, um die Molekeln einer „Oberflächenschicht" vom Querschnitt 1 aus dem Innern der Flüssigkeit an ihren Ort zu bringen. Das ist χ, der statische Anteil der Oberflächenspannung, der uns mit

Annäherung die Gesamtenergie der Oberfläche pro Quadratzentimeter angibt. Debye findet (l. c.)

$$\chi = \frac{3\pi}{8} \frac{\alpha\tau^2}{s^4} \cdot \frac{L^2}{V^2}, \tag{5}$$

wobei die Flüssigkeitsoberfläche nicht als unimolekulare Schicht betrachtet wurde.

Aus (4) und (5) folgt

$$\frac{A}{\chi V^{2/3}} = 3{,}2 \frac{V^{1/3}}{s} = 3{,}2 \sqrt[3]{\frac{V}{s^3}}, \tag{6}$$

wo von jetzt ab V das Volumen beim normalen Siedepunkt bedeuten soll. Dieser Ausdruck muß für verschiedene Stoffe denselben Wert haben, wenn, wie vorausgesetzt, das Gesetz der übereinstimmenden Zustände gilt und die Siedetemperaturen bei Atmosphärendruck als übereinstimmende Temperaturen betrachtet werden können. Um den numerischen Wert der Konstanten zu bestimmen, führen wir V_0, das auf den absoluten Nullpunkt extrapolierte Molekularvolumen der Flüssigkeit, ein. Nimmt man an, daß die Molekeln beim absoluten Nullpunkt in dichtester, sogenannter tetraedrischer Packung gelagert sind, so ist*

$$V_0 = \frac{L}{\sqrt{2}} s^3.$$

Führt man diesen Wert von (V_0) in (6) ein, so folgt

$$\frac{A}{\chi V^{2/3}} = 3{,}2 \sqrt[3]{\frac{L}{\sqrt{2}} \frac{V}{V_0}}. \tag{7}$$

Nun ist nach Lorenz** im Mittel über eine große Anzahl „idealer physiko-chemischer Stoffe“ $\frac{V}{V_0} = 1{,}41$. Führt man diese Zahl in (7) ein, so folgt

$$\frac{A}{\chi V^{2/3}} = 2{,}71 \cdot 10^8.$$

Die Abweichung vom experimentell ermittelten Wert Waldens $2{,}26 \cdot 10^8$, erklärt sich durch die Näherungsannahmen, die bei der Berechnung gemacht wurden.

Möglicherweise erklärt sich die jetzt noch bestehende Unstimmigkeit durch die oben erwähnte Bemerkung Euckens bezüglich der Dichte der Oberflächenschicht. Diesbezüglich ist zu bemerken, daß in den Betrach-

* H. Sirk, ZS. f. phys. Chem. **114**, 120, 1925.
** R. Lorenz, ZS. f. anorg. Chem. **94**, 246, 1916.

tungen Debyes, die zu den Ausdrücken für A und χ geführt haben, die Dichte der Flüssigkeit bis zur Oberfäche als konstant angenommen wurde. Es wurde also angenommen, daß die Anzahl der Molekeln pro Volumeinheit $n = \frac{L}{V}$, die für die Flüssigkeit als Ganzes gilt, ihren Wert bis in die Schichten nahe der Flüssigkeitsoberfläche, die für den Wert von χ am maßgebendsten sind, beibehält. Lassen wir diese Annahme fallen und tragen der Veränderung des n in der Nähe der Oberfläche in der Weise Rechnung, daß wir in die Formel für χ einen von n verschiedenen Wert der Anzahl der Molekeln pro Volumeneinheit n' einführen. Wir erhalten so aus (4) bzw. (5)

$$A = \frac{6\pi}{5} \frac{\alpha\tau^2}{s^5} n^2 V$$

bzw.

$$\chi = \frac{3\pi}{8} \frac{\alpha\tau^2}{s^4} n'^2$$

und daraus

$$\frac{A}{\chi V^{2/3}} = 3{,}2 \frac{V^{1/3}}{s} \left(\frac{n}{n'}\right)^2 .$$

Die Frage nach der Dichte der Oberflächenschicht wird von Lewis* in einer Untersuchung über „Autosorption“ behandelt. Aus ihr scheint hervorzugehen, daß die „Dichte — die mittlere Dichte — der Flüssigkeit in der Oberflächenschicht größer ist als die Dichte der Flüssigkeit in ihrer Hauptmasse“. Infolgedessen wäre auch $n < n'$. So würde es sich erklären, daß der berechnete Wert des Quotienten größer ist als der gemessene.

Laibach, Physikalisches Institut der Universität.

* W. C. M. C. Lewis, ZS. f. Chem. u. Ind. d. Koll. 7, 197, 1910.

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Bonn.)

Über das Molekülspektrum des Wasserstoffs mit Wellenlängenmessungen von 3667 Linien zwischen λ 4861 (H_β) und 3314 Å.-E.

Von **Wolfgang Finkelnburg** in Bonn.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 27. September 1928.)

Mit einer lichtstarken Apparatur wurde der zwischen $H_\beta = 4861$ Å.-E. und dem ultravioletten Ende des Spektrums liegende Teil des Molekülspektrums des Wasserstoffs mit dem großen Rowlandschen Konkavgitter des Bonner Instituts bei einer Dispersion von 1,98 Å.-E. auf 1 mm photographiert und 3667 Linien in diesem Gebiet mit einem berechneten wahrscheinlichen Fehler von $\pm$ 0,0035 Å.-E. für die intensiveren und etwa doppeltem Fehler für die schwachen Linien gemessen. Über 2000 Linien wurden hierbei zum ersten Male gemessen. Auf Grund des eigenartigen Intensitätsverhaltens der Linien bei wechselnden Anregungsbedingungen gelingt es, 1052 Linien in drei Klassen einzuordnen, wodurch besonders zwei in allen Fällen sich physikalisch entgegengesetzt verhaltende Liniengruppen hervortreten.

1. Einleitung.

Nachdem sich in den letzten Jahren die spektroskopische Forschung den Molekülspektren in immer stärkerem Maße zugewandt und auch auf diesem Gebiet bedeutende Ergebnisse zutage gefördert hat, muß es eigentlich wundernehmen, daß gerade das Bandenspektrum des Prototyps der Elemente, daß das Viellinienspektrum des Wasserstoffs trotz aller Teilerfolge einer volle Klarheit bringenden Ordnung bisher getrotzt hat.

Große Schwierigkeiten waren allerdings schon theoretisch zu erwarten, denn aus dem geringen Trägheitsmoment des als Träger zunächst in Frage kommenden H_2-Moleküls folgert einerseits ein sehr großer Abstand der einzelnen Linien eines Bandenzweiges, andererseits eine sehr schnelle Abnahme der Intensität dieser Linien, d. h. die Theorie forderte weit aufgelöste, sich gegenseitig überdeckende Teilbanden von stets nur wenigen Linien: eben das typische Bild des Viellinienspektrums im Gegensatz zum eigentlichen Bandenspektrum.

Die Vorbedingung zur Einordnung des Spektrums mußte daher eine genaue, besonders aber alle erreichbaren schwachen Linien erfassende Ausmessung des Viellinienspektrums mit möglichst genauen Intensitätsangaben sein.

Die Grundlage der besten, zu Beginn dieser Arbeit vorliegenden Messungen im sichtbaren Teil des Spektrums bildete der Katalog von

1200 Linien von Merton und Barratt (59)*, die einen wahrscheinlichen Fehler von ± 0,02 Å.-E. für ihre Messungen angaben. Bei den ergänzenden Messungen von 570 Linien durch Tanaka (91) und von 450 Linien durch Deodhar (17) wurden Linien von Merton und Barratt als Normalen benutzt, wodurch die Genauigkeit natürlich erheblich nachließ; als mittlerer Fehler ist ± 0,04 Å.-E. angegeben, doch sind Fehler von ± 0,1 Å.-E. keine Seltenheit.

Eine weitere sehr bedeutende Fehlerquelle aller dieser Messungen wie auch der älteren von Porlezza (67, 68), Watson (93) und anderen liegt in der zu geringen verwandten Dispersion — meist 10 Å.-E./mm — begründet. Denn da die Liniendichte des Viellinienspektrums eine ganz außerordentlich große ist — im Durchschnitt über drei Linien auf 1 Å.-E. —, wurden in vielen Fällen sogenannte „blends" gemessen, d. h. mehrere dicht benachbarte Linien als eine einzige breitere beobachtet und gemessen, ließen sich doch nach Angaben verschiedener Beobachter schon zwei Linien von 0,5 Å.-E. Abstand nur schwer trennen.

Aus allen diesen Gründen schien eine Aufnahme des Viellinienspektrums mit größter Dispersion und die dadurch erst mögliche Ausmessung mit hoher Genauigkeit von Wert zu sein.

Als Verfasser dieser Arbeit noch mit der Ausmessung seiner Platten beschäftigt war, erschien eine Arbeit von Gale, Monk und Lee (31) mit einem Katalog von 3064 Linien des Viellinienspektrums zwischen λ 3394 und 8902 Å.-E. Die Aufnahmen waren an einem Rowland'schen Konkavgitter in erster Ordnung bei 2,64 Å.-E./mm Dispersion gemacht worden; als Normalen dienten 95 starke Linien des Wasserstoffspektrums selbst, die interferometrisch mit einem wahrscheinlichen Fehler von 0,0012 bis 0,0035 Å.-E. im Anschluß an Neonnormalen gemessen worden waren. Nur dort, wo Wasserstoffnormalen fehlten, wurden Eisenlinien als Normalen benutzt. Nicht ganz einwandfrei erscheint hierbei einmal die Verwendung zweier verschiedener Liniensysteme als Normalen und zweitens die Benutzung gerade von Wasserstofflinien. Leider haben Gale und seine Mitarbeiter bei ihren spärlichen allgemeinen Angaben auch nichts über Linienbreite, Schärfe usw. angegeben. Da die Linien des Viellinienspektrums aber meist, wohl infolge Dopplereffekts durch Wärmebewegung, eine ziemliche Unschärfe zeigen und sich auf keinen Fall mit den exakt scharfen Normalen etwa des Eisens messen können, wird sich auch eine hohe interferometrische Genauigkeit dieser Wasser-

* Die Zahlen in Klammern weisen auf die betreffende Nummer im Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit hin.

stofflinien wegen der Unmöglichkeit einer absolut scharfen Einstellung mit dem Fadenkreuz nicht ausnutzen lassen, so daß für den direkten Anschluß bei der Ausmessung doch den altbewährten Eisennormalen der Vorzug gegeben werden muß.

Ein Vergleich der von Gale veröffentlichten Tabellen mit den älteren Messungen ergab, daß merkwürdigerweise trotz der großen Zahl der neu gemessenen Linien etwa ein Drittel der von Tanaka und ein sehr großer Teil der von Deodhar gemessenen Linien in dem Katalog von Gale nicht enthalten waren.

Da die Messungen des Verfassers aber, soweit sie schon vorlagen, alle Linien auch von Tanaka und Deodhar sowie bis auf ganz wenige Ausnahmen sämtliche Linien von Gale enthielten, wenn auch teilweise mit ganz anderen Intensitäten, bestand die Hoffnung, daß die weitere Auswertung dieser Platten eine weitreichende Vollständigkeit der Linien des Molekülspektrums des Wasserstoffs, vielleicht auch eine Klärung seiner verworrenen Intensitätsverhältnisse bringen würde.

Der zwischen der Balmerlinie H_β (λ 4861) und dem ultravioletten Ende des Spektrums liegende Bereich wurde deshalb für die Untersuchung und Ausmessung gewählt, weil die weitaus größte Zahl der vorliegenden Einzeluntersuchungen nur den zwischen den Serienlinien H_α und H_β liegenden, die Fulcherlinien enthaltenden roten bis grünen Spektralbereich berücksichtigt, während der blaue, violette und ultraviolette Teil in jeder Beziehung noch mehr Neuland war.

2. Experimentelles.

Die wesentlichste Vorbedingung für eine auch die große Zahl der schwachen und schwächsten Linien erfassende Aufnahme des Spektrums war natürlich eine auf höchste Strombelastung und unbedingte Betriebssicherheit hin durchkonstruierte Apparatur. Die Anwendung stärkster Ströme — bis zu 700 mA bei 2000 Volt Wechselstrom — war notwendig, um trotz der außergewöhnlich großen Linienzahl noch eine genügende Intensität des Spektrums zur Aufnahme am großen Gitter bei mäßigen Belichtungszeiten zu erreichen.

Um ein lichtstarkes Molekülspektrum zu erhalten, d. h. die Intensität des vom Atom emittierten Balmerspektrums gegenüber dem Viellinienspektrum zu schwächen, waren eine Reihe notwendiger Bedingungen zu beachten, nämlich größte Reinheit des verwandten Wasserstoffs, restlose Entfernung aller Spuren von Wasserdampf und endlich end-on-Benutzung einer ziemlich langen, innen versilberten Spektralröhre.

Es wurde eine Anordnung mit dauernd strömendem Wasserstoff gewählt, die im vorliegenden Fall große Vorteile bot, so besonders den der dauernden selbsttätigen Reinigung der Röhre durch das strömende Gas. Ferner konnte bei dieser Anordnung leicht das Druckoptimum eingehalten werden, während das Gale und anderen, die mit abgeschmolzener Röhre arbeiteten, besondere Schwierigkeiten gemacht hat.

Das Kernstück der ganzen Apparatur war die Spektralröhre, die die angegebene Belastung von 1,4 kW auch bei einem Dauerbetrieb von über 10 Stunden aushalten sollte.

Zahlreiche Versuche zur Schaffung einer brauchbaren Röhre blieben zunächst erfolglos, da die von den Röhren ausgehaltene Stromstärke eine zu geringe Intensität ergab, bei höherer Belastung aber die Röhren die auftretenden Temperaturen nicht auszuhalten vermochten.

Auch die von Bay und Steiner (7) angegebene wassergekühlte Hochleistungsröhre sprang bei Belastung mit 500 mA schon nach wenigen Betriebsstunden, und zwar stets an den beiden Rändern des versilberten Mittelstückes. Da die Möglichkeit bestand, daß eine gleiche Röhre ohne Versilberung die Belastung aushielte, wurde ein Versuch über die Notwendigkeit dieser Versilberung angestellt, die die Intensität des Molekülspektrums gegenüber dem Atomspektrum heben sollte. Sie sollte nämlich das Zusammentreten der noch in der Entladungsbahn befindlichen H-Atome zu Molekülen dadurch fördern, daß sie, wie jede Metalloberfläche, freie H-Atome in großer Zahl adsorbiert, die sich dann mit anderen infolge ihrer Wärmebewegung auf sie auftreffenden H-Atomen zu H_2-Molekülen verbinden.

Es wurde nun unter den gleichen Bedingungen im blauvioletten Teil des Spektrums je eine dreistündige Aufnahme mit versilberter und unversilberter Röhre gemacht. Schon äußerlich unterschied sich die Leuchterscheinung der beiden Röhren augenfällig dadurch, daß die versilberte in ihrem Mittelstück ein bläulichweißes Licht zeigte, während die unversilberte Röhre ein tiefes Purpurrot — infolge der Intensität der ersten Balmerlinie H_α — ausstrahlte. Die Aufnahme mit der versilberten Röhre zeigte das Viellinienspektrum gut durchexponiert, außerdem in ziemlicher Intensität die Balmerlinien H_γ, H_δ und H_ε. Vor der Aufnahme mit der unversilberten Röhre wurden zwecks besonders guter Trocknung des Wasserstoffs die Trockengefäße neu mit Phosphorpentoxyd beschickt; trotzdem zeigte die Aufnahme nur schwach die intensivsten Linien des Molekülspektrums, während die oben genannten Atomlinien in riesiger Intensität als breite Balken sichtbar waren.

Somit war die Notwendigkeit der Versilberung der Röhre erwiesen, und die mit dem heißen Mittelstück im Kühlwasser liegende Röhre konnte nicht verwandt werden.

Es wurde deshalb die zweite von Bay und Steiner (7) angegebene — nach den Verfassern mit Luftkühlung zu verwendende — Röhre mit einigen kleinen Änderungen und verbesserter Kühlung erprobt und als durchaus geeignet befunden (siehe Fig. 1).

Eine 40 cm lange, innen versilberte Röhre aus rauhem, die innere, katalytisch wirkende Oberfläche vergrößerndem Quarzgut von 8 mm lichter Weite steckt in einem gleich langen Glasrohr von 20 mm Weite; der Zwischenraum ist fest mit Glaswolle ausgestopft. Dieses Glasrohr nun steckt, durch fünf Glimmerringe mit zwischengestopfter Glaswolle festgehalten und isoliert, in dem äußeren Wandungsglasrohr von 45 mm Weite. Die Glimmerringe wurden an Stelle der von Bay und Steiner verwandten Aluminiumhalter benutzt, um die direkte Wärmeleitung und damit eine ungleichmäßige Beanspruchung der äußeren Glaswand zu verhüten; den gleichen Zweck hat das mittlere Glasrohr. An dem äußeren Rohr sind, wie Fig. 1 zeigt, die beiden 40 mm weiten Rohre für die Elektroden angeblasen, während die Röhre vorn durch ein aufgekittetes Quarzfenster verschlossen ist.

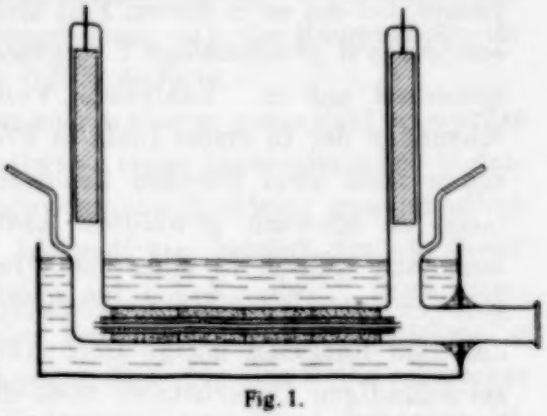


Fig. 1.

Die aus starkem Aluminium bestehenden, 23 cm langen Elektroden sind becherförmig, oben geschlossen, gebaut und mit Platindraht eingeschmolzen. Ihr Abstand von der Glaswand beträgt nur 1 mm, so daß die Entladung nur innen im Becher ansetzen kann und jede Erhitzung der Einschmelzstellen vermieden wird.

Zur besseren Kühlung wurde die ganze Röhre in einen Wasserkasten eingebaut; zur Dichtung der Durchführung des Röhrenendes durch die Vorderwand erwies sich Plastilin als sehr geeignet. Für den Betrieb war es angenehm, daß bei dieser Röhre Kühlung mit fließendem Wasser nicht notwendig war; es mußte lediglich ab und zu das verdampfende Wasser nachgefüllt werden, da die große Kühlwassermenge schon nach dreistündigem Betrieb bis zum Siedepunkt erhitzt war.

Da die Entladung selbst nur durch das innerste Quarzrohr ging, fand nur eine langsame Wärmeabgabe an das Außenrohr statt, obwohl

das Quarzrohr selbst schon nach einem Betrieb von fünf Minuten in heller Rotglut erstrahlte. Die hierbei auch nach mehrtägigem Betrieb noch frei werdenden okkludierten Gase wurden, wie erwähnt, dauernd selbsttätig durch den Wasserstoffstrom entfernt.

Eine besondere Kühlung mußte noch an den beiden Elektrodentürmen angebracht werden, da sich deren Glaswände trotz der großen Oberfläche der Elektroden von je 300 qcm noch zu stark erhitzten. Deshalb wurden die Elektrodenrohre mit dicken Mullbinden bis hinunter in das Kühlwasser umwickelt und durch Anblasen mit einem kräftigen Ventilator für eine genügende Verdunstungskälte gesorgt.

Nächst der Röhre war der wichtigste Punkt die Wahl der Vakuumpumpe, bei der es in diesem Fall nicht auf übermäßig hohes Grenzvakuum, sondern auf gleichmäßige Sauggeschwindigkeit und unbedingte Betriebssicherheit ankam. Zahlreiche Versuche ergaben, daß die meisten Ausführungen der in erster Linie in Frage kommenden rotierenden Ölpumpen schon nach zwei Stunden heißliefen, ebenso wie ihre für Dauerbetrieb meist zu schwach gewählten Antriebsmotoren. Die geeignete Pumpe fand sich endlich in einer von Pfeiffer in Wetzlar hergestellten zweistufigen rotierenden Hochvakuumölpumpe. Diese lieferte einerseits leicht das zum Entgasen nötige Hochvakuum, hielt aber andererseits auch den zehnstündigen Dauerbetrieb ohne die geringste störende Erwärmung aus.

Der benutzte Wasserstoff wurde in einem Kippschen Apparat aus chemisch reinem Zink und verdünnter reiner Schwefelsäure hergestellt.

Die ganze Anordnung war die folgende: Der im Kippschen Apparat erzeugte Wasserstoff wurde zur Trocknung durch eine Waschflasche mit konzentrierter Schwefelsäure und ein U-Rohr mit Phosphorpentoxyd geleitet, darauf durch eine Kapillare mit drei Hähnen zur Regulierung der Strömungsgeschwindigkeit geführt, noch einmal über Phosphorpentoxyd getrocknet und dann in die Röhre geleitet, von deren anderem Ende er durch die Pumpe abgesaugt wurde.

Zum Betrieb der Anlage diente ein Wechselstromtransformator, der einen Wechselstrom von 1800 bis 2000 Volt und 600 bis 700 mA durch die Röhre schickte. Die Stromstärke wurde mittels eines Hitzdrahtinstruments direkt sekundär gemessen. Der Druck in der Röhre wurde durch Drosselung des Wasserstoffzustroms auf maximale Lichtstärke einreguliert, die bei 0,1 bis 0,5 mm Quecksilber lag.

Als Vergleichslichtquelle diente ein Pfund-Eisenbogen, der genau nach der Vorschrift behandelt wurde, und dessen mittlerer Teil von seit-

wärts durch einen Spiegel auf den Spalt projiziert wurde, während die Pole zur Vermeidung von Poleffekten sorgfältig abgeblendet wurden.

Die Aufnahmen wurden in erster Ordnung an dem großen Rowlandkonkavgitter des Bonner Instituts gemacht. Dieses Gitter besitzt bei 6,60 m Krümmungsradius eine in 120000 Striche geteilte Fläche von 6 mal 15 cm und ergibt in erster Ordnung eine Dispersion von 1,98 Å.-E./mm. Es ist in der von Abney angegebenen Weise mit feststehendem Gitter und Kassette und auf einem Kreis mit beweglichem Spalt aufgestellt.

Im violetten und ultravioletten Gebiet wurden zu den Aufnahmen Schleussners Ultrarapidplatten verwandt, im blaugrünen Gebiet Schleussners Viridinplatten. Die zur Erzielung einer gut durchexponierten Aufnahme nötige Belichtungszeit betrug im ersten Falle 5 bis 6, im zweiten 10 Stunden, während deren sich die Raumtemperatur im Gitterzimmer um $+ 0{,}4^0$ bzw. $+ 0{,}8^0$ C änderte.

Die gut durchexponierten Platten zeigen eine so große Zahl schwacher und schwächster Linien, daß diese teilweise einen kontinuierlichen Untergrund vortäuschen, obwohl das kontinuierliche Spektrum ganz deutlich erst bei 4000 Å.-E. beginnt. Die Liniendichte beträgt bis zu dieser Grenze ziemlich gleichmäßig 3,5 Linien auf 1 Å.-E., also 7 Linien/mm; von 3900 Å.-E. an nimmt sie bis zum Ende bei 3280 Å.-E. gleichmäßig ab, wobei es nicht unmöglich ist, daß gegen Ende hin eine Reihe schwacher Linien durch den kontinuierlichen Untergrund unsichtbar geblieben ist.

3. Wellenlängenmessungen und Intensitätsschätzungen.

Zur Ausmessung der Platten diente eine Meßmaschine mit einem Mikroskop von $10^1/_2$facher Vergrößerung und einer Schraube von $^1/_3$ mm Ganghöhe und hundertteiliger Trommel. Die Platte wurde, um möglichst alle Schraubenfehler sowie persönliche Effekte auszuschalten, einmal von links nach rechts und dann zurück von rechts nach links durchgemessen, worauf nach Drehung der Platte um 180^0 beide Messungen wiederholt wurden. Um auch einen leicht auftretenden Einstellfehler auszuschalten, nämlich zu verhüten, daß bei jeder der vier Einstellungen auf denselben oft zufälligen Schwerpunkt der den Linienquerschnitt bildenden Silberkorngruppe eingestellt wird, wurde der die Platte tragende Schlitten nach jeder einzelnen Durchmessung in senkrechter Richtung so verschoben, daß stets auf verschiedene Höhen der Linie eingestellt wurde.

Als Normalen dienten ausgesucht scharfe, nach „Kayser-Konen, Handbuch der Spektroskopie, Bd. VII“, als unveränderlich bekannte Eisenlinien. Es wurden von jeder Gegend zwei Platten ausgemessen,

doch wurden die schwächsten Linien nur auf der jeweils besten Platte gemessen. Durch weites Übergreifen der einzelnen Meßreihen bei der Ausmessung der jeweils zweiten Platte ist eine gute Homogenität der ganzen Messung gewährleistet.

Versuche ergaben, daß die Linien mit der Intensität > 1 sich auf ± 1 Teilstrich genau mit dem Andreaskreuz einstellen ließen, was 0,0066 Å.-E. entspricht. Jede Linie auf der Platte wurde jedoch viermal eingestellt, so daß der durchschnittliche Einstellfehler für die intensiveren Linien bei Messung auf einer Platte zu 0,0033 Å.-E. errechnet wird. Tatsächlich aber war die Genauigkeit eine noch größere. Unabhängige Doppelmessungen von Linien auf einer Platte ergaben nämlich im Mittel von über 100 Linien nur eine Differenz von $\pm 0{,}002$ Å.-E.

Der gesamte, in das Endergebnis eingehende Fehler der Messungen wurde nun exakt aus den Differenzen der Messungen auf beiden Platten berechnet. Die durchschnittliche Differenz beider Messungen für die Linien mit der Intensität $\geqq 1$ war $\pm 0{,}0083$, so daß der durchschnittliche Fehler des durch Mittelbildung erhaltenen Wertes sich zu $\pm 0{,}00415$ Å.-E. ergibt. Da nun der wahrscheinliche Fehler aus dem durchschnittlichen durch Multiplikation mit 0,845 und der mittlere Fehler durch Multiplikation mit 1,25 erhalten wird, ergibt sich für meine intensiveren Linien

der wahrscheinliche Fehler zu $\pm 0{,}0035$ Å.-E.
und der mittlere Fehler zu $\pm 0{,}0052$ Å.-E.

Für die 0- und 00-Linien ist die Genauigkeit schätzungsweise die halbe, so daß für sie jedenfalls der wahrschleinliche Fehler kleiner als $\pm 0{,}01$ Å.-E. ist.

Um auch einen Überblick über die Genauigkeit der zum Vergleich herangezogenen Messungen von Gale, Monk und Lee (31) zu erhalten, wurde für die intensiveren Linien, bei denen „blend"-Wirkung ausgeschlossen erschien, die durchschnittliche Differenz Finkelnburg-Gale gebildet; sie ergab sich zu $\pm 0{,}0087$ Å.-E., wobei positive und negative Reste sich über den ganzen Meßbereich hin gut gegeneinander aufhoben.

Nennen wir nun den durchschnittlichen Fehler von Finkelnburg v_F, den zu berechnenden durchschnittlichen Fehler von Gale v_G und die bekannte Differenz Finkelnburg-Gale d_{FG}, so gilt, falls keine systematischen Fehler irgendwelcher Art in einer der beiden Messungen vorliegen, der Ansatz:

$$d_{FG}^2 = v_F^2 + v_G^2, \quad \text{also} \quad v_G = \sqrt{d_{FG}^2 - v_F^2}.$$

Durch Einsetzen der Werte von $d_{FG} = 0{,}0087$ und $v_F = 0{,}00415$ in die Gleichung erhalten wir den durchschnittlichen Fehler für die inten-

siveren Linien von Gale, Monk und Lee zu $\pm 0{,}0076$ und daraus den wahrscheinlichen Fehler zu $\pm 0{,}0064$ Å.-E. und den mittleren Fehler zu $\pm 0{,}0095$ Å.-E. Es ergibt sich also — stets unter der Annahme, daß keine systematischen Fehler vorliegen —, daß die Genauigkeit der vorliegenden Messungen etwa dreimal so groß ist wie die Genauigkeit der Messungen von Gale, Monk und Lee (die Genauigkeiten verhalten sich nämlich wie $v_P^2 : v_G^2$).

Die Wasserstofflinien zeigten im Gegensatz zu den außerordentlich scharfen Eisenlinien eine bemerkenswerte Unschärfe, die, wie erwähnt, wohl auf einen Dopplereffekt infolge der Wärmebewegung der Moleküle zurückzuführen ist. Eine Durchmusterung der Platten bei Anwendung starker Vergrößerung ergab jedenfalls keine Anzeichen von Feinstruktur, wohl aber zeigten sich unter der großen Zahl der schwachen Linien zahlreiche blends; sie wurden, sofern sie beim Messen bemerkt wurden, als diffuse Linien mit einem „*d*“ bezeichnet. Diese blends spielen im Vielliniенspektrum überhaupt eine große Rolle. So ist bei einem Vergleich der Wellenlängenmessungen des Verfassers mit denen von Gale, Monk und Lee zu beachten, daß es sich bei den Linien, deren Messungen um mehr als 0,02 Å.-E. voneinander abweichen, in den meisten Fällen um blends handeln wird, bei denen durch verschiedenes Intensitätsverhalten bei wechselnden Anregungsbedingungen (s. Abschnitt 4!) ein verschiedener Schwerpunkt der fast zusammenfallenden Linien entstehen kann.

Gemessen wurden vom Verfasser im ganzen 3667 Linien. Von diesen sind 1031 schon von Gale (31) u. a. gemessen worden, 89 allein von Tanaka (91), 134 von Deodhar (17) und 23 von Porlezza (67, 68) und Watson (93), so daß über 2000 Linien neu verzeichnet sind. 230 von Gale gemessene Linien habe ich auf meinen Platten nicht finden können, doch ist ein großer Teil von diesen als ganz schwach oder unscharf und daher wohl auch unsicher angegeben.

Als ein Nebenergebnis ist noch zu erwähnen die Messung einer Anzahl Glieder der Balmerserie, nämlich der dritten bis elften Linie dieser Serie. Die erste Linie H_α befindet sich nicht mehr in dem untersuchten Spektralbereich, während die zweite H_β wegen zu großer Intensität

Linie	λ	ν	J	Linie	λ	ν	J
H_γ	4340,466	23032,55	—	H_9	3797,905	26322,85	3
H_δ	4101,729	24373,11	—	H_{10}	3770,621	26513,33	0
H_ε	3970,073	25188,50	10	H_{11}	3750,134	26658,17	0
H_ζ	3888,990	25706,36	7	H_{12}	3734,541	26769,47	00
H_η	3835,345	26065,91	3 *d*				

und Breite nicht mitgemessen wurde. Die letzten, von Gale nicht gemessenen Glieder liegen so nahe bei dem für sie nur bekannten rohen Wellenlängenwert, daß man sie wohl mit Sicherheit als Balmerlinien ansprechen kann. Die genauen Zahlen sind in vorstehender Tabelle angegeben.

Die Intensität der gemessenen Linien wurde mit möglichster Genauigkeit in der üblichen Skale von 0 bis 10 geschätzt; die schwächsten, noch eben meßbaren Linien wurden mit 00 bezeichnet. Die Intensitätsschätzung ließ sich bei dem Linienreichtum des Spektrums deshalb besonders gut ausführen, weil die Gedächtnisskale an Hand der großen Zahl der Linien im Gesichtsfeld dauernd wieder geprüft wurde, ja oft geradezu das in der Astronomie übliche Verfahren der Stufenschätzung angewandt werden konnte.

4. Klasseneinteilung.

Um in die ungeheuren Linienmengen des Viellinienspektrums wenigstens eine gewisse Ordnung zu bringen, wurde der Versuch gemacht, die Linien nach ihrem physikalischen Verhalten in einzelne Klassen einzuteilen. Dieser Versuch ist schon des öfteren von verschiedenen Forschern auf Grund von Spezialarbeiten gemacht worden, doch ist er außer bei den zwischen H_α und H_β liegenden Fulcherlinien bisher stets gescheitert, und zwar aus folgenden Gründen: Die experimentelle Grundlage bildeten fast stets einfache Intensitätsvergleiche auf Platten, die unter verschiedenen Versuchsbedingungen gewonnen worden waren. Da es nun gerade bei der Empfindlichkeit des Molekülspektrums schwer war, außer der zu variierenden alle anderen Versuchsbedingungen absolut konstant zu halten, waren infolge dieser Unvollkommenheit der Experimente Fehler unvermeidlich, die noch verstärkt wurden durch die Unvollkommenheit der Schätzungsmethode. Aus diesen Gründen waren scheinbar unvereinbare Widersprüche bei der Klassifizierung unausbleiblich. Erhöht wurden diese Schwierigkeiten in früheren Jahren noch durch das verhältnismäßig geringe vorliegende Beobachtungsmaterial.

Nachdem in diesem Punkte die zahlreichen Einzeluntersuchungen der letzten Jahre einen Wandel geschaffen hatten, wurde vom Verfasser der Versuch gemacht, durch statistische Bearbeitung des durch seine eigenen Intensitätsbeobachtungen vermehrten Materials zu einer Klasseneinteilung zu gelangen, wobei über einzelne, sicher größtenteils durch Beobachtungsfehler entstandene Widersprüche bewußt hinweggesehen wurde.

Schon ein kurzer Vergleich der eigenen Intensitätsschätzungen mit den von Gale, Monk und Lee (31) angeführten zeigt in einer großen

Zahl von Fällen starke Unterschiede, ja oft ein ganz entgegengesetztes Verhalten selbst nahe beieinander liegender Linien (vgl. z. B. in der Tabelle λ 4002 ff.), ein Effekt, der sich bei weitem nicht durch die von Gale erwähnte Unsicherheit seiner Intensitätsangaben erklären läßt. Noch verworrener wird das Bild durch Heranziehen der älteren Intensitätsangaben besonders von Merton und Barratt (59). Da stets die relativen Intensitäten benachbarter Linien miteinander verglichen werden, kann der Einfluß etwa verschiedener Plattenempfindlichkeiten sowie einer verschiedenen Intensitätsskale der Beobachter keine Rolle spielen, so daß der Grund für dieses Verhalten zweifellos in der Verschiedenheit der Anregungsbedingungen liegt. Während Gale einen Wechselstrom von 1500 Volt und 50 mA an seine Röhre legte, verwandte Verfasser dieser Arbeit, wie erwähnt, 1700 bis 2000 Volt und 600 bis 700 mA, während endlich Merton und Barratt den Sekundärstrom eines starken Funkeninduktors benutzten. Die Entladungsröhren von Gale und Merton wurden dabei mit Luft bzw. Wasser von Zimmertemperatur gekühlt, während bei der von mir gewählten Röhrenkonstruktion die die Entladungsbahn enthaltende Quarzröhre die Temperatur der hellen Rotglut hatte. Intensitätsunterschiede waren also, falls Linien verschiedenen physikalischen Ursprungs vorhanden waren, durchaus verständlich, die Frage war nur, ob sich Gesetzmäßigkeiten finden ließen.

Es wurden deshalb zwecks einer zunächst rein äußerlichen Ordnung die intensiveren Linien des Spektrums in drei Klassen, I, II und III, mit je zwei Unterklassen a und b nach folgendem Schema eingeteilt:

Klasse	Intensitätsverhalten
Ia	Finkelnburg > Gale, Monk und Lee = Merton und Barratt
Ib	Finkelnburg > Gale, Monk und Lee > Merton und Barratt
IIa	Finkelnburg = Gale, Monk und Lee = Merton und Barratt
IIb	Finkelnburg = Gale, Monk und Lee > Merton und Barratt
IIIa	Gale, Monk und Lee > Finkelnburg = Merton und Barratt
IIIb	Gale, Monk und Lee > Finkelnburg > Merton und Barratt

Zu der Untersuchung, ob diesen Klassen überhaupt eine weitere physikalische Bedeutung zukäme, wurden die Ergebnisse der Einzelarbeiten verschiedenster Forscher über das Verhalten der Linien des Viellinienspektrums bei Änderung der Anregungsbedingungen sowie der sonstigen äußeren Bedingungen herangezogen; insbesondere leistete hierbei der Katalog von Merton und Barratt (59) gute Dienste. Die Ergebnisse der angestellten Untersuchungen sind folgende:

1. Erhöhter Druck. Merton und Barratt (59) fanden, daß eine große Zahl von Linien verstärkt auftraten, wenn in der Röhre ein Wasserstoffdruck von über 50 mm Quecksilber herrschte. Diese Linien gehören mit wenigen Ausnahmen den Klassen I und IIb an.

2. Verminderter Druck. Die von Merton und Barratt (59) bei sehr niedrigem Druck (starke grüne Fluoreszenz der Glaswände) als verstärkt gefundenen Linien gehören bis auf verschwindende Ausnahmen der Klasse III an.

3. Heliumeffekt. Merton und Barratt (59) haben in ihrer Röhre auch ein Helium-Wasserstoffgemisch untersucht, bei welchem der Partialdruck des Heliums bis zu 40 mm Quecksilber, der des Wasserstoffs nur etwa 1 mm betrug. Eine Anzahl Viellinien trat mit wesentlich verstärkter Intensität auf; sie gehören zu 75% der Klasse I, zu 25% der Klasse IIb an.

4. Kathodenstrahlanregung. Gehrcke und Lau (33) photographierten das Spektrum eines in Wasserstoff erzeugten gebremsten Kathodenstrahls. Sie fanden dabei, daß eine Anzahl Linien schon bei sehr kleiner Kathodenstrahlgeschwindigkeit angeregt wurde, Linien, die zum größten Teil der Klasse III, zum kleineren der IIb angehören. Von den nur bei sehr großer Kathodenstrahlgeschwindigkeit auftretenden Linien liegen nur drei in dem hier untersuchten Spektralbereich; sie gehören der Klasse I an.

5. Stark- und Zeemaneffekt. Dufour (25, 26) hat den Zeemaneffekt, Nitta (64), Takamine und Yoshida (89), sowie Takamine und Korubu (90) haben den Starkeffekt am Viellinienspektrum untersucht. Die Linien, bei denen Starkeffekt festgestellt worden ist, gehören zum größten Teil der Klasse III, zum kleineren den Klassen IIb und I an; eine ähnliche Verteilung besteht für die Linien, bei denen Zeemaneffekt gefunden worden ist. Die Linien, bei denen Stark- und Zeemaneffekt zusammen festgestellt worden ist, gehören fast sämtlich der Klasse III an.

6. Verhalten bei Temperaturveränderung. a) Bei — 180° C: Citron (12), McLennan und Smith (52) sowie McLennan, Smith und Collins (53) haben Aufnahmen des Viellinienspektrums gemacht, bei denen unter sonst gleichen Bedingungen die Röhre sich erst in Luft von Zimmertemperatur befand und dann in flüssige Luft eingetaucht wurde. Die Platten wurden ausphotometriert und relative Intensitäten angegeben. Die Linien, deren Intensität bei — 180° C nachließ, gehören den Klassen I und IIb an, während die Linien, deren Intensität unverändert blieb oder wuchs, zum größten Teil der Klasse III angehören.

b) Bei — 252°C: McLennan und Shrum (51) untersuchten das Verhalten des Viellinienspektrums bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs, wobei sie leider fast nur die Linien zwischen H_α und H_β berücksichtigten. Von den in den Bereich dieser Arbeit fallenden Linien gehören die zwei verstärkt auftretenden der Klasse IIIa an, während die als geschwächt verzeichneten 11 Linien mit einer Ausnahme den Klassen I und IIb angehören. 7 Linien, die bei — 252°C so schwach waren, daß sie überhaupt nicht sichtbar wurden, gehören sämtlich der Klasse Ib an.

Zu diesem Verhalten der Linien der Klasse Ib paßt außerordentlich gut die Tatsache, daß gerade diese Linien bei der durch meine Versuchsanordnung bedingten hohen Temperatur sehr verstärkt auftraten, während die bei tiefen Temperaturen intensiven Linien der Klasse III bei mir relativ schwach erschienen.

Die Klasse I enthält also Linien, die sämtlich verstärkt auftreten bei hoher Stromdichte und hoher Temperatur, teilweise jedenfalls auch bei höherem Druck in der Röhre sowie bei Heliumzusatz, deren Intensität aber nachläßt bei niedrigen Temperaturen und geringer Stromdichte.

Die Linien der Klasse III umgekehrt erscheinen verstärkt bei geringer Stromdichte und niedriger Temperatur sowie, teilweise wenigstens, bei niedrigem Druck in der Röhre, geschwächt treten sie auf bei hohen Temperaturen. Schon geringe Kathodenstrahlgeschwindigkeit genügt zur Anregung einer Anzahl Linien dieser Klasse.

Die Klasse II bildet einen deutlichen Übergang zwischen den Klassen I und III, wie das ja schon durch die Definition gegeben ist, doch war es bisher nicht möglich, ihre Linien auf diese beiden Klassen zu verteilen.

Zusammenfassend kann also festgestellt werden, daß wenigstens die Hauptklassen der angegebenen Klasseneinteilung einen klar definierten physikalischen Sinn haben, der bei den Unterklassen zwar angedeutet, aber noch nicht völlig erkennbar ist. Wir haben die beiden sich in allen Stücken entgegengesetzt verhaltenden Klassen I und III und die deutlich den Übergang darstellende Klasse II. Eine Aufgabe der Zukunft ist die Deutung dieser Klassen, die Antwort auf die Frage, ob wir es hier wirklich zu tun haben mit einer Trennung der im Viellinienspektrum übereinander gelagerten Linien des H_2- und vielleicht auch H_3-Moleküls sowie denen des angeregten H_2^+-Ions, oder ob es sich hier lediglich um einen Temperatureffekt von Bandenlinien verschiedener Rotationsquantenzahl m handelt*.

* Die bereits in Angriff genommene bandentheoretische Auswertung des vorliegenden Zahlenmaterials wird wohl auch in dieser Frage Klarheit bringen.

5. Erklärung der Tabellen.

Die erste Spalte in den folgenden Tabellen bringt den Mittelwert der Wellenlängenmessungen des Verfassers in internationalen Angström-Einheiten (Å.-E.) mit der zugehörigen Intensität, die zweite Spalte die entsprechenden Werte aus der Arbeit von Gale, Monk und Lee (31), bei den Wellenlängen in Stellen hinter dem Komma. Bei den Linien, für welche die Übereinstimmung der beiden Messungen eine wenigstens so gute war, daß eine Wirkung von blends ausgeschlossen erschien, ist in der dritten Spalte der Mittelwert beider Messungen angegeben, um so ein System gesicherter, für spätere Einzeluntersuchungen brauchbarer Linien zu erhalten. In der vierten Spalte sind die nach den „Schwingungszahlen" von H. Kayser berechneten, auf das Vakuum reduzierten Wellenzahlen der Linien angegeben, und zwar in der Regel unter Zugrundelegung der Messungen des Verfassers. In den Fällen, in denen in Spalte 3 ein Mittelwert gebildet wurde, wurde dieser zur Berechnung der Wellenzahl benutzt, die dann mit einem + bezeichnet ist. In einzelnen Fällen, in denen der Wellenlängenwert von Gale wegen wesentlich größerer Intensität der Linie besser gesichert erschien als der des Verfassers, wurde dieser auch der Wellenzahl zugrunde gelegt, die in diesen Fällen mit einem § bezeichnet ist. Um eine Übersicht über die schon früher beobachteten Linien zu geben, ist in der fünften Spalte unter „Ältere Beobachtungen" für jede dieser Linien der Name des Beobachters und die Intensität der jeweils jüngsten Messung angegeben. MB bedeutet dabei Merton und Barratt (59), T: Tanaka (91), D: Deodhar (17), P: Porlezza (67, 68) und W: Watson (93); die beiden letzten wurden nur für die Linien herangezogen, für die Messungen der drei späteren Beobachter nicht vorlagen. Die Intensitäten sind in diesen Arbeiten ebenfalls in der üblichen Skale angegeben, doch bezeichnen Tanaka und Deodhar die Linien mit der Intensität < 0 nach abnehmender Intensität zu mit p, q und r. Ein „—" bei MB bedeutet, daß die betreffende Linie bei Merton und Barratt so schwach war, daß sie nur bei Verstärkung durch Heliumeffekt sichtbar wurde. In der folgenden Spalte sind Bemerkungen zu den Linien angeführt, und zwar bedeutet ein „d", daß die Linie diffus erschien, also wahrscheinlich als blend aufzufassen ist; ein „Z" bedeutet, daß Zeemaneffekt von Dufour (25, 26), ein „S", daß Starkeffekt von Takamine und Yoshida (89), Takamine und Korubu (90) oder von Nitta (64) festgestellt worden ist. Die letzte Spalte der Tabellen bringt die Klasse, zu der die Linie gemäß der Klasseneinteilung nach Abschnitt 4 gehört.

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4860	620	00				20567,78				
4860	423	00				20568,61				
4860	134	00	108	2		20569,84	T	1		IIIa
4859	792	00				20571,29				
4859	476	00				20572,62				
4859	296	00				20573,39				
4859	125	00				20574,11				
4858	856	0/1				20575,25				
4858	718	0/1	754	3		20575,67	T	1		IIIa
4858	369	00	390	00		20577,31				
4858	100	0				20578,45				
4857	620	00				20580,48				
4857	514	00				20580,93				
4857	157	00				20582,45				
4856	961	00				20583,28				
4856	547	6	553	9	550	20585,02+	MB	5		IIIa
4855	887	00				20587,83				
4855	704	00				20588,60	D	r		
4855	240	00				20590,57				
4854	871	00	830	1		20592,31				III
4854	560	00				20593,45				
4854	326	00				20594,45	D	q		
4854	077	0				20595,50				
4853	865	0				20596,40				
4853	418	00				20598,30			d	
4852	987	00	985	1a	986	20600,13+	D	r		IIIa
4852	763	0				20601,08				
4852	460	0				20602,36				
4852	289	0				20603,09	T	p		
4852	037	0				20604,16				
4851	722	0				20605,50				
4851	562	0				20606,18			breit	
4851	282	0	339	1		20607,12				
4851	024	0				20608,46	T			
4850	759	00				20609,59				
4850	566	00				20610,42				
4850	177	0				20612,06			d	
4850	050	0				20612,60				
4849	828	1	848	1		20613,55				IIb
4849	512	3	532	0		20614,89				I
4849	295	4	303	9	299	20615,80+	MB	6		IIIa
4848	980	1				20617,15				
4848	756	0				20618,10				
4848	481	0				20619,27				
4848	313	0				20619,99				
4848	089	3	107	1		20620,94				Ib
4847	793	00				20622,20				
4847	625	00				20622,91				
4847	397	0				20623,88				
4847	239	0				20624,55				
4847	007	0				20625,43				
4846	748	00				20626,64	T	0		
4846	592	0				20627,31				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4846	347	0				20628,35				
4846	164	00				20629,03				
4845	981	0	983	1	982	20629,90+				
4845	724	00				20631,00				
4845	579	00				20631,62				
4845	451	1	497	2		20632,16	MB	0		III
4845	304	00				20632,79				
4845	067	00				20633,80				
4844	815	00				20634,87			d	
4844	658	0				20635,54				
4844	535	0/1				20636,07				
4844	420	1				20636,56				
4844	270	00				20637,20				
4844	100	0				20637,92				
4843	896	0				20638,79				
4843	737	3	757	1	747	20639,42+	MB	0		I
4843	473	00	434	0		20640,59				
4843	225	3	237	2	231	20641,62+	MB	2		Ia
4843	025	0				20642,50				
4842	788	0				20643,51			d	
4842	371	4	385	3	378	20645,26+	MB	1		Ib
4842	068	0				20646,58				
4841	902	0				20647,29				
4841	704	1	717	1	710	20648,11+	MB	0		II
4841	487	1	521	0		20649,06				Ib
4841	128	0				20650,59				
4840	880	00				20651,65			d	
4840	635	00				20652,69				
4840	454	00				20653,46				
4840	220	00				20654,46				
4840	037	00				20655,24	T	q	d	
4839	792	00				20656,29				
4839	546	00				20657,34			d	
4839	318	0				20658,31				
4839	113	0				20659,19	T	q		
4838	735	0				20660,80				
4838	266	8	242	6		20662,80	MB	4		Ib
4838	—		081	0a		20663,60				
4837	811	00				20664,75				
4837	532	00				20665,94				
4837	280	00				20667,02				
4837	106	00				20667,76				
4836	901	2	907	1	904	20668,62+	MB	0		I
4836	684	00				20669,57				
4836	491	00				20670,39				
4836	335	00				20671,06				
4836	024	00				20672,39				
4835	704	00				20673,75				
4835	484	00				20674,70				
4835	—		372	0		20675,17				
4835	271	00				20675,60				
4835	118	00				20676,26	T	p		
4834	947	00				20676,99				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4834	789	00				20677,67				
4834	560	0				20678,64				
4834	168	0				20680,31				
4833	940	00				20681,30				
4833	758	0	747	1a	753	20682,09+				III
4833	520	0				20683,05	T	q		
4833	351	3	371	1	361	20683,77+				Ib
4832	789	7	792	5	790	20686,22+	MB	3		Ib
4832	330	0				20688,19				
4832	121	00				20689,08				
4831	954	00				20689,80				
4831	755	0				20690,65				
4831	570	3	563	3	567	20691,45+	MB	1		IIb
4831	345	00				20692,40				
4831	147	00				20693,25				
4830	968	00				20694,02				
4830	750	1	776	0a		20694,95				I
4830	605	1	630	2		20695,58				IIIb
4830	330	00				20696,75				
4830	167	00				20697,45				
4830	001	00				20698,16				
4829	858	00				20698,77				
4829	542	00				20700,13	D	r		
4829	341	0				20700,99			d	
4829	146	00				20701,83				
4828	965	00				20702,60				
4828	817	00				20703,24				
4828	665	0				20703,91				
4828	405	0				20705,00				
4828	071	0				20706,44	D	q		
4827	923	00	893	00		20707,07				
4827	760	0				20707,77				
4827	620	0				20708,37				
4827	460	0	522	00		20709,06				
4827	107	00				20710,57				
4826	967	0	038	0		20711,17				II
4826	297	00				20714,05			d	
4826	175	00				20714,57				
4825	844	0				20715,99	D	r		
4825	645	0				20716,85				
4825	378	0				20717,99				
4825	128	0				20719,07				
4824	915	00				20719,98				
4824	559	4	568	4	563	20721,49+	MB	2		IIb
4824	211	0				20723,01				
4824	066	00	099	0		20723,63				III
4823	908	00				20724,31				
4823	658	00				20725,38				
4823	440	00				20726,32				
4823	300	00				20726,92				
4823	102	00				20727,77				
4822	960	3	943	8	952	20728,41+	MB	3		IIIa
4822	727	0				20729,38				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int	λ		Name	Int.		
4822	557	0				20730,11				
4822	364	00				20730,94				
4822	040	0				20732,34				
4821	789	00				20733,41				
4821	586	00				20734,29	T	r		
4821	306	00				20735,49				
4820	949	00				20737,03				
4820	492	0				20738,99				
4820	309	00				20739,78				
4819	986	0				20741,17				
4819	766	00				20742,12				
4819	583	0				20742,90				
4819	466	0	461	1h	464	20743,42+	MB	1		IIIa
4819	255	00	224	00a		20744,32				
4819	042	00				20745,23				
4818	733	0				20746,56	D	q		
4818	485	00				20747,63			d	
4818	255	00				20748,62				
4818	070	0/1				20749,42				
4817	953	0/1				20749,92				
4817	765	0				20750,68				
4817	508	1	514	3	511	20751,83+	MB	1		IIIa
4817	292	0				20752,77				
4817	203	0				20753,15				
4817	058	0				20753,78				
4816	836	00				20754,73				
4816	650	00				20755,53				
4816	524	0				20756,08				
4816	231	0				20757,36	T	r		
4816	065	00				20758,06				
4815	890	00				20758,83				
4815	715	00				20759,54				
4815	587	0				20760,12				
4815	463	0				20760,65				
4815	073	00				20762,33				
4814	791	0				20763,55	T	r		
4814	485	00				20764,87				
4814	270	0				20765,80				
4814	124	00				20766,43				
4813	970	00				20767,09				
4813	835	00				20767,67				
4813	598	3	601	7	599	20768,69+	MB	2		IIIa
4813	412	00				20769,50				
4813	293	0				20770,01				
4813	028	00				20771,15				
4812	929	0/1				20771,58				
4812	791	2	806	1	798	20772,13+	MB	0		I
4812	258	00				20774,48				
4811	944	00	934	0	939	20775,86+				
4811	825	00				20776,35				
4811	603	3	605	1	604	20777,30+	MB	0		I
4811	146	0/1	200	0		20779,28				
4810	983	0				20779,98				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4810	—		795	00a		20780,79				
4810	683	2				20781,28				I
4810	508	3	446	0a		20782,04	T	p		I
4810	368	0				20782,64				
4810	129	0				20783,67				
4809	955	0				20784,43				
4809	754	00				20785,29			d	
4809	523	0				20786,29	D	r		
4809	348	00				20787,05				
4809	217	0				20787,61				
4809	070	0				20788,25				
4808	948	0				20788,78				
4808	776	2	783	0	779	20789,51+	MB	0		Ia
4808	548	00				20790,51				
4808	368	00				20791,29				
4808	113	0				20792,39				
4807	739	00				20794,01				
4807	526	0	490	0a		20794,93				
4807	305	5	335	2		20795,88	MB	2		Ia
4807	055	00				20796,96				
4806	900	0				20797,63				
4806	620	0				20798,84				
4806	534	0				20799,22				
4806	206	00				20800,64	T	r		
4805	926	0				20801,85				
4805	844	00				20802,20				
4805	545	0				20803,50				
4805	343	0				20804,37				
4804	997	0				20805,87	T	r		
4804	764	0				20806,88				
4804	604	0				20807,57				
4804	418	0				20808,38				
4804	249	0				20809,11				
4803	978	0	065	2		20809,91 §	MB	0		IIIa
4803	748	00				20811,28				
4803	622	0				20811,82				
4803	459	0				20812,53				
4803	115	0				20814,02				
4802	904	00				20814,94				
4802	817	00				20815,31				
4802	649	0				20816,04				
4802	391	0	395	1	393	20817,15+				III
4801	986	2	993	2a	989	20818,90+	MB	1		II
4801	810	0				20819,68				
4801	610	0				20820,55				
4801	228	00				20822,20	D	q		
4801	075	0				20822,87				
4800	905	0				20823,60				
4800	671	0				20824,62				
4800	378	0				20825,89				
4800	195	0				20826,68	T	r		
4800	043	00				20827,34				
4799	829	00				20828,27				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4799	676	00				20828,93				
4799	498	0				20829,71			breit	
4799	318	0/1				20830,06				
4799	140	2	145	0	142	20831,25+	T	0		Ia
4798	913	0				20832,25				
4798	737	00				20833,01			d	
4798	531	0				20833,91				
4798	232	0				20835,21			breit	
4798	078	00				20835,87				
4797	759	6	754	2	757	20837,47+	MB	4		Ia
4797	483	00				20838,47				
4797	343	00				20839,07				
4797	111	4	104	4	108	20840,09+				II
4796	997	2	992	4	995	20840,58+	MB	3		IIIa
4796	672	00				20841,98				
4796	431	00				20843,03			d	
4796	270	0				20843,73				
4796	080	0				20844,56				
4795	965	0				20845,06				
4795	731	0				20846,07				
4795	502	0				20847,07				
4795	318	0				20847,87				
4795	133	1	154	1	143	20848,63+	MB	0		II
4794	924	00				20849,58				
4794	686	0				20850,61				
4794	352	0				20852,07				
4794	—		190	1		20852,77				III
4794	083	0				20853,24				
4793	909	3	913	5	911	20853,98+	MB	3		IIIa
4793	657	0				20855,09				
4793	444	00				20856,02				
4793	348	0				20856,44				
4793	100	00				20857,51			d	
4792	793	00				20858,85				
4792	551	4	537	1	544	20859,95+	MB	0		Ia
4792	348	00				20860,79				
4792	202	00	222	0	212	20861,38+				
4791	884	0				20862,80				
4791	613	0				20863,98				
4791	425	00				20864,80				
4791	218	0				20865,70				
4791	078	0				20866,31				
4790	865	3	864	2	865	20867,25+	MB	1		I
4790	682	00				20868,01			breit	
4790	424	0	415	1	420	20869,18+	D	q		III
4790	242	00				20869,96				
4790	058	0				20870,76			d	
4789	692	0				20872,35				
4789	542	0				20873,00				
4789	410	3	418	5	414	20873,57+	MB	2		IIIa
4789	236	00				20874,34				
4788	992	0				20875,40				
4788	759	0				20876,46				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4788	565	00				20877,16				
4788	311	00				20878,37				
4788	015	00				20879,66				
4787	730	00				20880,90				
4787	496	0				20881,93				
4787	357	0				20882,53	D	q	d	
4787	242	00				20883,03				
4787	039	1				20883,91				
4786	940	00				20884,35				
4786	752	00				20885,17				
4786	629	00				20885,61				
4786	209	5	205	0	207	20887,55+				Ib
4785	971	4	983	2	977	20888,47+	MB	2		Ia
4785	785	0				20889,39				
4785	561	00				20890,37				
4785	297	0/1				20891,50			d	
4785	070	0/1	092	1		20892,51			d	
4784	770	2	783	2	776	20893,79+	MB	1		II
4784	540	00				20894,83				
4784	353	00				20895,72				
4784	133	00				20896,60				
4783	884	00				20897,69				
4783	540	00				20899,19				
4783	406	0	442	0a		20899,78	T	q		
4783	266	00				20900,39				
4783	162	00				20900,85				
4782	981	1				20901,64				I
4782	848	1	869	1	858	20902,17+				IIb
4782	625	00				20903,19	P	0		
4782	439	3	443	1a	441	20904,00+	T	1		Ia
4782	195	00				20905,07				
4782	047	00				20905,72				
4781	923	00				20906,26				
4781	846	00				20906,60				
4781	—		781	0		20906,89				
4781	717	00				20907,16				
4781	554	00				20907,87				
4781	414	0				20908,49				
4780	990	7	981	5	986	20910,36+	MB	4	S	Ia
4780	—		921	5		20910,65				III
4780	770	1				20911,30				I
4780	609	00				20912,01				
4780	470	00				20912,61				
4780	291	00				20913,40				
4780	192	00				20913,83				
4779	938	00				20914,94				
4779	823	00				20915,45				
4779	597	0				20916,44				
4779	396	0				20917,32				
4779	220	0				20918,09	T	p		
4778	978	1				20919,15				I
4778	678	0				20920,46				
4778	304	0				20922,09				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4778	182	00				20922,63				
4777	981	0				20923,51				
4777	867	00				20924,00				
4777	643	0				20924,99				
4777	454	4	454	6	454	20925,82+	MB	3		IIIa
4777	238	00				20926,57				
4777	005	1				20927,79			d	I
4776	732	00				20928,98				
4776	604	00				20929,58				
4776	482	0				20930,08				
4776	351	00				20930,65				
4776	239	00				20931,14				
4776	010	0				20932,19				
4775	859	1	864	0h	861	20932,80+	MB	0		I
4775	676	0/1				20933,61				
4775	477	0				20934,48				
4775	202	0				20935,69				
4774	959	00				20936,75				
4774	849	0				20937,23				
4774	666	1				20938,04				I
4774	337	0	272	1		20939,48				
4774	108	0				20940,48				
4773	946	00				20941,20				
4773	760	00				20942,01				
4773	561	0				20942,88				
4773	376	0				20943,70				
4773	238	00				20944,30				
4772	765	0				20946,38				
4772	533	0				20947,39	T	q		
4772	376	0				20948,28				
4772	185	0				20948,92				
4771	964	00				20949,89				
4771	862	0				20950,34				
4771	444	00				20952,18				
4771	315	00				20952,74				
4771	106	00				20953,66				
4770	907	2	910	2	908	20954,53+	MB	2		IIa
4770	615	1	610	3	613	20955,83+			d	IIIa
4770	280	00				20957,29				
4770	126	0				20957,97				
4769	982	0				20958,60				
4769	733	0				20959,69				
4769	617	1				20960,20				I
4769	518	2	519	1	518	20960,64+	MB	0		I
4769	376	00				20961,26				
4769	219	0				20961,95				
4769	056	0				20962,67				
4768	908	0				20963,32				
4768	724	00				20964,13				
4768	584	0				20964,74				
4768	412	0				20965,50				
4768	234	0				20966,28				
4768	—		181	1		20966,52				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4768	119	0/1				20966,79	MB	1		
4767	936	3	922	0	929	20967,62+				I
4767	679	00				20968,72				
4767	536	0				20969,35				
4767	272	2	247	2		20970,51	MB	0	d	IIb
4767	121	0				20971,18				
4766	957	00				20971,90				
4766	653	0/1				20973,23				
4766	511	00				20973,86				
4766	320	0				20974,70				
4766	051	0				20975,88				
4765	855	0				20976,75				
4765	719	00				20977,35				
4765	570	0	570	0	570	20978,00+				II
4765	399	00				20978,75	T	q		
4765	206	2				20979,60				I
4765	004	0				20980,49				
4764	824	0				20981,28				
4764	677	0				20981,93				
4764	508	0				20982,68				
4764	389	00				20983,20				
4764	221	0				20983,94				
4764	018	0				20984,83				
4763	840	4	844	9	842	20985,61+	MB	4	S	IIIa
4763	648	00				20986,47				
4763	466	0				20987,27				
4763	270	00				20988,13				
4763	097	0				20988,89				
4762	966	00				20989,47				
4762	837	00				20990,04				
4762	422	0				20991,85				
4762	274	0				20992,52	T	q		
4762	017	00				20993,65				
4761	906	00				20994,14				
4761	740	0				20994,87				
4761	582	0				20995,57				
4761	392	00				20996,41				
4761	272	00				20996,94				
4761	115	1				20997,63				I
4760	893	00				20998,61				
4760	740	0				20998,98				
4760	624	00				20999,79				
4760	407	00				21000,81				
4760	130	2	124	1	127	21001,99+	MB	0		I
4759	923	00				21002,89				
4759	807	0	851	0a		21003,40				
4759	704	00				21003,85				
4759	585	00				21004,38				
4759	384	00				21005,27				
4759	152	0				21006,29				
4759	076	00				21006,63				
4758	982	00				21007,04				
4758	868	00				21007,54				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4758	728	00				21008,16				
4758	586	00				21008,79				
4758	443	2	450	2	446	21009,41+	MB	0		IIb
4758	315	00				21009,98				
4758	178	00				21010,59				
4758	016	0				21011,31				
4757	863	0				21011,98				
4757	642	0				21013,04				
4757	412	2	435	1		21013,97				Ib
4757	173	00				21015,03				
4757	015	00				21015,73				
4756	—		948	5		21016,02				III
4756	863	3				21016,43	MB	1	breit	Ia
4756	611	00				21017,51				
4756	428	00				21018,32				
4756	232	0				21019,19				
4756	107	1	097	0	102	21019,76+	T	q		I
4755	873	00				21020,77				
4755	733	00				21021,39				
4755	583	0				21022,05				
4755	376	0	405	2		21022,84 §	MB	0		IIIa
4755	138	00				21024,02				
4754	974	00				21024,75				
4754	751	00				21025,73				
4754	547	0				21026,64			breit	
4754	118	00				21028,53	D	r		
4753	792	00				21029,98				
4753	611	00				21030,78				
4753	356	00				21031,91				
4753	188	00				21032,65				
4752	769	0	845	0a		21034,50				
4752	636	00				21035,09	T	q		
4752	511	0/1	553	0		21035,65				
4752	324	00				21036,47				
4752	039	00				21037,73			d	
4751	822	00				21038,69				
4751	581	6	575	2	578	21039,78+	MB	1	S	Ia
4751	370	00				21040,70				
4751	201	00				21041,44				
4751	071	00				21042,02				
4750	952	0				21042,55				
4750	802	0				21043,21				
4750	—		729	1		21043,53				
4750	659	0/1				21043,85	T	p		
4750	534	00				21044,40				
4750	400	00				21044,99				
4750	146	00				21046,12				
4749	952	00				21046,98				
4749	481	00				21049,07				
4749	314	00				21049,80				
4749	197	00				21050,32				
4748	967	00				21051,34				
4748	792	00				21052,12				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4748	624	0				21052,86	T	q		
4748	418	0				21053,78				
4748	222	0				21054,64				
4748	010	0/1				21055,59				
4747	767	0				21056,66	T	q		
4747	660	00				21057,14				
4747	416	0				21058,22				
4747	209	00				21059,14				
4746	996	0				21060,08	P	0		
4746	767	00				21061,10	D	r		
4746	—		610	0a		21061,79				
4746	528	0				21062,16				
4746	308	00				21062,82				
4746	042	0	968	1		21064,31	T	p		
4745	323	1	314	2	319	21067,53+	MB	0	d	III
4745	032	0				21068,80				
4744	900	00				21069,39				
4744	322	1	312	0a	317	21071,97+	T	q	d	I
4743	818	00				21074,19				
4743	—		586	1		21075,22				III
4743	391	3	383	5	387	21076,11+	MB	3		IIIa
4742	780	4	780	6	780	21078,81+	MB	3		IIIa
4742	614	0/1				21079,54				
4742	350	0/1				21080,72				
4742	094	1	109	3	102	21081,82+	MB	0		III
4741	—		812	0		21083,10				
4741	441	00				21084,76				
4740	992	2	985	5	988	21086,73+	MB	3	S, d	IIIa
4740	585	00				21088,57				
4740	341	00				21089,65				
4739	595	00				21092,97				
4739	139	00				21095,00				
4738	762	0	707	1		21096,78	T	p		IIIa
4738	527	0				21097,72			d	
4737	423	0	445	0		21102,64	T	r	d	II
4737	166	00				21103,79				
4736	605	00				21106,28				
4736	478	00				21106,85	D	r		
4735	674	00	658	00a	666	21110,74+				II
4735	278	2	258	0h	268	21112,25+				I
4735	032	00				21113,30				
4734	760	1				21114,51	P	1		Ia
4734	—		675	0h		21114,89				
4734	464	0				21115,83				
4734	125	0				21117,34				
4733	993	0				21117,93	D	r		
4733	598	00				21119,69				
4733	226	00				21121,35				
4733	102	0				21121,90				
4733	—		025	1		21122,25				
4732	727	1	725	2	726	21123,58+	MB	1		IIIa
4732	521	00				21124,50				
4732	364	00				21125,20				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4732	065	00				21126,53				
4731	943	2	922	0a		21127,08	T	p		Ia
4731	763	00				21127,88	T	p		
4731	—		643	1		21128,42				
4731	345	00				21129,75				
4731	164	0				21130,55				
4730	759	4	754	2	757	21132,37+	MB	1		I
4730	551	0				21133,29				
4730	291	0				21134,46				
4729	996	00				21135,77				
4729	726	0				21136,98			d	
4729	413	00				21138,38				
4729	224	00				21139,22				
4728	900	3	887	1	893	21140,70+	MB	1		Ia
4728	480	1	500	1	490	21142,50+				IIa
4728	058	00				21144,44				
4727	814	0				21145,53				
4727	—		741	1		21146,86	MB	0		III
4727	464	00				21147,11				
4727	213	0				21148,22				
4726	945	00				21149,41				
4726	657	00				21150,70				
4726	149	1	144	1	147	21152,99+	MB	0		II
4725	354	0				21156,54				
4725	198	0				21157,22				
4724	828	4	820	4	824	21158,91+	MB	1		IIb
4724	376	0				21160,91				
4723	850	4	838	1	844	21163,30+	MB	0		Ia
4723	664	00				21164,10				
4723	472	0				21164,96				
4723	041	10	032	10	037	21166,91+	MB	5	Z	IIb
4722	637	0				21168,71				
4722	206	1				21170,64			d	I
4721	698	0/1				21172,92				
4721	539	3	542	3	540	21173,63+	MB	1		IIb
4721	003	3	000	1a	002	21176,06+				Ib
4720	761	00				21177,12				
4720	465	0	498	1a		21178,45	T	q	d	III
4720	163	00				21179,80			d	
4719	958	00				21180,72				
4719	720	00				21181,79				
4719	389	0				21183,27				
4719	—		300	1a		21183,67				
4719	039	7	043	10	041	21184,84+	MB	6	Z	IIIa
4718	836	4	810	1		21185,76				Ib
4718	500	00				21187,27				
4718	251	0				21188,38				
4718	108	00				21189,03				
4717	960	00				21189,69				
4717	766	00				21190,56				
4717	568	0				21191,45			d	
4717	146	00				21193,35				
4716	970	0				21194,14	D	r		

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4716	753	00				21195,11				
4716	595	00				21195,82				
4716	343	00				21196,96				
4716	107	2	122	0	114	21197,99+	D	p	d	I
4715	916	0	925	1	920	21198,86+				III
4715	780	00				21199,49				
4715	330	0	344	1	337	21201,48+	D	q	d	III
4715	083	00				21202,62				
4714	568	00				21204,94				
4714	357	0	308	1a		21205,89				
4714	218	00				21206,51				
4713	922	3	930	6	926	21207,83+	MB	3		IIIa
4713	785	0				21209,46				
4713	612	0				21210,24				
4713	438	0				21211,02				
4713	150	0				21211,32				
4712	937	00				21212,28	D	r		
4712	—		805	0b		21212,87				
4712	333	0				21214,99				
4712	111	00				21215,99				
4711	651	0/1	672	0	661	21218,02+			d	II
4711	064	6	067	3	066	21220,70+	D	0		Ib
4710	859	00				21221,63				
4709	535	4	536	10	536	21227,59+	MB	4	Z	IIIa
4709	120	3	122	1	121	21229,46+				I
4708	945	00				21230,26				
4708	781	00				21231,00	D	1		
4708	502	2	489	2	496	21232,28+	W	0		II
4708	323	00				21233,06				
4708	135	0				21233,91				
4707	985	0				21234,59				
4707	882	00				21235,05				
4707	702	00				21235,88				
4707	264	0				21237,84	D	r		
4707	017	0				21238,95				
4706	740	0				21240,20				
4706	601	00				21240,83				
4706	478	00				21241,19				
4706	363	00				21241,90				
4706	209	00				21242,60				
4705	910	00				21243,95			d	
4705	718	00				21244,82				
4705	491	00				21245,84				
4705	262	2	260	3	261	21246,88+	MB	0	d	IIIb
4704	906	00				21248,48				
4704	670	00				21249,55				
4704	423	00				21250,66				
4704	199	00				21251,67				
4703	997	00				21252,59				
4703	864	0				21253,19	D	q		
4703	562	00				21254,56				
4703	383	00				21255,36			d	
4703	146	00				21256,43				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in A.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4703	015	0				21257,03			d	
4702	804	0				21257,98				
4702	581	2	562	5	571	21259,03+	MB	1		IIIa
4702	353	2	335	1	344	21260,06+				Ib
4702	137	0				21261,00				
4701	895	1	891	0a	893	21262,10+				
4701	723	3	723	2	723	21262,87+	MB	0		Ib
4701	508	00				21263,84				
4701	228	1	221	0	225	21264,67+				I
4700	923	0				21266,49				
4700	739	00				21267,32				
4700	587	00				21268,01				
4700	365	00				21269,03				
4700	207	0	216	0	211	21269,71+	T	p		II
4699	787	0/1	832	1		21271,63	P	0	d	
4699	588	00				21272,53				
4699	254	0				21274,04				
4698	952	00				21275,41				
4698	792	0				21276,13				
4698	321	0				21278,26			d	
4698	155	0				21279,01	T	q		
4698	002	00				21279,71				
4697	860	00				21280,35				
4697	610	0				21281,48				
4697	435	2	423	1	429	21282,30+	T	q		I
4697	180	00				21282,98			d	
4697	006	00				21284,22			d	
4696	523	00				21286,41				
4696	250	00				21287,65				
4696	016	00				21288,71				
4695	690	1				21290,19				
4695	474	00				21291,17				
4695	237	00				21292,24	T	r	d	
4694	843	0				21294,03				
4694	606	00				21295,10				
4694	247	00				21296,73				
4694	096	00				21297,42				
4693	834	1	808	1		21298,60	P	o		II
4693	416	1	425	0	420	21300,48+	T	p		I
4693	179	00				21301,58				
4692	498	00				21304,67				
4692	040	3	040	5	040	21306,75+	MB	2	Z	III
4691	866	0				21307,54				
4691	451	00				21309,42				
4691	122	00	154	1		21310,77 §	T	q		III
4690	743	00				21312,64				
4690	570	00				21313,43				
4690	180	5	184	7	182	21315,19+	MB	3		IIIb
4689	415	00				21318,67				
4688	439	2	438	2	439	21323,11+	MB	0		Ib
4688	238	00				21324,03				
4688	065	00				21324,82				
4687	884	00				21325,64				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4687	632	1	625	0	629	21326,80+				I
4687	157	0				21328,95				
4686	774	4	772	6	773	21330,70+	MB	2		IIIb
4686	145	4	142	3	144	21333,56+	MB	1		Ib
4685	946	00				21334,46				
4685	797	00				21335,14				
4685	525	0				21336,37			d	
4685	123	0				21338,21				
4684	650	3	654	4	652	21340,35+	MB	1		IIIb
4684	456	0				21341,25				
4684	268	0				21342,10				
4683	830	7	824	8	827	21344,11+	MB	5		III
4683	653	1	640	1	647	21344,93+				II
4683	314	0				21346,45				
4682	497	0/1				21349,17				
4682	341	5	341	6	341	21350,88+	MB	3		III
4682	099	00				21351,98				
4681	852	0	819	00		21353,11				
4681	722	0				21353,71				
4681	—		643	00		21354,07				
4681	354	3	354	2	354	21355,39+	MB	0		Ib
4681	143	00				21356,35				
4680	779	0	740	1h		21358,01				III
4680	555	00				21359,03			d	
4680	—		432	5		21359,59	MB	2		IIIa
4680	107	0/1				21361,07				
4679	824	0				21362,37				
4679	572	00				21363,51				
4679	412	00				21364,25				
4679	093	4	092	5	093	21365,70+	MB	3		II
4678	712	00				21367,44				
4678	518	00				21368,33				
4678	399	00				21368,87				
4678	127	0	146	0a	136	21369,07+	T	p	d	II
4677	734	0				21371,91				
4677	538	0				21372,80				
4677	312	00				21373,84				
4677	202	00				21374,34				
4676	902	2	917	1	909	21375,68+	T	p		I
4676	704	1				21376,62				
4676	505	0				21377,53				
4676	348	00				21378,24				
4676	090	0				21379,42				
4675	919	0				21380,21				
4675	698	00				21381,22				
4675	502	00				21382,13				
4675	309	2	312	4	311	21382,99+	MB	2		IIIa
4675	133	00				21383,80				
4674	960	1	958	3	959	21384,59+				III
4674	706	0				21385,75				
4674	—		530	4		21386,50	MB	2		IIIa
4674	472	2	440	0		21386,82			breit	I
4674	191	00				21388,11				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4673	972	00				21389,11				
4673	812	0				21389,84			d	
4673	650	00				21390,58				
4673	—		233	1		21392,50				III
4673	095	2	097	3	096	21393,12+	MB	2	Z, d	IIIa
4672	823	0				21394,37				
4672	680	00				21395,02				
4672	558	0				21395,58				
4672	298	0				21396,77				
4672	090	1	080	1	085	21397,75+				IIb
4671	878	00	840	0		21398,70	T	0		IIa
4671	710	0	710	1	710	21399,47+				III
4671	301	8	305	7	303	21401,33+	MB	3		Ib
4671	068	0				21402,41				
4670	847	1	808	0		21403,42				
4670	700	2				21404,10			d	I
4670	—		652	4		21404,31	MB	0		III
4670	465	00				21405,17				
4670	140	00				21406,66				
4669	976	2	015	2		21407,41	MB	0		IIb
4669	834	0				21408,06				
4669	616	0				21409,06				
4669	275	3	278	3	276	21410,62+	MB	1		IIb
4669	071	0				21411,56				
4668	923	0				21412,24				
4668	780	0				21412,90				
4668	528	2				21414,05				I
4668	258	00				21415,29				
4668	015	00				21416,41				
4667	796	2	791	4	793	21417,42+	MB	1		III
4667	554	00				21418,52				
4667	381	00				21419,31				
4667	261	00				21419,86				
4667	080	2	083	3	081	21420,69+	MB	1	Z	III
4666	882	00				21421,60				
4666	612	00				21422,84				
4666	502	00				21423,35				
4666	360	00				21424,00				
4666	204	2	200	0	202	21424,73+				I
4665	—		770	00		21426,71				
4665	595	3	585	6	590	21427,54+	MB	3		IIIa
4665	421	0				21428,31				
4665	240	00				21429,14				
4665	115	00				21429,72				
4664	887	0				21430,77				
4664	617	1	634	1	625	21431,97+	T	q	d	II
4664	418	00				21432,92				
4664	100	0				21434,38				
4663	907	0				21435,27				
4663	720	0				21436,13				
4663	397	00				21437,61				
4663	192	00				21438,56				
4662	812	8	811	8	812	21440,30+	MB	5		IIb

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4662	588	0				21441,33				
4662	387	00				21442,26				
4662	161	00				21443,30				
4661	997	0	978	00b	988	21444,05+				
4661	779	00				21445,05				
4661	391	5	402	8	396	21446,82+	MB	4		IIIa
4661	129	0				21448,05				
4660	911	0				21449,05				
4660	723	2	731	0	727	21449,89+				I
4660	390	3	395	5	393	21451,43+	MB	3		IIIa
4660	100	4	099	1	100	21452,78+				Ib
4659	765	0				21454,32				
4659	625	00				21454,97				
4659	419	0				21455,91				
4659	274	2	284	0	279	21456,56+	T	q		I
4659	117	0				21457,31				
4659	004	0				21457,81				
4658	790	1	784	1	787	21458,83+	T	p		II
4658	594	0				21459,72				
4658	412	0				21460,55				
4658	252	0				21461,29				
4658	053	0/1				21462,21				
4657	861	2	861	2	861	21463,07+	MB	1		II
4657	670	00				21463,97				
4657	422	0				21465,12				
4657	200	00				21466,14				
4656	546	00				21469,15			d	
4656	283	00				21470,37				
4655	980	0				21471,76				
4655	764	0				21472,76	D	r		
4655	382	00				21474,52				
4655	144	00				21475,62				
4655	031	00				21476,14				
4654	532	1	530	1	531	21478,45+				IIb
4654	064	5	056	3	060	21480,62+	MB	1		Ib
4653	879	0				21481,46				
4653	598	00				21482,75				
4653	402	00				21483,66				
4653	188	3	196	2	192	21484,63+				Ib
4652	997	6	999	6	998	21485,52+	MB	5	Z	IIa
4652	576	0				21487,47				
4652	344	0				21488,55				
4652	049	00				21489,91				
4651	868	0	920	0a		21490,74				
4651	750	00				21491,29				
4651	519	0	505	1	512	21492,39+	T	q		III
4651	107	00				21494,26				
4650	929	0	950	0	940	21495,03+	T	var.		II
4650	755	00				21495,89				
4650	377	3	381	1	379	21497,63+	MB	0		I
4650	183	0				21498,53				
4650	000	0				21499,38				
4649	512	2	502	1	507	21501,66+	MB	0		I

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4649	315	1	273	0		21502,54			d	I
4649	030	0				21503,86				
4648	592	3	585	1h	589	21505,90+	MB	0		I
4648	332	00				21507,09				
4648	177	00	199	0a		21507,81				
4648	050	00				21508,40				
4647	828	00				21509,43				
4647	543	00				21510,74	D	r		
4647	370	0				21511,54				
4647	134	00				21512,64				
4646	923	00				21513,61				
4646	588	1	579	1	584	21515,18+	T	0	d	II
4646	307	00				21516,46				
4646	065	0				21517,59				
4645	723	00				21519,17				
4645	352	6	344	3	348	21520,91+	MB	2		Ia
4644	897	0	905	0a	901	21522,98+				II
4644	649	00				21524,15				
4644	515	00				21524,77				
4644	290	0				21525,81				
4644	039	00				21526,97				
4643	844	0	850	1	847	21527,86+	T	p		III
4643	469	1	486	0	477	21529,58+	MB	—	d	I
4643	247	1	248	0	247	21530,65+			d	I
4643	031	00				21531,65				
4642	857	00				21532,46				
4642	675	2	668	1	672	21533,31+	MB	—		Ib
4642	486	0				21534,36				
4642	175	00				21535,62	D	r		
4641	845	00				21537,15				
4641	535	0				21538,58	D	r		
4641	295	0				21539,70				
4641	076	1	084	0	080	21540,70+	D	r		I
4640	753	0				21542,22			d	
4640	480	2	478	1	479	21543,49+	MB	—		Ib
4640	216	0	192	0		21544,71				II
4639	891	2	898	1	894	21546,20+	T	p		I
4639	654	0				21547,32				
4639	478	0				21548,14	D	r		
4639	218	0				21549,34				
4639	056	0				21550,10				
4638	772	0				21551,42				
4638	656	0				21551,96				
4638	491	0	465	1h		21552,72				III
4638	—		012	0c		21554,94				
4637	881	00				21555,56				
4637	673	1				21556,52	D	r		I
4637	454	0	400	0ah		21557,54				
4637	288	00				21558,31				
4637	—		118	0		21559,10				
4636	889	0/1	927	1		21560,17				
4636	639	0				21561,33				
4636	419	1				21562,38	D	r		I

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4636	042	0				21564,11				
4635	625	00				21566,04				
4635	051	00				21568,71				
4634	—		708	2		21570,31				III
4634	594	8	595	5	594	21570,84+	MB	3	Z	Ib
4634	030	10	032	10	031	21573,46+	MB	9	Z	IIa
4633	—		693	0		21575,04				
4633	575	0	606	0		21575,59				
4633	359	0				21576,59				
4633	020	00				21578,17				
4632	730	00				21579,52	D	q		
4632	547	00				21580,35				
4632	288	00				21581,58				
4631	847	10	849	9	848	21583,63+	MB	10	Z	IIa
4631	466	4	460	8	463	21585,42+	MB	3	Z	IIIa
4631	069	2	074	1	071	21587,24+				I
4630	744	00				21588,77				
4630	631	00				21589,30				
4630	348	0				21590,62				
4630	125	2	127	1	126	21591,66+				I
4629	878	0				21592,81				
4629	703	1	673	2		21593,63	T	p		III
4629	328	0				21595,39				
4629	091	0				21596,48				
4628	732	1	708	1		21598,16	D	r		II
4628	365	0	365	0	365	21599,87+				II
4627	984	8	986	10	985	21601,50+	MB	5	Z	IIIb
4627	622	00				21603,34				
4627	408	00				21604,34				
4627	194	1				21605,34				I
4627	063	2	051	1	057	21605,98+	MB	0		I
4626	790	1	764	0h		21607,22				I
4626	598	0				21608,12				
4626	332	00				21609,36				
4626	136	00				21610,28				
4625	768	0/1				21612,00				
4625	649	0				21612,55				
4625	—		584	3		21612,85				III
4625	531	1				21613,11				I
4625	—		457	0		21613,45				
4625	315	7	311	5	313	21614,12+	MB	4	Z	Ia
4624	978	00				21615,69				
4624	810	0				21616,47				
4624	—		731	0		21616,85	D	r		
4624	654	00				21617,20				
4624	560	00				21617,64				
4624	400	00				21618,39				
4624	092	0/1	097	1	094	21619,82+	T	q		
4623	937	00				21620,57				
4623	829	00				21621,06				
4623	735	00				21621,50				
4623	591	00				21622,17				
4623	435	00				21622,99				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in A.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4623	239	2				21623,82	T	r		I
4622	908	0				21625,44	P	0		
4622	735	1				21626,18				I
4622	349	00	303	0a		21627,98	T	r		
4622	209	00				21628,64			d	
4622	020	00				21629,52				
4621	847	00	806	0		21630,33				
4621	671	0				21631,16				
4621	470	00				21632.10				
4621	134	1				21633,67				I
4620	948	0				21634,54				
4620	747	2	756	5	751	21635,46+	MB	1		IIIa
4620	556	2	563	1a	559	21636,36+				Ib
4620	325	0				21637,46				
4620	073	0				21638,64				
4619	824	00				21639,80				
4619	602	0	572	0a		21640,85	D	q		II
4619	332	00				21642,11				
4619	043	0				21643,46				
4618	918	0				21644,05				
4618	659	0	600	2		21645,54 §				III
4618	304	8	304	5	304	21646,93+	MB	3	Z	Ib
4618	—		126	1		21647,76				III
4617	877	0	872	0	875	21648,91+				
4617	658	0				21649,95				
4617	524	3	528	10	526	21650,57+	MB	3		IIIa
4617	319	00				21651,55				
4617	232	0				21651,95				
4617	075	0				21652,69				
4616	900	0				21653,51				
4616	716	0				21654,37				
4616	496	2	488	00	492	21655,35+	MB	—		Ia
4616	289	00				21656,38				
4615	988	0				21657,74				
4615	794	0				21658,70			d	
4615	525	0				21659,96				
4615	313	0				21660,96				
4615	142	0				21661,76				
4614	945	0				21662,69				
4614	779	0				21663,47				
4614	580	2	588	3	584	21664,38+	MB	0		IIIb
4614	112	0				21666,59				
4613	960	00				21667,31				
4613	659	1	637	0		21668,72	D	q	d	I
4613	422	0				21669,83				
4613	122	2	116	4	119	21671,26+	MB	0		IIIb
4612	810	00				21672,71				
4612	646	0				21673,48				
4612	417	0				21674,56				
4612	077	0				21676,15	D	q	d	
4611	769	00				21677,60				
4611	643	00				21678,19	D	r		
4611	330	00				21679,66				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4611	095	00				21680,77				
4610	775	0				21682,27	D	q		
4610	562	00				21683,28				
4610	296	00				21684,49				
4610	133	0				21685,29			d	
4609	804	00				21686,88	D	r		
4609	585	00				21687,87				
4609	427	0				21688,61	P	0		
4609	—		257	0ah		21689,41				
4609	142	2	120	00		21689,96	T	p	breit	I
4608	829	0				21691,43				
4608	548	1	564	0a	556	21692,71+	T	r		I
4608	333	0				21693,76				
4608	042	00				21695,13				
4607	417	7	403	4	410	21698,11+	MB	3	Z	Ia
4607	—		091	1		21699,61				III
4606	993	0				21700,07				
4606	566	0				21702,09				
4606	454	00				21702,61	D	r		
4606	148	00				21704,05				
4605	917	00				21705,14				
4605	767	00				21705,85				
4605	377	3	364	2	371	21707,72+	MB	0		Ib
4604	930	0	928	0	929	21709,80+				II
4604	767	0				21710,56				
4604	620	1				21711,26				I
4604	469	00				21711,97				
4604	258	0				21712,96				
4604	062	0				21713,89				
4603	861	0				21714,84				
4603	604	0				21716,05				
4603	350	00				21717,25				
4603	027	00				21718,77				
4602	860	2				21719,56	T	r		I
4602	797	00				21719,85				
4602	553	00				21721,01				
4602	429	0				21721,59				
4602	118	00				21723,06				
4601	914	0				21724,02				
4601	581	00				21725,58	T	r		
4601	365	1				21726,61				I
4601	082	00				21727,95				
4600	853	0/1	856	1	854	21729,03+	T	r		
4600	617	00				21730,15				
4600	486	00				21730,77				
4600	165	2	168	0	166	21732,28+	T	r		I
4599	983	00				21733,14				
4599	361	0				21736,08				
4599	120	00				21737,22				
4598	834	0				21738,57				
4598	495	5	493	3	494	21740,18+	MB	2	Z	Ia
4598	114	0				21741,98				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int		
4597	905	00				21 742,96				
4597	646	00				21 744,19				
4597	514	00				21 744,81				
4597	216	2	206	4	211	21 746,25+	MB	1		III
4596	854	3				21 747,94				I
4596	—		694	0a		21 748,69				
4596	636	0				21 748,97				
4596	—		586	0		21 749,20				
4596	312	0				21 750,50				
4596	099	0	088	0h	094	21 751,53+	D	r		Ia
4595	874	00				21 752,57				
4595	561	1				21 754,05				I
4595	356	0				21 755,03				
4595	136	1	166	1		21 756,07	T	0		II
4594	936	00				21 757,01				
4594	752	0	740	0h	746	21 757,91+	T	p		II
4594	533	00				21 758,92				
4594	437	00				21 759,38				
4594	208	0				21 760,46				
4593	930	0				21 761,78				
4593	581	2	579	0	580	21 763,44+	MB	—		I
4593	396	00				21 764,31				
4593	082	0				21 765,80				
4592	752	00				21 767,36	D	r		
4592	516	00				21 768,48				
4592	409	00				21 768,99				
4592	193	0				21 770,01				
4591	—		925	0		21 771,28				
4591	835	3	806	2		21 771,71	MB	1		I
4591	663	00				21 772,52				
4591	460	0				21 773,49				
4591	271	00				21 774,38				
4591	029	0				21 775,53	D	r		
4590	624	00				21 777,45				
4590	370	0				21 778,66				
4590	205	1				21 779,44				I
4589	983	0/1				21 780,49	T	p		
4589	916	1				21 780,80				III
4589	662	0				21 782,02				
4589	509	0				21 782,74				
4589	280	0				21 783,83				
4589	033	0				21 785,00				
4588	883	0	833	0		21 785,72				
4588	680	2	678	3	679	21 786,68+	MB	1	Z	III
4588	509	0				21 787,49				
4588	247	0				21 788,71				
4588	043	00				21 789,70				
4587	847	0				21 790,61				
4587	669	00				21 791,48				
4587	382	0				21 792,84				
4587	157	0				21 793,91	T	r		
4586	966	0				21 794,82				
4586	756	0				21 795,82				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in	Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4586	579	2	591	0	585	21796,63+				I
4586	427	0				21797,38				
4586	241	00				21798,26	T	r		
4586	—		120	0h		21798,83				
4586	007	2				21799,37				I
4585	857	0				21800,09				
4585	661	00				21801,02				
4585	572	0				21801,45				
4585	403	0				21802,24				
4585	225	0				21803,09				
4585	091	1	116	1		21803,73	MB	0		II
4584	951	0				21804,40				
4584	688	0				21805,65				
4584	487	2	499	5	493	21806,57+	MB	1		III
4584	296	0				21807,51				
4583	902	2	880	2		21809,38	MB	0		IIb
4583	476	0				21811,41				
4583	178	00				21812,83				
4583	008	0	039	0		21813,64				II
4582	596	8	592	10	594	21815,61+	MB	4		IIIb
4582	179	0/1	163	00a	171	21817,62+				
4581	987	0/1				21818,50				
4581	546	8	538	4	542	21820,62+	MB	2		Ib
4581	321	0				21821,67				
4581	101	0				21822,72				
4580	868	0				21823,83				
4580	633	0				21824,95				
4580	452	1				21825,81				I
4579	996	10	994	10	995	21827,99+	MB	5		IIb
4579	666	0				21829,55				
4579	—		579	1a		21829,97				III
4579	462	5	454	5	458	21830,55+	MB	1		IIb
4579	118	1	122	0	120	21832,24+				I
4578	732	00				21834,01				
4578	536	1	558	1		21834,94	D	r		IIb
4578	023	7	015	6	019	21837,41+	MB	3		IIb
4577	835	0				21838,29				
4577	645	0/1				21839,19				
4577	401	00				21840,36				
4577	230	1	219	1	225	21841,20+	MB	0		II
4576	985	00				21842,34				
4576	733	0	732	1h	733	21843,55+				III
4576	559	4	535	1		21844,37	MB	0		I
4576	449	0				21844,90				
4575	—		981	0		21847,14				
4575	880	6	878	8	879	21847,62+	MB	3		IIIb
4575	—		750	1		21848,24				III
4575	412	0				21849,85				
4575	173	0				21850,99				
4574	990	00				21851,87				
4574	679	00	732	0		21853,35	T	r		
4574	486	0				21854,27				
4574	—		240	00		21855,45				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in A.-E.		Int.	λ	Int	λ		Name	Int.		
4574	145	0				21855,90				
4574	055	0/1				21856,33			d	
4573	—		896	00		21857,09				
4573	755	0				21857,77				
4573	623	0				21858,40				
4573	—		524	00		21858,87				
4573	315	00				21859,87	D	q		
4573	106	0				21860,87				
4572	—		987	0		21861,44				
4572	720	10	710	8	715	21862,74+	MB	4		Ib
4572	235	4	225	2	230	21865,06+	D	2		Ia
4572	054	0				21865,90				
4571	866	00				21866,80				
4571	482	00				21868,63				
4571	266	1	245	0		21869,67				I
4571	—		164	0		21870,15				
4570	840	0/1	799	1		21871,71	T	r		III
4570	466	00				21873,50				
4570	306	00				21874,26				
4570	016	00				21875,65				
4569	830	0	774	0		21876,54				II
4569	649	0				21877,41				
4569	362	00				21878,78				
4569	110	0				21879,99				
4568	817	0				21881,39				
4568	616	3	617	1a	616	21882,35+				Ib
4568	133	10	130	10	131	21884,68+	MB	6		IIb
4567	759	2	753	0	756	21886,47+				I
4567	414	00				21888,11				
4567	183	0				21889,22				
4566	882	00				21890,66				
4566	699	0				21891,54	D	r		
4566	455	0				21892,71				
4566	129	0				21894,27				
4565	945	0				21895,15				
4565	750	2				21896,09				I
4565	577	2	544	3		21896,92				IIIb
4565	309	00				21898,20				
4565	101	0				21899,20				
4564	948	1	909	0a		21899,94				I
4564	713	1	690	1		21901,06	T	q		IIb
4564	477	00				21902,20				
4564	253	1	245	0	249	21903,29+				I
4563	732	6	728	3	730	21905,78+	MB	1		Ib
4563	331	00				21907,70				
4563	059	0				21909,00				
4562	858	00				21909,97				
4562	639	0				21911,02				
4562	—		453	1		21911,91				III
4562	228	5	222	4	225	21913,01+	MB	2		Ib
4562	066	0				21913,77				
4561	832	0				21914,90				
4561	499	00				21916,50				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4561	333	00				21917,29				
4561	128	3	148	1	138	21918,23+	MB	0		I
4560	962	0				21919,08				
4560	650	1	594	0		21920,58				
4560	424	00				21921,75				
4560	192	1	206	2	199	21922,74+	MB	0		III
4559	912	0				21924,12				
4559	625	0				21925,50				
4559	289	0/1				21927,12				
4559	068	2				21928,18				I
4558	837	2	837	1	837	21929,29+				I
4558	610	4	606	4	608	21930,39+	MB	2	Z	IIb
4558	312	3	318	4	315	21931,80+				III
4558	107	00				21932,80				
4557	827	00				21934,15				
4557	622	0				21935,14				
4557	417	3	393	5		21936,12				III
4557	125	2	125	4	125	21937,53+	MB	2		IIIa
4556	926	00				21938,49				
4556	524	0				21940,42				
4556	216	00				21941,91				
4555	959	0				21943,15				
4555	—		847	0		21943,69	T	r		
4555	700	0				21944,39				
4555	343	0				21946,11				
4555	196	00				21946,82				
4555	018	00				21947,68				
4554	857	0				21948,45				
4554	643	0				21949,49				
4554	164	5	158	10	161	21951,81+	MB	4		IIIa
4553	996	0	954	1h		21952,60				III
4553	513	0				21954,93				
4553	195	00	186	0	191	21956,49+	D	r		
4552	923	00				21957,78				
4552	759	1				21958,57				I
4552	624	2				21959,22				I
4552	424	2	423	2	424	21960,18+	MB	1		II
4552	212	0				21961,21				
4552	055	0				21961,97				
4551	882	0				21962,80				
4551	712	3	724	3	718	21963,59+	MB	0		IIb
4551	411	1	378	1		21965,07				
4550	992	7	983	5	988	21967,12+	MB	3		Ib
4550	598	00				21969,00				
4550	290	0	318	1		21970,48				
4549	906	5	896	3	901	21972,36+	MB	1		Ib
4549	718	0				21973,25				
4549	489	0				21974,35				
4548	987	00				21976,78				
4548	651	00				21978,40				
4548	266	00				21980,26				
4547	946	2	967	5		21981,81	MB	1		III
4547	703	0				21982,98				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4547	232	3	234	1	233	21985,25+	MB	0		I
4547	044	00				21986,17				
4546	804	00				21987,33				
4546	466	1				21988,96	D	r	d	I
4545	880	1	915	00		21991,80				I
4545	455	2				21993,85	D	r		I
4544	829	0				21996,88				
4544	519	00				21998,38	D	r		
4544	299	0				21999,45				
4544	136	2				22000,24				I
4543	702	6	692	5	697	22002,36+	MB	2		Ib
4543	166	00				22004,94				
4542	928	0	954	1		22006,09	T	q		III
4542	671	0				22007,33				
4542	411	0				22008,59				
4542	107	00				22010,06				
4541	927	0				22010,94				
4541	685	00				22012,11				
4541	527	0				22012,88				
4541	316	0				22013,90				
4541	114	3	118	2	116	22014,87+	MB	1		I
4540	862	0				22016,10				
4540	429	0				22018,20				
4540	320	00				22018,73				
4539	977	00				22020,39				
4539	617	0				22022,14			d	
4539	276	0				22023,79				
4539	163	2	162	5	162	22024,35+	MB	2	Z	IIIa
4538	979	00				22025,24				
4538	601	0/1				22027,07				
4538	314	5	311	2	313	22028,47+	MB	1	Z	I
4537	904	1	880	2		22030,45	MB	1		IIIa
4537	755	2	731	4		22031,18				III
4537	438	00	403	0		22032,71				
4537	065	0				22034,53				
4536	888	0				22035,39				
4536	435	00				22037,59			d	
4536	250	00				22038,48				
4535	902	2	906	2h	904	22040,16+	MB	1		II
4535	575	0/1				22041,77				
4535	387	00				22042,68				
4535	071	0/1				22044,21				
4534	620	4	627	6	623	22046,38+	MB	3		IIIa
4534	464	4	468	1	466	22047,16+				Ia
4534	151	4	157	7	154	22048,71+	MB	3		IIIa
4533	940	00				22049,71				
4533	747	0				22050,65				
4533	589	0				22051,41				
4533	153	4	128	4		22053,54	MB	3	breit	II
4533	—		055	5		22054,01				III
4532	831	0				22055,10				
4532	617	0				22056,15				
4532	387	0				22057,26				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4532	108	0				22058,62				
4531	953	3	947	1	950	22059,39+	MB	0	Z	I
4531	792	0				22066,16				
4531	565	0				22061,26				
4531	190	1	193	3	192	22063,08+	MB	0		III
4530	972	0	890	1		22064,15				III
4530	491	1				22066,49				
4530	132	0				22068,24				
4529	674	2	669	0	672	22070,48+				Ib
4529	246	2	266	2	256	22072,51+				II
4529	085	2	079	5	082	22073,36+	MB	3		IIIa
4528	139	00				22077,96				
4527	762	1	778	2	770	22079,76+	MB	0	d	III
4527	533	1	516	0	525	22080,95+			d	I
4527	136	2	183	3ah		22082,85	MB	0		III
4526	—		996	0		22083,53				
4526	696	00				22084,99				
4526	504	00				22085,93				
4526	—		239	0		22087,22	T	r		
4526	079	00				22088,00				
4525	576	00				22090,46				
4525	178	1	210	0a		22092,40	T	var.		I
4524	958	00	883	1		22093,84 §	T	r		IIIa
4524	565	0				22095,40				
4524	149	5	139	7	144	22097,45+	MB	3	Z, S	IIIb
4523	776	0				22099,25				
4523	629	0				22099,97				
4523	—		466	0		22100,76				
4523	184	2	193	2	188	22102,12+	MB	1	Z	II
4522	987	0/1	960	1		22103,10				
4522	830	0	872	1		22103,87				III
4522	—		448	1		22105,74				III
4522	323	3	314	0	319	22106,37+	MB	0		Ia
4522	030	0				22107,78				
4521	862	00				22108,60				
4521	—		488	3		22110,43				
4521	464	4				22110,55	MB	2	breit	
4521	—		417	3		22110,79				
4521	064	1				22112,51				
4520	621	0	631	1	626	22114,65+	T	q		III
4520	429	1	450	0		22115,61				
4519	969	4	959	3	964	22117,89+	MB	0	Z, S	Ib
4519	570	0				22119,82				
4519	142	3	122	3	132	22121,96+	MB	0	S	IIb
4518	666	2	660	1	663	22124,25+				Ib
4518	—		128	0		22126,88				
4517	887	1	898	2	892	22128,03+	D	q		IIIb
4517	—		722	1		22128,86				III
4517	424	2	428	3	426	22130,31+	MB	1		III
4516	996	0				22132,42				
4516	615	0				22134,29				
4516	329	0				22135,69				
4516	179	0				22136,43				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4515	989	0				22137,36				
4515	579	5	562	3	571	22139,41+	MB	1	S	Ib
4515	166	2	182	2	174	22141,35+	MB	1		
4514	899	0				22142,70	P	1		II
4514	687	0				22143,74				
4514	319	5	313	3	316	22145,56+	T	0		Ib
4513	837	1	828	3	833	22147,93+	MB	1		IIIa
4513	448	00	450	0	449	22149,81+	T	1		
4513	295	0				22150,57				
4512	876	6	871	1	874	22152,64+	MB	1		Ia
4512	637	0				22153,80				
4512	548	1	481	0		22154,24				I
4511	857	2	888	0		22157,63				I
4511	705	3	690	4	698	22158,41+	MB	1	S	IIIb
4511	—		332	1		22160,21				III
4511	008	3	070	1b		22161,80				I
4510	898	3	904	5	901	22162,32+	MB	2		IIIa
4510	575	00				22163,93				
4510	241	0				22165,57				
4509	939	0				22167,05	D	r		
4509	639	0				22168,53				
4509	300	0				22170,19				
4509	076	1	103	2		22171,30	MB	0		III
4508	752	1	793	00		22172,89				I
4508	454	0				22174,35				
4508	330	1	338	00	334	22174,94+				I
4507	819	0/1				22177,48				
4507	681	0				22178,16	T	r		
4507	411	00				22179,48				
4507	164	0/1				22180,70				
4506	854	0				22182,23	T	r		
4506	—		545	00		22183,74				
4506	296	0				22184,97				
4506	029	0				22186,29				
4505	635	6	631	6	633	22188,24+	MB	3		IIb
4505	444	0				22189,17				
4504	928	3	916	1	922	22191,73+	MB	—		Ib
4504	693	00				22192,87				
4504	464	2	467	2	465	22193,99+	T	q		IIb
4504	031	0				22196,13				
4503	851	0/1	858	1	854	22197,00+	T	p		
4503	566	0	542	00		22198,42				
4503	018	0				22201,12				
4502	736	2	743	2	739	22202,50+	MB	0		IIb
4502	598	2	600	2	599	22203,19+				IIb
4502	321	0				22204,56				
4501	960	4	960	6	960	22206,34+	MB	3		III
4501	766	1				22207,30				I
4501	595	3	597	1	596	22208,13+				Ib
4501	390	0				22209,15				
4501	204	0				22210,07				
4501	086	0				22210,65	D	r		
4500	751	0				22212,31				
4500	621	0/1				22212,95				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4500	410	00				22213,99				
4500	046	4	050	1	048	22215,78+	MB	0		I
4499	548	3	554	2	551	22218,23+	MB	0		I
4499	336	00				22219,29				
4499	198	0	204	00	201	22219,96+				
4498	908	0				22221,40				
4498	658	3				22222,64				I
4498	523	6	523	4	523	22223,31+	MB	2		Ib
4498	108	5	108	10	108	22225,36+	MB	6	Z, S	IIIa
4497	874	2	877	0	875	22226,51+				I
4497	569	2	577	3	573	22228,00+				III
4497	096	3	101	3	098	22230,35+	T	0		IIb
4496	666	2	672	1	669	22232,47+	D	0		I
4496	241	0				22234,59				
4495	633	2	625	0	629	22237,61+				I
4495	310	2	313	1	311	22239,18+	T	p		Ib
4494	937	00	929	1	933	22241,07+				III
4494	248	0				22244,45				
4494	024	00				22245,55				
4493	693	3	688	5	691	22247,21+	MB	2		III
4492	839	00	840	1	840	22251,42+	D	q		III
4492	467	00	435	0		22253,27				
4491	937	0	975	1b		22255,89	T	q		III
4491	741	2	738	0a	740	22256,87+				I
4491	352	00				22258,79				
4491	144	00				22259,82				
4490	864	1	852	1a	856	22261,25+				I
4490	698	1				22262,03				I
4490	558	5	551	9	555	22262,74+	MB	5	Z, S	IIIa
4490	095	1				22265,02				I
4489	—		531	0		22267,82				
4489	382	2				22268,55				I
4489	214	2	234	1	224	22269,34+	T	p		I
4488	940	2				22270,75				I
4488	574	3	548	1		22272,56	T	r		Ib
4488	317	1				22273,84			d	I
4488	103	1				22274,90			d	I
4487	824	5	813	4	819	22276,31+	MB	3	Z, S	I
4487	553	1				22277,63				I
4487	145	0	103	0		22279,65	T	r	d	II
4486	721	2	710	0	716	22281,79+			breit	I
4486	431	00				22283,20				
4486	094	3	084	8	089	22284,90+	MB	3	Z, S	IIIa
4485	873	3	832	2		22285,97				I
4485	524	1	510	0	517	22287,74+				I
4485	148	2	135	1	142	22289,60+	D	r	d	I
4484	739	0/1				22291,61				
4484	553	00				22292,53				
4484	—		333	00		22293,62				
4484	—		161	1		22294,48	MB	0		III
4483	983	0				22295,36				
4483	550	2	509	1		22297,52				I
4483	301	1				22298,76	MB	0		I
4483	031	1	091	00		22300,10				I

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4482	717	0				22301,66				
4482	—		506	00		22302,72				
4482	—		253	0		22303,96				
4482	—		075	1		22304,85	MB	1		III
4481	919	2	919	1	919	22305,63+				I
4481	620	1				22307,12				I
4481	272	2	263	2	268	22308,87+	MB	0		IIb
4480	961	0				22310,40				
4480	723	1	725	00	724	22311,58+				I
4480	401	00				22313,19				
4480	153	1	141	0	147	22314,45+			d	I
4479	—		692	2		22316,72	MB	0		III
4479	343	0	393	1		22318,46				III
4478	981	2	987	3	984	22320,25+	MB	1		III
4478	760	1				22321,37				I
4478	434	1				22322,99				I
4477	997	1				22325,17				I
4477	886	1	823	1	830	22326,00+	T	q		II
4477	659	00				22326,85				
4477	256	0				22328,86				
4477	073	3	071	5	072	22329,78+	MB	1		IIIb
4476	709	0/1				22331,59				
4476	379	0/1	329	1		22333,24	T	q		
4475	—		866	0		22335,79	P	0		
4475	538	0/1				22337,44				
4475	172	00				22339,26				
4474	872	0/1				22340,76				
4474	574	00				22342,25				
4474	269	4	261	6	265	22343,79+	MB	2	Z, S	IIIb
4473	722	1				22346,50				
4473	396	0				22348,13	D	rd		
4472	928	0/1				22350,47				
4472	423	1				22352,99				I
4472	—		210	0		22354,06				
4471	953	3	961	3	957	22355,32+	MB	1		IIb
4471	—		608	1		22357,05				
4471	574	3				22357,24	MB	1		
4471	—		516	2		22357,53				
4470	729	0	715	1	722	22361,50+	T	q	d	III
4470	135	0				22364,43				
4469	843	0/1				22365,89				
4469	563	0	544	0	554	22367,34+	T	p		IIa
4469	—		240	00		22368,91				
4468	660	1				22371,82				I
4468	299	1	280	2	290	22373,67+	T	0		III
4467	716	0/1	748	0a		22376,54				
4467	436	00				22377,95				
4467	141	5	145	8	143	22379,41+	MB	3	S	IIIb
4466	990	0/1	928	0		22380,18				
4466	238	0				22383,95				
4466	158	00				22384,35				
4465	718	00				22386,55				
4465	424	0/1				22388,03				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4464	—		352	1		22393,40	T	q		III
4464	235	2	221	2	228	22394,03+	MB	1		II
4463	870	2	876	1	873	22395,81+	MB	1		I
4463	670	0				22396,83				
4463	188	1	207	0	197	22399,20+				I
4462	877	0				22400,81				
4462	—		781	0		22401,28	T	q		
4462	530	0				22402,55				
4461	989	1	914	1		22405,26	T	q		II
4461	—		704	0		22406,89				
4461	—		499	1		22407,72				III
4461	305	0				22408,70				
4460	971	8	965	10	968	22410,39+	MB	5	Z, S	IIIb
4460	558	00				22412,45				
4460	189	1	190	0	189	22414,31+	T	r		I
4459	794	00				22416,29			d	
4459	464	2	464	1	464	22417,95+	T	1		I
4459	—		118	2		22419,69	MB	1	Z	III
4458	—		859	3		22420,99				III
4458	779	4				22421,40				
4458	—		732	3		22421,63				
4458	332	1	295	1		22423,64	T	p		IIb
4457	568	1	577	1	572	22427,47+	T	p		IIb
4457	044	2	030	3	037	22430,16+				III
4456	872	2	851	4		22430,99	MB	2	breit	IIIa
4456	650	4	665	3	657	22432,07+				
4456	—		548	1		22432,61				III
4456	210	0				22434,32				
4455	959	1	955	2	957	22435,59+				IIIb
4455	664	1	666	2	665	22437,06+	MB	1		IIIa
4455	451	2	461	0	456	22438,12+			breit	I
4455	—		342	1		22438,69				III
4455	070	0	023	0		22440,06				II
4454	698	0				22441,93	P	0	d	
4454	032	00				22445,29				
4453	602	0				22447,46				
4453	160	3	141	3	151	22449,73+	MB	1	S	IIb
4452	775	2	767	3	771	22451,65+	MB	1		III
4452	503	1	482	0h		22453,00				I
4452	119	1	097	0		22454,94	MB	1		Ia
4451	957	0				22455,75				
4451	357	1	346	1	352	22458,80+	T	p		IIb
4451	118	00				22459,98				
4450	817	2	816	5	816	22461,51+	MB	0		IIIb
4450	349	1	350	0	349	22463,87+				I
4449	919	4	913	6	916	22466,05+	MB	1		IIIb
4449	512	1	502	0	507	22468,11+	T	p		I
4449	379	0/1				22468,76				
4449	093	0	104	0	098	22470,18+				II
4448	738	00				22472,00				
4448	494	00				22473,23				
4447	928	4	932	6	930	22476,08+	D	2		IIIb
4447	550	6	553	9	552	22477,99+	MB	4	Z, S	IIIb

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4447	190	0				22479,82				
4446	813	1	815	0	814	22481,72+	T	q		I
4446	602	00				22482,79				
4446	168	00				22484,98				
4445	906	00				22486,31				
4445	636	0	634	1	635	22487,68+				III
4445	245	4	246	7	245	22489,65+	MB	3	Z, S	III
4444	843	00				22491,69				
4444	626	00				22492,79				
4444	220	3	213	3	216	22494,86+	MB	1		IIb
4444	054	00				22495,66				
4443	859	00				22496,67				
4443	437	0	461	0h		22498,80	D	r		II
4442	875	2	852	2		22501,65	MB	0		IIb
4442	646	00				22502,81				
4441	876	0	846	0		22506,71	D	r		II
4441	661	00				22507,80				
4441	419	2	404	2	412	22509,05+	MB	0		IIb
4441	089	00				22510,71				
4440	826	00				22512,03				
4440	118	0				22515,62				
4439	704	00				22517,72				
4439	427	1	429	1	428	22519,12+	T	p		II
4439	111	0				22520,73				
4438	864	00				22521,98				
4438	637	1	629	2	633	22523,16+	D	0		III
4438	349	0				22524,60				
4438	217	2	206	3	212	22525,28+	MB	—		IIIb
4437	653	1	643	0	648	22528,15+	D	rd		I
4437	084	00	159	00		22531,02	T	r	breit	
4436	889	00				22532,01			breit	
4436	373	0				22534,63				
4436	192	0/1	205	00	198	22535,52+	MB	—		
4435	878	1	885	1	881	22537,13+				IIb
4434	981	2	991	2	986	22541,68+	MB	0		IIb
4434	574	1	573	1	574	22543,77+				IIb
4434	278	1	278	1	278	22545,28+	MB	0		IIb
4434	064	0/1				22546,36	T	0		
4433	826	1	876	1		22547,57				IIb
4433	400	0/1				22549,74				
4433	066	0				22551,44	D	r		
4432	604	0				22553,79				
4432	361	1	362	1h	361	22555,03+	MB	0		II
4432	027	0				22556,73				
4431	760	0				22558,09				
4431	—		494	1		22559,44				
4431	411	2				22559,86	MB	0	breit	
4431	—		378	1		22560,02				
4431	102	0				22561,44				
4430	886	00				22562,53				
4430	467	0				22564,67				
4430	266	1	356	00	261	22565,72+	T	r		I

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in A.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4429	860	00				22567,76			d	
4429	560	1				22569,29				I
4429	288	0	297	0	292	22570,66+	T	0		IIa
4429	183	0/1	165	00		22571,47	P	0		
4428	787	2	792	1	789	22573,22+				I
4428	452	0				22574,94				
4428	076	0/1	050	00		22576,85				
4427	738	3	750	0h	744	22578,55+	T	0		Ia
4427	—		472	00		22579,93				
4426	985	0				22582,42				
4426	588	0	608	1	598	22584,39+	T	r	d	III
4426	109	1	108	0	109	22586,89+				I
4425	900	3	895	2	898	22587,96+	MB	1	S	I
4425	575	0				22589,61				
4425	353	0				22590,75				
4425	150	2	151	2	150	22591,78+	MB	1		II
4424	936	1				22592,87				I
4424	755	00				22593,80				
4424	281	0	317	0		22596,22	D	r	d	II
4423	761	0				22598,88				
4423	599	0				22599,70				
4423	253	3	248	3	251	22601,48+	MB	1		IIb
4422	989	1	988	2	989	22602,82+				III
4422	—		772	1		22604,07	MB	0	Z	IIIa
4422	631	3	647	1	639	22604,61+				Ib
4422	259	00				22606,55				
4421	883	00				22608,47				
4421	526	0/1				22610,30				
4421	186	1	163	2		22612,04	MB	0		III
4420	928	1	915	1	922	22613,39+				II
4420	702	00				22614,51				
4420	546	00				22615,31				
4420	306	3	304	4	305	22616,54+	MB	1		IIIb
4420	077	00				22617,71				
4419	838	2	818	1	828	22618,98+				I
4419	490	3	494	4	492	22620,70+	MB	1	S	IIIb
4419	271	0				22621,84				
4419	090	0	144	0		22622,76				
4418	915	00				22623,66				
4418	665	3	673	1	669	22624,92+	MB	0		I
4418	403	00				22626,28				
4418	227	00				22627,18				
4417	987	00				22628,41				
4417	740	00				22629,68			d	
4417	338	6	342	5	340	22631,73+	MB	3	Z, S	Ib
4416	958	0				22633,68				
4416	681	0				22635,10				
4416	485	1	480	1	483	22636,12+				IIb
4416	220	3	217	2	219	22637,47+	MB	1		Ib
4415	969	00				22638,75				
4415	797	0/1				22639,63				
4415	508	1				22641,11			d	I

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4414	—		994	3		22643,75	MB	1	Z, S	IIIa
4414	553	1	536	1	545	22646,05+				II
4414	209	5	218	4	213	22647,76+	MB	2	S	Ib
4413	889	1				22649,42				I
4413	505	3	499	2	502	22651,40+	MB	1		I
4413	303	1				22652,43				I
4412	947	1				22654,25			d	I
4412	472	3	484	2	478	22656,66+				I
4412	252	7	253	8	253	22657,82+	MB	4	Z, S	IIIb
4411	860	0				22659,84				
4411	623	0/1				22661,05				
4411	208	0				22663,18				
4411	055	00				22663,97				
4410	936	00				22664,58				
4410	650	3	618	3h		22666,05	MB	2		IIa
4410	487	3	478	2	483	22666,91+				Ia
4410	270	00				22668,01				
4410	110	00				22668,83				
4409	916	0	924	00a	920	22669,80+	D	r		
4409	656	0				22671,16				
4409	347	0				22672,75				
4408	797	0				22675,58	P	0		
4407	587	0				22681,81	T	r		
4407	162	0	143	0	153	22684,04+	T	r		II
4406	885	1	865	00		22685,42				I
4406	414	0				22687,84				
4405	855	0				22690,72	T	r		
4405	476	0				22692,67				
4405	264	0				22693,77				
4404	—		607	2		22697,15	MB	0		IIIa
4404	184	0	165	1	174	22699,38+				III
4404	001	0				22700,27				
4403	639	1	625	1	632	22702,17+	T	q		II
4403	308	0				22703,84				
4403	074	00				22705,05				
4402	989	00				22705,49				
4402	799	0				22706,47				
4402	470	1	462	0	466	22708,19+	T	p		I
4402	197	0				22709,57				
4401	932	1				22710,94				I
4401	651	1	645	0a	648	22712,21+	MB	0		Ia
4401	402	1	406	0	404	22713,66+				I
4401	—		094	0		22715,27				III
4400	922	2	915	0	919	22716,17+				Ib
4400	—		830	3		22716,63	MB	1		III
4400	772	2	745	4		22716,92				III
4400	125	0				22720,27				
4399	906	0	947	0		22721,40				
4399	669	0	662	1	665	22722,64+	T	1		IIIa
4399	353	0/1				22724,25				
4399	141	00				22725,35	T	r		
4398	938	1	934	0	936	22726,41+				I
4398	709	00				22727,58				
4398	505	0				22728,63				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4398	242	1	239	1	241	22729,89+	MB	1	Z	IIa
4398	091	2	081	1	086	22730,80+				Ia
4397	801	00				22732,27				
4397	562	0/1				22733,51			d	
4397	063	0				22736,09				
4396	905	1	893	0	899	22736,94+	T	r		I
4396	324	0				22739,91	D	r		
4396	126	0				22740,93				
4395	764	0				22742,81			d	
4395	344	00				22744,98	T	q		
4395	068	0/1				22746,41				
4394	769	1	753	00		22747,95	P	0		Ia
4394	337	0	346	1	342	22750,17+	T		d	III
4393	881	0				22752,55				
4393	667	0				22753,66				
4392	930	0/1	891	1		22757,48	T	0	d	
4392	—		725	00a		22758,54				
4392	582	00				22759,28				
4392	101	1	093	2	097	22761,80+	MB	1	S	IIIa
4391	738	3	726	1	732	22763,69+				Ia
4391	361	0				22765,61				
4391	162	0				22766,64				
4390	899	4	900	4	899	22768,01+	MB	2	S	IIb
4390	488	1	462	0		22770,13				I
4390	115	00				22772,07	P	0		
4389	756	0				22773,93				
4389	461	0	452	0	457	22775,48+				II
4389	095	2	084	3	090	22777,39+	MB	1		III
4388	878	0/1	888	1	883	22778,45+				
4387	573	00				22785,26				
4387	343	0	285	1		22786,46	T	0	d	III
4386	681	00				22789,90			d	
4386	261	1	249	1	255	22792,11+	T	0		II
4385	729	00	704	00a		22794,84				
4385	486	00				22796,11				
4385	089	0				22798,17				
4384	648	0				22800,46				
4384	443	1	456	1	449	22801,50+	MB	0	Z	II
4384	—		193	1		22802,83				III
4383	—		494	2		22806,47	MB	0		III
4383	—		313	0		22807,41				
4383	—		030	0		22808,88				
4382	194	0	181	1	188	22813,26+	T	0		IIIa
4381	947	00				22814,52				
4381	632	0/1	609	1		22816,16	T	q		
4380	983	0				22819,54				
4380	652	00				22821,26	D	r		
4380	242	0				22823,40	T	q		
4379	961	1	955	1	958	22824,88+				II
4379	679	00				22826,33				
4379	397	4	403	4	400	22827,79+	MB	2		IIb
4378	873	0				22830,53				
4378	517	0				22832,39				
4378	230	00				22833,89				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4377	684	1				22836,74	MB	—		Ia
4376	479	00				22843,02				
4376	212	00				22844,42	D	r		
4375	595	1	544	0		22847,64	T	q		I
4375	050	00				22850,49			d	
4374	785	0				22851,87			d	
4374	454	0				22853,62	T	r	d	
4374	239	00				22854,72				
4373	306	0				22860,12			d	
4372	839	0				22862,04			d	
4372	464	0				22864,00				
4372	283	00				22864,95				
4371	002	1	990	1	996	22866,44+	T	p		IIb
4371	833	00				22867,30				
4371	637	0				22868,32				
4371	310	00				22870,03				
4371	007	0				22871,62				
4370	771	3	766	2	769	22872,87+	MB	0		Ib
4370	548	00				22874,02				
4370	289	1	278	0	284	22875,40+	T	q		
4369	367	0				22880,21				
4369	066	0	988	00a		22881,78	T	r		
4368	793	0				22883,21				
4368	452	0/1	491	0		22885,00	T	p		
4368	216	0/1				22886,23				
4367	709	2	726	1	717	22888,85+	MB	0		I
4366	921	0				22893,02	MB	0		
4366	674	1	650	1		22894,32				II
4366	364	0				22895,94				
4365	556	0				22900,18	D	r		
4365	263	00				22901,72				
4364	929	1	921	0	925	22903,49+	D	r		I
4364	542	0				22905,50	P	0	d	
4364	198	00				22907,30				
4364	065	0/1				22908,00	T	r		
4363	808	00				22909,35				
4363	452	00				22911,22			d	
4363	106	0				22913,03				
4362	822	0/1				22914,53	T	r		
4362	487	00				22916,28				
4362	250	0				22917,53				
4361	937	2	915	0a		22919,17	MB	0		Ia
4361	640	00				22920,73				
4361	493	00				22921,51				
4361	162	0				22923,25				
4360	830	0/1				22924,99				
4360	494	0/1				22926,76	T	p	d	
4360	117	00				22928,74				
4359	927	00				22929,74				
4359	685	00				22931,01				
4359	450	00				22932,25	T	q		
4358	—		537	00		22937,06	T	p		
4358	344	1				22938,07				I

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4357	962	00				22940,08	D	r		
4357	748	0				22941,21				
4357	362	0/1				22943,24			d	
4357	088	0/1	045	00a		22944,68	D	r		
4356	832	0/1				22946,03				
4356	202	0/1				22949,35				
4355	986	1				22950,48	MB	0		I
4355	728	0/1	785	0a		22951,85				
4355	384	1				22953,65				I
4354	947	1				22955,96	MB	0		Ia
4354	756	0				22956,97				
4354	498	1	540	3		22958,33				IIIb
4354	—		181	0		22960,00				
4353	767	1				22962,19				I
4353	427	1	412	1	420	22964,01+	MB	0		II
4352	395	00				22969,42				
4352	182	00	119	0		22970,54	T	p		
4351	795	00				22972,59				
4351	599	00				22973,62				
4351	188	00				22975,79				
4350	832	0				22977,67	T	0	d	
4350	366	0	423	1a		22980,13				III
4350	213	00				22980,94				
4349	516	00				22984,62				
4349	111	0				22986,77	T	p		
4348	880	0				22987,99				
4348	626	00				22989,33				
4347	979	0				22992,75	T	q	d	
4347	609	00				22994,71				
4346	774	0				22999,12				
4346	643	0	661	1a	652	22999,77+	T	q		III
4346	365	0				23001,29				
4346	146	0				23002,45				
4345	731	0				23004,64	T	r	d	
4344	796	1				23009,59				I
4344	337	00				23012,03				
4344	156	00				23012,98				
4343	942	00				23014,12				
4343	—		600	1		23015,93	T	p		III
4342	858	00				23019,86				
4341	—		794	0		23025,50				
4341	156	0				23028,89			d	
4340	864	0/1				23030,44				
4340	466	$H\gamma$	470			23032,55				
4340	154	0/1				23034,20				
4339	845	0	817	1		23036,00 §				III
4339	538	0	534	1	536	23037,48+				III
4339	192	00				23039,31				
4338	915	00				23040,78	D	q		
4338	612	00				23042,39				
4338	309	00				23044,00	D	q		
4338	049	00				23045,38				
4337	772	00				23046,85				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4337	506	0				23048,27	D	q		
4337	323	0	380	0		23049,24				
4336	892	00				23051,53				
4336	608	00				23053,04				
4336	304	0/1	309	1	307	23054,64+			d	
4336	127	0/1				23055,60			d	
4335	532	1	519	3	526	23058,79+	MB	0		III
4334	889	0				23062,18				
4334	662	00	697	0a		23063,39				
4334	435	00				23064,60				
4334	244	00				23065,61				
4334	043	00				23066,68	D	r		
4333	855	00				23067,68				
4333	618	00				23068,94				
4333	351	00				23070,37				
4333	163	0				23071,37				
4332	942	0				23072,54				
4332	628	1	619	3	624	23074,24+	MB	1		IIIa
4331	913	00				23078,02				
4331	743	00				23078,93	T	p		
4331	389	00	375	0	382	23080,85+				
4331	084	00				23082,44				
4330	406	0	401	1	403	23086,07+	MB	0		IIIa
4330	167	0				23087,33				
4329	662	1	644	1	653	23090,07+	MB	0		II
4329	366	00				23091,60				
4328	899	0				23094,62				
4328	653	00				23095,41				
4327	939	1	927	5	933	23099,25+	MB	1		IIIa
4327	360	1	362	1	361	23102,30+	T	1		IIa
4327	001	0				23104,22				
4326	208	00				23108,46			d	
4326	068	00				23109,21				
4325	527	0				23112,10				
4325	354	00				23113,02	T	r		
4325	063	00				23114,58				
4324	885	00				23115,53				
4324	704	00				23116,49				
4324	533	00				23117,41				
4324	095	00				23119,75				
4323	894	00				23120,82				
4323	706	00				23121,83				
4323	—		510	0		23122,87				
4323	416	00				23123,38	T	qd		
4323	120	00				23124,96				
4323	021	00				23125,49				
4322	118	0				23130,32				
4321	792	00				23132,07				
4321	552	0				23133,35				
4321	114	00				23135,70				
4320	956	0				23136,55				
4320	755	0				23137,62	T	r		
4320	—		660	00		23138,13				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4320	435	00				23139,33	T	r		
4320	076	00				23141,25				
4319	872	00				23142,34				
4319	724	00				23143,14	D	r		
4319	529	00				23144,20				
4319	091	00				23146,53	D	r		
4318	630	00				23149,00				
4318	427	0				23150,09				
4318	261	0	220	2		23151,20 §	MB	0		IIIa
4318	012	0/1	004	1	008	23152,34+				
4317	752	0				23153,71	D	r		
4317	464	00				23155,25				
4317	203	00				23156,65				
4316	—		956	00a		23157,98				
4316	874	00				23158,42				
4316	724	00				23159,22				
4315	754	0	762	0	758	23164,41+	T	r		II
4315	538	0				23165,59				
4315	428	0				23166,18				
4314	854	00				23169,26				
4314	647	00				23170,37				
4314	165	00	162	0a	164	23172,97+	T	r		
4314	018	00				23173,75				
4313	916	00				23174,30				
4313	642	0				23175,77	T	r		
4313	501	0				23176,53				
4313	323	0				23177,48				
4312	924	0	873	2		23179,90 §	MB	0		IIIa
4312	364	0	394	0		23182,64	T	0		IIa
4312	141	0				23183,84				
4311	715	1	701	1	708	23186,17+	MB	0		II
4311	469	00				23187,45				
4310	983	0	017	00		23190,08				
4310	557	00				23192,36				
4310	303	00				23193,72	D	r	d	
4310	105	00				23194,79				
4309	723	00				23196,85				
4309	328	00				23198,97				
4309	156	00				23199,90				
4308	618	0	635	2		23202,73 §	MB	0		IIIa
4308	362	0				23204,17				
4307	—		986	0		23206,20				
4307	654	0				23207,99	T	p		
4307	—		495	0		23208,85				
4306	911	00				23211,99				
4306	621	00				23213,55				
4306	273	1	276	3	275	23215,42+	MB	1		IIIa
4306	050	00				23216,63				
4305	822	1	818	1	820	23217,87+	P,W	0		II
4305	577	00				23219,29				
4305	254	00				23220,92				
4304	862	00				23223,04				
4304	476	00				23225,12				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4304	302	00				23226,06				
4303	944	2	967	1		23227,99	MB	0	breit	I
4303	849	00	877	3		23228,36 §				IIIa
4303	437	3	423	4	430	23230,77	MB	1	S	IIIb
4303	093	0				23232,58				
4302	933	00				23233,45				
4302	546	00				23235,54				
4302	313	0				23236,80				
4302	058	00				23238,18				
4301	426	00				23241,59				
4301	025	00				23243,75				
4300	862	0	840	0		23244,64			d	II
4300	541	00				23246,37				
4300	327	00				23247,53				
4300	114	00				23248,68				
4299	775	00				23250,51				
4299	637	0	660	0		23251,26	P	0	d	IIa
4298	472	00				23257,56				
4298	034	0	027	0	031	23259,95+	T	0		IIa
4297	684	00				23261,83				
4297	372	0				23263,51				
4296	349	0				23269,05				
4295	667	0	637	1h		23272,75				III
4295	425	1	423	1	424	23274,06+	MB	0		II
4295	144	00				23275,58				
4294	960	0				23276,58				
4294	624	0				23278,40				
4294	424	0				23279,48				
4294	—		226	1		23280,55	MB	0		IIIa
4293	866	00				23282,51				
4293	680	00				23283,52				
4293	507	00				23284,46				
4293	115	0				23286,58	T	0		IIIa
4292	—		696	1		23288,85				
4292	591	0	586	0	589	23289,44+				II
4292	107	0	138	1		23291,68 §	T	0	d	IIIa
4291	825	00				23293,58				
4291	548	00				23295,09				
4291	206	00				23296,94	T	q		
4290	970	00				23298,22				
4290	764	00				23299,34				
4290	529	0	567	0		23300,62				
4290	099	0	114	2	107	23302,91+	T	0		IIIa
4289	637	0	641	3	639	23305,45+	T	0		IIIa
4289	430	00				23306,59				
4289	—		200	0		23307,83				
4289	118	0				23308,28				
4288	820	0	846	0ah		23309,90	T	p		II
4288	593	0				23311,14				
4288	441	0				23311,96				
4288	214	0				23313,19				
4287	860	0				23315,12				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4287	705	0				23315,96				
4287	570	0	613	0		23316,70	T	p		
4287	102	0				23319,24	D	r		
4286	068	0	035	0		23324,87	T	p	d	
4285	573	0	500	0h		23327,57	T	r		
4285	361	0				23328,72				
4285	053	0				23330,39				
4284	829	0				23331,61				
4284	648	0				23332,60				
4284	496	0				23333,43				
4284	287	0				23334,57				
4284	048	0	069	00		23335,87	T	r		
4283	814	0				23337,14				
4283	585	0				23338,39				
4283	402	0				23339,39	P	0		
4283	167	0				23340,67				
4282	776	0	712	0h		23342,80	T	p	d	
4282	149	0				23346,22				
4281	814	1	816	1	815	23348,04+	T	p		IIb
4281	378	0				23350,41				
4280	724	1	740	1h	732	23353,94+	T	p		IIb
4280	149	0				23357,12				
4279	759	00				23359,25				
4279	387	1	416	2		23361,28	MB	0	S	III
4278	987	0				23363,46				
4278	703	00				23365,02				
4278	184	00				23367,83				
4277	796	0				23369,97				
4277	475	0/1	480	1	478	23371,70+	T	p		III
4277	091	0				23373,82				
4276	—		898	0		23374,88				
4276	491	0				23377,10	D	r		
4276	—		360	0a		23377,81				
4276	107	00				23379,20				
4275	706	00				23381,39				
4275	434	0				23382,88			d	
4274	587	0/1				23387,51	T	—		
4274	286	00				23389,16				
4273	886	00				23391,62	T	—		
4273	619	00				23392,81				
4273	113	00				23395,58				
4272	688	00				23397,91				
4272	179	0				23400,69	T	q	d	
4271	527	0				23404,27				
4271	—		189	0a		23406,11				
4270	967	00				23407,33				
4270	685	0				23408,88	T	—		
4270	479	00				23410,01				
4270	097	0				23412,11				
4269	875	0				23413,32				
4269	597	0				23414,85	D	q		
4269	391	0				23415,98				
4269	038	0				23417,91				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4268	597	0				23420,33				
4268	325	0				23421,82				
4267	902	0/1	906	1a	904	23424,14+	T	q		
4267	602	0				23425,79				
4267	337	0				23427,25				
4267	052	1	032	1	042	23428,87+	T	r		IIb
4266	897	00				23429,66				
4266	553	0				23431,55				
4266	312	0				23432,87				
4266	113	0				23433,97				
4265	043	0				23434,90				
4265	584	00				23436,87				
4265	146	1	162	1a	154	23439,24+	T	p	d	IIb
4264	784	0				23441,27				
4264	561	0				23442,50				
4264	184	0	178	00	181	23444,59+	D	r		
4263	802	00				23446,67				
4263	517	00				23448,24				
4263	239	0				23449,77				
4262	794	0	778	1	786	23452,26+	T	p		III
4262	341	0				23454,71				
4262	046	00				23456,33				
4261	—		668	1		23458,41	T	p		III
4261	511	0				23459,27				
4261	055	00				23461,79	D	r		
4260	791	0				23463,23				
4260	—		343	0ah		23465,70	T	q		
4260	221	0				23466,38				
4260	015	0				23467,51				
4259	692	0				23469,29	P	0		Ia
4259	449	0				23470,63				
4259	266	00				23471,64				
4258	960	0				23473,33				
4258	729	0				23474,60				
4258	386	0				23476,49				
4257	615	0				23480,74	D	r		
4257	462	00				23481,59				
4257	113	0				23483,51				
4256	731	0	722	1	726	23485,64+	T	q		III
4256	240	0				23488,33				
4256	001	0				23489,65				
4255	710	0				23491,25				
4255	267	0	221	0		23493,70	T	q		II
4254	919	0				23495,62				
4254	623	00				23497,25				
4254	040	1	029	1	035	23500,50+	MB	0		II
4253	684	0				23502,44				
4253	473	0				23503,61				
4253	301	1	289	3	295	23504,59+	MB	1		IIIa
4253	117	0				23507,57				
4252	878	0				23506,90				
4252	561	0				23508,65				
4252	116	0				23511,11				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4251	831	0				23512,68				
4251	551	0				23514,23				
4251	383	0				23515,16				
4251	062	0				23516,94				
4250	396	00				23520,62	D	r		
4250	013	00				23522,74				
4249	469	0				23525,75				
4249	210	00				23527,19				
4248	850	0				23529,18				
4248	227	00				23532,63				
4247	941	00				23534,16				
4247	725	0				23535,41				
4247	305	00				23537,74				
4246	997	0	988	0	993	23539,47+				II
4246	672	0/1	691	2	682	23541,19+	MB	0		IIIa
4246	295	0				23543,34				
4245	961	0				23545,19				
4245	632	0/1				23547,01			d	
4245	—		533	0		23547,55	T	p		
4245	055	0				23550,22				
4244	704	0				23552,16				
4244	515	0				23553,21	D	r	d	
4244	069	0				23555,69				
4243	785	0				23557,26				
4243	581	00				23558,40				
4243	348	1	326	2		23559,49	MB	2		IIIa
4243	129	1	125	1	127	23560,91+				IIa
4242	810	0				23562,67				
4242	476	0/1	470	0	473	23564,54+				
4242	255	00				23565,75	D	r		
4241	926	0				23567,58				
4241	776	0				23568,41				
4241	524	0				23569,82				
4241	341	0				23570,83				
4241	015	0				23572,65				
4240	658	0				23574,63				
4240	435	0				23575,87				
4240	120	0				23577,62	T	—		
4239	898	0/1				23579,41				
4239	562	0				23580,72				
4239	266	00				23582,37				
4239	128	0				23583,14	T	—		
4238	742	00				23585,29				
4238	429	0				23587,03				
4238	167	0				23588,48				
4237	907	00				23589,93				
4237	683	0				23591,18				
4237	—		545	1		23591,95	MB	0	S	IIIa
4237	232	0				23593,69				
4236	804	0				23596,08				
4236	608	0				23597,17				
4236	367	0				23598,51	T	r		
4235	535	0				23603,14				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4235	300	0				23604,46				
4235	055	0				23605,82	D	r		
4234	694	0				23607,83				
4234	307	0				23609,99				
4234	137	00				23610,94				
4233	893	0	818	3		23612,71 §	MB	1		IIIa
4233	408	1	407	4	407	23615,01+				IIIa
4233	240	00				23615,94				
4232	925	0/1	892	1		23617,70				
4232	683	0/1	670	2	676	23619,09+	T	0		IIIa
4232	465	0				23620,26				
4232	291	00				23621,24				
4232	037	0				23622,65				
4231	789	0				23624,04	D	r		
4231	500	0				23625,65			d	
4231	339	0				23626,55				
4231	159	00				23627,55				
4230	998	0	002	1	000	23628,44+	T	p		III
4230	757	0				23629,80				
4230	568	00				23630,86				
4230	369	0				23631,97				
4230	184	0				23633,00				
4229	998	0				23634,04	T	—		
4229	806	0				23635,11				
4229	585	00				23636,35				
4229	448	0				23637,11				
4229	198	0				23638,51				
4229	030	00				23639,45				
4228	860	1	812	1		23640,40	T	r		
4228	654	0				23641,55				
4228	363	0				23643,18				
4228	236	0				23643,89				
4227	911	0				23645,71				
4227	355	0	377	2		23648,69 §	MB	0		IIIa
4227	007	00				23650,76				
4226	790	0	736	0		23651,98	T	q	d	
4226	538	00				23653,39				
4226	372	0				23654,32				
4226	195	00				23655,31				
4226	022	0				23656,28				
4225	868	00				23657,24				
4225	765	00				23657,71				
4225	—		546	0		23658,94	T	q		
4225	294	00				23660,35				
4224	975	00				23662,14				
4224	830	0				23662,95				
4224	512	2	503	5	507	23664,76+	MB	0		IIIb
4224	209	1				23666,43				
4224	—		105	0		23667,01				
4223	941	4	935	5	938	23667,95+	MB	2		IIIb
4223	689	00				23669,34				
4223	478	0				23670,53				
4223	282	0				23671,62				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4222	997	00				23673,22				
4222	768	0				23674,51				
4222	514	2	518	5	516	23675,92+	MB	3		IIIa
4222	160	3	158	5	159	23677,92+				IIIa
4221	816	00				23679,84			d	
4221	501	0				23681,61				
4221	246	00				23683,04				
4221	086	0				23683,94	D	r		
4220	854	0				23685,24				
4220	633	0				23686,48				
4220	498	0				23687,24				
4220	372	00				23687,95				
4220	121	0				23589,35				
4219	919	00				23690,49				
4219	479	1	495	2	487	23692,91+	T	0		III
4219	187	00				23694,60				
4219	011	0				23695,59				
4218	866	0				23696,40				
4218	604	0				23697,87				
4218	344	0				23699,33				
4218	100	0				23701,27				
4217	896	0				23701,85	T	—		
4217	581	0				23703,62				
4217	254	0				23705,46				
4217	054	0				23706,58				
4216	683	1	669	1ah	676	23708,71+	T	p		IIb
4216	473	0				23709,85				
4216	—		210	0		23711,33				
4216	—		176	0		23711,52	T	p		
4216	078	0/1	063	0	071	23712,11+				
4215	832	0				23713,45				
4215	465	00				23715,52				
4215	126	0				23717,43	D	r		
4214	908	0				23718,65				
4214	671	00				23719,99				
4214	492	0				23720,99				
4214	288	2	279	0	284	23722,17+	T	p		Ia
4214	086	00				23723,28				
4213	890	00				23724,39				
4213	699	0				23725,46				
4213	556	0				23726,26	D	r		
4213	299	0				23727,71				
4212	797	0				23730,54				
4212	507	6	498	10	502	23732,20+	MB	4		IIIb
4212	047	3	036	1	042	23734,79+				Ia
4211	824	0	821	1a	823	23736,03+	T	0		IIIa
4211	552	00				23737,55				
4211	—		133	00		23739,91				
4211	020	0				23740,55				
4210	867	0				23741,42				
4210	—		680	00a		23742,47				
4210	129	3	131	5	130	23745,57+	MB	3		IIIa
4209	933	00				23746,68				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4209	—		845	0		23747,18				
4209	761	00				23747,65				
4209	—		690	0a		23748,06				
4209	485	0				23749,21				
4209	175	4	169	4	172	23750,98+	MB	2		IIb
4209	029	00				23751,78				
4208	726	00				23753,49				
4208	490	0	430	1		23754,83	T	0		IIIa
4208	238	1	225	0	232	23756,28+	MB	0	d	Ia
4207	959	0	898			23757,82				
4207	768	00				23758,90				
4207	530	1	541	1	535	23760,21+	T	q		IIb
4207	221	0				23761,99				
4206	968	00				23763,42				
4206	806	00				23764,33				
4206	629	0				23765,33				
4206	447	0				23766,36				
4206	311	00				23767,13				
4206	091	2	085	2	088	23768,39+	MB	1		II
4205	836	0				23769,81				
4205	645	0				23770,89				
4205	436	00				23772,09				
4205	301	00	279	1		23772,96 §				III
4205	102	6	098	9	100	23774,54+	MB	5		IIIa
4204	904	0	887	1	895	23775,13+				III
4204	730	00				23776,07				
4204	601	0				23776,79				
4204	402	0				23777,92				
4204	227	0				23778,91				
4203	926	0				23780,61	T	—		
4203	725	0				23781,75				
4203	504	00				23783,00				
4203	336	0				23783,95				
4203	170	00				23784,89				
4202	943	00				23786,18				
4202	812	0				23786,92				
4202	676	0				23787,69				
4202	427	0/1	439	1	433	23789,06+				
4202	305	0	279	1		23789,79	MB	0		IIIa
4201	775	00				23792,79				
4201	571	0				23793,95				
4201	338	0				23795,26				
4200	959	2	971	3	965	23797,37+	MB	1		III
4200	—		893	0		23798,35				
4200	656	0				23799,12				
4200	355	0				23800,83				
4200	044	1	099	1		23802,59				II
4199	787	3	793	5	790	23804,03+	MB	2		III
4199	566	00				23805,30				
4199	362	0				23806,46				
4199	037	0				23808,30				
4198	710	1	717	1	713	23810,14+				II
4198	562	00				23810,98				
4198	—		455	00		23811,59				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4198	221	2	210	3	216	23812,96+	MB	0		IIIb
4197	939	00				23814,53				
4197	575	0				23816,59				
4197	285	00				23818,24				
4197	023	0				23819,72	D	r		
4196	824	0				23820,85				
4196	667	0				23821,74				
4196	327	0				23823,67				
4196	139	00				23824,74				
4195	936	0				23825,89			d	
4195	668	5	674	6	671	23827,40+	MB	3		IIIb
4195	429	0/1				23828,77				
4195	200	0				23830,07				
4194	991	0				23831,26				
4194	806	0				23832,31				
4194	630	00				23833,31				
4194	368	0	305	1		23834,80	T	p	d	
4194	019	0/1	016	1	017	23836,80+				
4193	—		875	0a		23837,59				
4193	765	0				23838,23				
4193	457	0				23839,98				
4193	260	0				23841,10				
4193	121	00				23841,89	D	r		
4192	953	0				23842,84				
4192	—		869	0		23843,31				
4192	790	0				23843,77				
4192	583	0				23844,95				
4192	263	0				23846,77				
4192	105	1	107	1	106	23847,66+	T	q		IIb
4191	894	0				23848,87				
4191	687	0				23850,04				
4191	451	00				23851,39				
4191	185	0				23852,91	T	r		
4191	010	0				23853,90				
4190	747	0				23855,40				
4190	537	0				23856,59				
4190	282	0				23858,04	T	r		
4190	057	00				23859,32				
4189	888	00				23860,29				
4189	666	0				23861,55				
4189	456	2	462	2	459	23862,73+	MB	0		IIb
4189	—		350	00a		23863,34				
4189	123	0	091	00		23864,64				
4188	941	00				23865,68				
4188	742	00	712	0a		23866,81				
4188	540	0				23867,97				
4188	206	1	229	1		23869,87	T	p		IIb
4187	732	00	730	0	731	23872,58+				
4187	584	0				23873,41				
4187	349	00				23874,75				
4186	965	0				23876,94				
4186	711	0				23878,39				
4186	013	0				23882,37				
4185	817	0				23883,49				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4185	529	00				23885,13				
4185	165	00				23887,21				
4185	041	0/1				23887,92	P	0		
4184	798	0/1				23889,31				
4184	641	0	690	0		23890,20	T	q		
4184	376	0	400	0a		23891,72			d	II
4184	042	00				23893,62				
4183	793	0				23895,04				
4183	559	0				23896,38	T	r		
4183	259	00				23898,10				
4183	055	0				23899,26				
4182	875	00				23900,29				
4182	732	00	674	0		23901,11				
4182	449	0				23902,73				
4182	166	4	170	8	168	23904,33+	MB	3		IIIa
4181	995	00				23905,32				
4181	723	00				23906,87				
4181	311	0				23909,23				
4181	105	00				23910,41				
4180	867	0				23911,77				
4180	705	0/1	692	1	699	23912,73+				
4180	455	0				23914,13				
4180	300	00				23915,01				
4180	105	4	111	5	108	23916,11+	MB	2		IIIb
4179	885	0	897	0	891	23917,35+				II
4179	591	3	598	4	594	23919,05+	MB	1		IIIb
4179	294	0				23920,77				
4179	004	00				23922,43				
4178	671	0/1	639	0a		23924,33	T	q		
4178	487	00				23925,39				
4178	342	0				23926,22				
4178	006	0				23928,14				
4177	718	4	720	5	719	23929,79+	MB	1		IIIb
4177	478	0				23931,12				
4177	113	8	125	10	119	23933,22+	MB	4		IIIb
4176	956	0				23934,36				
4176	731	00				23935,45				
4176	372	00				23937,51				
4175	943	0				23939,96	T	r		
4175	423	0/1				23942,95				
4175	163	4	165	6	164	23944,54+	MB	2		IIIb
4175	001	0	957	0		23945,36				
4174	797	0				23946,53				
4174	387	0				23948,89				
4174	243	00	319	1		23949,27 §				III
4174	011	0/1	050	00		23951,04	T	r	d	
4173	—		846	00a		23951,98				
4173	749	0/1				23952,55			d	
4173	529	00				23953,81				
4173	250	0				23955,41				
4173	076	0				23956,41				
4172	862	0				23957,64				
4172	633	0				23958,95	T	r		

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4172	435	00				23960,09				
4172	232	0				23961,26				
4171	901	0				23963,16				
4171	600	0				23964,89				
4171	309	8	308	10	308	23966,56+	MB	3		IIIb
4170	710	0				23970,00				
4170	452	0				23971,48				
4170	239	0				23972,71				
4169	956	0				23974,34	D	r		
4169	720	0	696	0		23975,69				II
4169	493	0				23977,00				
4169	132	0				23979,07				
4168	828	00				23980,82				
4168	581	1	571	2	576	23981,97+	MB	0	d	III
4168	264	0				23984,06				
4168	001	0				23985,58				
4167	755	00				23986,99				
4167	573	2	567	2	570	23988,05+	MB	0		IIb
4167	337	0				23989,40				
4167	095	0				23990,79				
4166	957	0				23991,59				
4166	—		727	00a		23992,92	T	r		
4166	630	0/1				23993,47			d	
4166	370	0				23994,97				
4166	202	0				23995,94				
4165	916	0	864	0		23997,58	D	r		
4165	705	0				23998,80				
4165	428	0				24000,39				
4165	188	4	195	3	191	24001,76+	MB	1		Ib
4164	973	0				24003,01				
4164	791	0				24004,07			d	
4164	471	0	440	00a		24005,91	T	p		
4164	301	0				24006,89				
4163	900	0				24009,20				
4163	608	4	605	3	607	24010,89+	MB	2		I
4163	406	3	393	2	400	24012,09+				I
4163	015	0/1	012	1	013	24014,32+	T	0		
4162	748	00				24015,85				
4162	341	0	364	0a		24018,19			d	II
4162	211	0				24018,94				
4161	949	3	941	5	945	24020,48+	MB	2		III
4161	745	1	718	1		24021,63				II
4161	486	0	490	1	488	24023,12+				III
4161	271	0				24024,37				
4160	737	0				24027,45	T	—		
4160	319	00				24029,87				
4159	983	00				24031,81				
4159	825	00				24032,72				
4159	584	0				24034,11				
4159	320	2	302	5	311	24035,69+	MB	1		III
4159	060	00				24037,14				
4158	894	0				24038,10				
4158	744	0				24038,97				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4158	499	0				24040,38				
4158	252	0				24041,81	T	—		
4157	940	0				24043,62				
4157	566	00				24045,78			d	
4157	183	0	173	1	178	24048,02+				III
4156	873	1	861	4	867	24049,82+				III
4156	633	4	623	4	628	24051,21+	MB	2		IIb
4156	410	0				24052,47				
4156	245	0				24053,42				
4155	806	0/1	804	2	805	24055,97+	T	0	d	IIIa
4155	544	0				24057,48				
4155	364	0				24058,52				
4155	166	00				24059,67				
4154	886	0				24061,29	D	r		
4154	424	00				24063,96				
4153	822	0				24067,45				
4153	633	00				24068,55				
4153	417	0				24069,80				
4153	279	00				24070,60				
4153	078	0				24071,76			d	
4152	928	0				24072,63				
4152	652	2	637	2	645	24074,27+	MB	0		IIb
4152	261	0/1				24076,50				
4152	—		164	00a		24077,06				
4152	025	0				24077,87				
4151	795	00				24079,20				
4151	604	1	573	2		24080,31	MB	0	S	III
4151	334	0				24081,88				
4150	960	0				24084,05			d	
4150	619	00				24086,02				
4150	403	00				24087,28	T	r		
4150	130	0				24088,86				
4149	957	0				24089,87				
4149	418	00				24093,00				
4149	113	0				24094,77				
4148	744	00				24096,91	P	0		
4148	515	00				24098,24	D	r		
4148	143	0				24100,40				
4147	955	00				24101,49				
4147	644	00				24103,30				
4147	462	0				24104,36				
4147	208	00				24105,83				
4147	085	0				24106,55	T	q		
4146	—		912	0a		24107,55				
4146	577	00				24109,50				
4146	240	1	241	2	240	24111,46+	MB	0	S	III
4146	057	00				24112,53				
4145	785	0				24114,11				
4145	564	3	546	2	555	24115,45+	MB	0		Ib
4145	347	00				24116,66				
4145	009	0				24118,62				
4144	771	00				24120,01			d	
4144	264	0				24122,95				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4143	—		858	0		24125,31	T	p		
4143	363	0				24128,20	D	r		
4143	—		286	0		24128,64				
4143	183	0				24129,25				
4142	801	0/1	801	0	801	24131,48+	T	0	d	IIa
4142	504	0				24133,21				
4142	282	0				24134,50				
4142	098	0	036	1		24135,57	T	r		
4141	892	0				24137,36				
4141	655	0				24138,16				
4141	424	00				24139,50			d	
4141	088	0				24141,46				
4140	805	0/1	817	0	811	24143,07+	T	0	d	IIa
4140	563	0				24144,52				
4140	130	0				24147,04	P	0		
4139	828	0	780	00		24148,81	W	0		
4139	492	0/1	519	0		24150,77	T	p		
4139	301	00				24151,88				
4139	038	0				24153,42				
4138	883	00				24154,32	P	0		
4138	493	0				24156,60				
4138	237	1	190	0		24158,09	T	r		I
4138	028	0				24159,31				
4137	873	0				24160,22				
4137	577	0				24161,95			d	
4137	458	0	438	0	448	24162,70+				II
4137	279	00				24163,69				
4136	874	0				24166,05			d	
4136	543	0				24167,99	D	r		
4136	141	0/1				24170,33				
4135	825	0				24172,18				
4135	680	0				24173,03				
4135	268	0				24175,44			d	
4135	001	0/1	005	0	003	24176,98+	D	r		II
4134	540	0				24179,69	P	0		
4134	384	0				24180,61				
4134	249	00				24181,40				
4133	998	3	995	3	997	24182,87+	MB	0	S	IIb
4133	718	0				24184,50				
4133	407	1	381	0		24186,32				I
4133	267	0				24187,14				
4133	056	00				24188,38				
4132	860	00				24189,52				
4132	607	0	695	0		24191,00	T	r		
4132	478	0				24191,75				
4132	338	0				24192,58				
4131	989	3	953	1		24194,62	MB	0		I
4131	707	0				24196,27				
4131	498	2	453	2		24197,49	MB	0		IIb
4131	269	0				24198,83				
4131	040	0				24200,18				
4130	821	00				24201,46				
4130	533	0				24203,15				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4130	261	0				24204,75				
4130	—		025	2		24206,12	T	0		III
4129	920	0				24206,74				
4129	545	1	535	2	540	24208,97+	T	0		III
4129	021	0				24212,01				
4128	810	0				24213,25	T	r	d	
4128	613	00				24214,40				
4128	404	0				24215,63				
4128	193	00				24216,87				
4127	967	0				24218,19				
4127	692	0				24219,81				
4127	373	00				24221,68				
4127	081	00				24223,39	D	r		
4126	910	0				24224,40				
4126	742	00				24225,38				
4126	493	0				24226,84				
4126	195	0				24228,59			d	
4125	902	0				24230,31				
4125	759	0				24231,15				
4125	606	0				24232,05				
4125	367	0				24233,45	D	r		
4125	209	0				24234,38				
4124	858	0				24236,44				
4124	466	0				24238,75				
4124	334	0				24239,52				
4124	102	0	077	0		24240,89				
4123	909	0				24242,02				
4123	753	0	750	1	751	24242,95+	T	p		III
4123	455	00				24244,69				
4123	277	1	266	0a	272	24245,77+				I
4122	990	0				24247,42				
4122	592	0				24249,77				
4122	194	0				24252,11				
4121	977	00				24253,38	D	r		
4121	650	0				24255,31				
4121	440	0				24256,54				
4121	021	0				24259,01				
4120	869	0				24259,91				
4120	647	0				24261,21	D	r		
4120	439	0				24262,44				
4119	975	0				24265,37				
4119	777	00				24266,34	P	0		
4119	647	0				24267,10				
4119	484	0				24268,06	T	q		
4119	186	0				24269,82				
4119	034	0				24270,71				
4118	871	0				24271,67				
4118	504	0				24273,84				
4118	338	0				24274,82				
4118	096	0				24276,24				
4117	778	0				24278,12	D	r		
4117	450	0				24280,05				
4117	167	0				24282,72				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4116	872	00				24283,46				
4116	722	00				24284,34				
4116	501	0				24285,65				
4116	308	1	306	1	307	24286,79+	T	p		IIb
4115	933	1	937	00	935	24288,99+	P	0		I
4115	650	0				24290,67			d	
4115	330	00				24292,56				
4115	115	0				24293,83	D	r		
4114	759	00				24295,93				
4114	551	0				24297,16				
4114	257	0				24298,89				
4114	026	0				24300,26				
4113	796	0				24301,62				
4113	629	0				24302,60				
4113	515	1	515	2	515	24303,27+	MB	0	d	III
4113	226	00				24304,98				
4113	066	00				24305,93				
4112	745	0				24307,83				
4112	448	0				24309,58	D	r		
4112	152	0				24311,33				
4111	883	00				24312,92				
4111	589	00				24314,66				
4111	373	0				24315,94				
4111	035	1	055	1a	045	24317,88+	MB	0	d	II
4110	—		935	1a		24318,52				III
4110	591	1				24320,56				
4110	130	2	116	2	123	24323,33+	MB	0		IIb
4109	920	0				24324,53				
4109	527	0	494	0		24326,86	MB	0	d	III
4109	292	1	297	2	295	24328,23+				
4108	873	0				24330,73				
4108	509	0				24332,89				
4108	269	0				24334,31				
4108	091	0				24335,36				
4107	793	2	788	2	791	24337,14+	MB	0		IIb
4107	272	0				24340,22				
4107	116	0				24341,14				
4106	508	00				24344,74				
4106	233	3	231	3	232	24346,38+	MB	0		IIb
4105	856	0				24348,61				
4105	401	00				24351,31				
4105	223	00				24352,37				
4105	055	0				24353,36				
4104	863	0				24354,50				
4104	597	00				24356,08	D	r		
4104	202	0				24358,42			d	
4103	894	0				24360,25	P	0	d	
4103	568	0				24362,19				
4103	276	0				24363,92				
4102	942	0				24365,90				
4102	654	00				24367,61				
4102	402	0/1				24369,11				
4102	097	0				24370,92			d	

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Ä.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4101	729	Hd	737	Hd		24373,11				
4101	364	0				24375,28				
4101	112	00				24376,78				
4100	789	0				24378,70				
4100	388	00				24381,08	D	q		
4100	157	00				24382,46				
4099	948	0				24383,70				
4099	770	0				24384,76	D	r		
4099	548	0				24385,87				
4099	106	0				24388,70				
4098	912	0				24389,86				
4098	622	0	607	0a	615	24391,63+	D	r		II
4098	241	0				24393,85				
4097	933	0/1				24395,69				
4097	—		547	0		24397,98				
4097	437	2	433	3	435	24398,65+	MB	1		III
4097	243	0				24399,80				
4097	084	00				24400,74				
4096	893	00				24401,88				
4096	634	1	598	0		24403,42	P	1		Ia
4096	278	00				24405,54				
4096	066	2	068	1	067	24406,80+	T	0		I
4095	939	1	946	1	942	24407,54+				IIb
4095	766	0				24408,59				
4095	531	2	533	3	532	24409,99+	T	0		IIIb
4095	252	0				24411,66				
4095	142	00				24412,31				
4094	882	0				24413,86				
4094	768	0	751	0	760	24414,59+				II
4094	491	0				24416,19				
4094	188	2	208	1	198	24417,94+	MB	0		I
4094	023	0				24418,98				
4093	—		803	0		24420,29	T	0		
4093	384	0				24422,79				
4093	162	0				24424,12				
4092	808	3	812	0	810	24426,22+	T	r		I
4092	561	0				24427,71				
4092	421	0				24428,54				
4092	131	0	207	0		24430,27	T	—		
4091	895	0				24431,68	P	0		
4091	638	1	624	0	631	24433,26+	T	r		I
4091	370	0				24434,82				
4090	999	0	068	00a		24437,03				
4090	—		710	0		24438,76	T	q		
4090	617	0				24439,32				
4090	454	0	484	00		24440,29				
4090	105	0				24442,38				
4089	608	0	689	00		24445,35				
4089	272	0	293	00a		24447,35	T	q		
4088	871	0	905	1		24449,75	MB	0		IIIa
4088	666	0/1	685	1	676	24450,92+				III
4088	323	0				24453,03				
4088	112	00				24454,29				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4087	971	00				24455,13				
4087	745	6	755	9	750	24456,46+	MB	2		IIIb
4087	508	0				24457,90				
4087	279	00				24459,27				
4087	045	0				24460,67				
4086	758	00				24462,39				
4086	518	0				24463,83				
4086	—		284	0		24465,23	T	q		
4086	131	0				24466,14				
4085	—		325	0		24470,97				
4085	281	3	243	3		24471,24	MB	1	d	IIb
4085	034	1	008	2		24472,72				III
4084	802	0				24474,11				
4084	526	2	519	1	522	24475,78+				Ib
4084	357	0				24476,77				
4084	187	0				24477,79				
4084	021	1	010	0	016	24478,82+				I
4083	832	1	838	1	835	24479,90+	MB	0		II
4083	510	0				24481,85				
4083	323	00	341	0	332	24482,92+				
4083	097	0				24484,33				
4082	649	0				24487,01				
4082	383	4	383	5	383	24488,61+	MB	1		IIIb
4082	069	00				24490,49				
4081	816	0				24492,01				
4081	—		579	0		24493,53				
4081	478	3	478	2	478	24494,04+	MB	0		Ib
4081	260	0				24495,35				
4080	735	00				24498,50	T	q		
4080	—		655	0a		24498,95				
4080	—		464	00		24500,15				
4080	298	0				24501,12				
4080	101	0	092	0	097	24502,33+	T	q		II
4079	926	0				24503,36				
4079	640	00				24505,07				
4079	—		432	0		24506,33				
4079	261	00				24507,35				
4078	—		963	1h		24509,16				III
4078	852	7	843	7	848	24509,83+	MB	2		IIb
4078	670	0				24510,90				
4078	457	0	500	1h		24512,18				
4078	149	0	165	1	157	24513,99+	T	0		IIIa
4077	884	0				24515,63				
4077	695	00				24516,76				
4077	372	0				24518,70				
4077	187	0				24519,82				
4076	919	0	960	0a		24521,43	T	r		
4076	—		806	0		24522,08				
4076	565	0				24523,56				
4076	311	00				24525,08				
4076	125	0	110	00	118	24526,25+				
4075	886	0/1	887	0a	886	24527,64+	T	r		II
4075	453	00				24530,25				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4075	114	0				24532,29				
4075	—		010	00		24532,91				
4074	849	0				24533,89				
4074	718	0				24534,07				
4074	—		618	00		24535,26				
4074	452	0/1				24536,28				
4074	096	6	100	4	098	24538,38+	MB	1		Ib
4073	864	0				24539,82				
4073	679	0				24540,93				
4073	472	0				24542,18				
4073	258	0				24543,47				
4072	958	3	961	3	959	24545,27+	MB	1		IIb
4072	752	0				24546,52				
4072	554	0	544	0	549	24547,74+				II
4072	406	0	341	0		24548,60				
4072	215	0				24549,75				
4072	060	0				24550,69				
4071	—		656	1		24553,10				III
4071	419	1	395	0		24554,55			d	I
4071	242	3	235	4	239	24555,64+	MB	1		IIIb
4070	853	00				24557,97				
4070	537	00				24559,87				
4070	331	0/1	319	0	325	24561,15+				
4069	893	3	884	2	889	24563,79+				I
4069	633	8	631	10	632	24565,34+	MB	4		IIIb
4069	—		358	0		24566,97				
4069	018	0	968	00		24569,04				
4068	702	0				24570,95				
4068	516	0				24572,07				
4068	338	0				24573,15	D	rd		
4067	878	0				24575,93				
4067	717	00				24576,90				
4067	160	2	162	1	161	24580,26+				Ib
4066	860	9	877	9	868	24582,03+	MB	4		IIb
4066	780	0				24582,57				
4066	452	00				24584,55				
4066	137	3	133	1	135	24586,46+				Ib
4065	818	0				24588,38				
4065	619	2	617	3	618	24589,59+	MB	1		III
4065	502	1				24590,29				I
4065	278	0				24591,65				
4065	—		182	00		24592,24				
4065	004	0				24593,30				
4064	588	0				24595,82				
4064	187	00	173	0	180	24598,29+				
4063	927	0				24599,82				
4063	—		631	4		24601,62	MB	1		III
4063	365	0/1				24603,22				
4063	230	0/1	258	1		24604,04				
4062	912	0	910	1	911	24605,97+				III
4062	760	0				24606,89				
4062	462	8	457	8a	460	24608,71+	MB	2		IIb
4062	204	00				24610,25				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4062	092	0/1				24610,93				
4061	872	0				24612,27				
4061	—		410	00		24615,06				
4061	280	0	300	0	290	24615,80+	T	p		II
4061	—		085	1		24617,06				III
4061	013	00				24617,47				
4060	—		903	0		24618,15				
4060	470	0				24620,77				
4059	907	0				24624,18				
4059	745	0	778	0		24625,16				
4059	556	00				24626,31				
4059	272	1	254	3	263	24628,09+	MB	0		III
4058	—		993	00		24629,74				
4058	836	0	795	00		24630,68				
4058	—		618	0a		24631,98				
4058	459	0	433	0		24632,97	MB	0	d	
4058	091	0				24635,20				
4057	874	00				24636,52				
4057	545	2	551	1	548	24638,50+	MB	0		I
4057	162	1	152	0a	157	24640,87+				I
4056	798	0				24643,05				
4056	611	00				24644,18				
4056	410	5	409	2	410	24645,41+	MB	0		Ib
4056	217	0				24646,58				
4055	828	0/1				24648,94			d	
4055	527	0				24650,77				
4055	281	4	278	2	280	24652,28+	MB	0		Ib
4055	071	00				24653,55				
4054	904	0				24654,56				
4054	751	0				24655,49				
4054	560	00				24656,65				
4054	372	1	383	0	377	24657,77+				I
4054	015	0/1	990	2		24660,11 §	T	p		III
4053	537	1	511	1		24662,88	T	p		II
4053	399	1				24663,71				I
4052	977	00				24666,28				
4052	590	00				24668,63	D	r		
4052	071	00				24671,79				
4051	709	00				24674,00				
4051	528	00				24675,10				
4051	225	2	221	2	223	24676,96+	MB	0		Ib
4050	923	00				24678,79				
4050	200	00				24683,19			d	
4049	900	00				24685,02			d	
4049	342	1				24688,42	T	p		I
4049	—		183	1		24689,40				III
4048	835	0/1				24691,51				
4048	449	5	451	4	450	24693,86+	MB	1	S	Ib
4048	—		296	1a		24694,77				III
4047	952	1	950	1	951	24696,90+				II
4047	522	0/1	581	2		24699,16 §	T	0	d	IIIa
4047	222	1				24701,35				I
4046	553	00				24705,44	T	r		

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4046	161	0				24707,83				
4045	—		487	0		24711,93	T	q		
4045	180	0				24713,82				
4044	765	0/1	772	0	768	24716,34+			d	
4044	450	1	465	1	457	24718,24+	T	p		IIb
4044	150	2				24720,12				I
4043	948	0				24721,35				
4043	857	00				24721,91				
4043	563	4	567	5	565	24723,69+	MB	1		IIIb
4043	368	00				24724,90				
4043	231	1				24725,73				I
4043	107	1	110	0a	108	24726,49+				I
4042	869	0				24727,95				
4042	676	0				24729,13				
4042	250	0				24731,74				
4041	910	0				24733,82				
4041	405	0				24736,91				
4040	734	0				24741,02				
4040	479	0				24742,58				
4040	354	0				24743,34				
4040	—		247	00		24743,97	T	r		
4039	—		975	00		24745,69				
4039	879	00				24746,25				
4039	639	0				24747,72			d	
4039	412	0				24749,11				
4039	130	0	156	1		24750,84	T	r	d	III
4038	748	00				24753,18				
4038	537	3	527	2	532	24754,50+	MB	0		Ib
4038	321	0				24755,80				
4038	026	0				24757,61				
4037	763	0				24759,22				
4037	300	00	326	0a		24762,06	T	r		
4037	112	00				24763,21				
4036	900	0				24764,51				
4036	—		708	0		24765,68				
4036	307	0	334	1		24768,15	T	q		III
4036	014	00				24769,95				
4035	837	0				24771,03				
4035	553	2	567	4	560	24772,74+	MB	0		IIIb
4035	350	00				24774,02				
4034	963	00				24776,40				
4034	750	0				24778,71				
4034	393	0				24779,90				
4034	085	0/1	074	0	080	24781,83+	T	p		
4033	782	0/1	777	0h	780	24783,67+				
4033	352	0				24786,30				
4032	967	0				24788,66				
4032	715	0/1	671	0		24790,21	T	r		
4032	519	00				24791,42				
4032	360	00				24792,40				
4032	169	0				24793,57				
4032	016	0				24794,51				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4031	756	1	757	3	757	24796,10+	MB	0		IIIb
4031	371	2	370	2	371	24798,47+	MB			IIb
4031	097	0				24800,16				
4030	078	0	030	00a		24806,43	T	q		
4029	672	00				24808,93				
4029	518	0				24809,88				
4029	295	00				24811,25				
4028	964	0	975	00	969	24813,26+			d	
4028	598	00				24815,54			d	
4028	328	4	333	8	330	24817,19+	MB	2	S	IIIb
4028	047	0				24818,94				
4027	775	0/1				24820,61				
4027	377	3	377	3	377	24823,06+	MB	0		IIb
4027	205	00				24824,13				
4026	923	0				24825,86				
4026	798	0				24826,64				
4026	608	4	605	3	607	24827,81+	MB	0		Ib
4026	227	1	218	2	223	24830,18+				III
4025	848	00				24832,49				
4025	642	0				24833,76				
4025	499	00				24834,65				
4025	138	00				24836,87				
4025	006	00				24837,69				
4024	761	2	734	4		24839,20	MB	0		IIIb
4024	537	0/1				24840,58				
4024	252	00				24842,34				
4024	090	0				24843,34				
4023	926	0				24844,36				
4023	700	00				24845,75				
4023	328	0/1	340	0	334	24848,01+	T	r	d	
4022	942	0				24850,43				
4022	624	0				24852,40				
4022	463	0				24853,39				
4022	180	00				24855,14				
4021	—		792	2		24857,55	T	0		III
4021	651	00	568	0a		24858,36				
4021	341	1	339	2	340	24860,33+				III
4021	117	0				24861,71				
4020	932	1	926	1	929	24862,87+				IIb
4020	—		348	00		24866,45	D	r		
4019	997	00				24868,64				
4019	795	0				24869,89				
4019	595	00				24871,12				
4019	161	0/1	140	0		24873,81			d	
4018	890	0	899	3	895	24876,07+	MB	0	d	IIIa
4018	—		722	00		24876,54				
4018	401	1	395	0	398	24878,53+				I
4018	205	00				24879,73				
4017	777	1	757	00		24882,38	T	r		I
4017	444	0	468	00		24884,44				
4017	237	0				24885,72				
4016	952	0				24887,49				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4016	789	0				24888,50				
4016	553	1	547	2	550	24889,98+	T	p		IIIb
4016	360	0/1	310	1		24891,16				
4015	—		833	1		24894,43	T	q		III
4015	697	0				24895,27				
4015	474	0				24896,65				
4015	030	0				24899,40				
4014	840	00				24900,58				
4014	188	1	175	0	182	24904,66+	T	r		I
4013	789	00				24907,10				
4013	—		564	00		24908,50				
4013	468	00				24909,09	P	0		
4013	154	1	146	1	150	24911,07+	T	0		II
4013	005	00				24911,97				
4012	753	1	770	0	761	24913,48+				I
4012	392	0				24915,77				
4011	798	0/1	778	0	788	24919,52+	T	r	d	
4011	432	0				24921,74				
4011	225	0	238	0	231	24922,98+	T	q	d	II
4010	741	1	738	0	740	24926,04+				I
4010	482	00				24928,64				
4010	236	0				24929,17	T	r		
4009	943	0	012	0		24930,99				
4009	567	1	561	2	564	24933,35+	T	p		IIIb
4009	291	1	258	0a		24935,04				I
4008	933	0/1				24937,27				
4008	741	1	715	2		24938,46	T	p	d	IIIb
4008	451	0				24940,27				
4008	095	0				24942,48				
4007	611	00				24945,50				
4007	429	0/1				24946,63				
4007	260	1	316	0		24947,68	T	q		
4007	120	0				24948,55				
4006	787	0				24950,63				
4006	359	0				24953,29				
4006	120	2	110	1	115	24954,81+				I
4005	949	3	943	4	946	24955,86+	MB	1		IIIb
4005	713	00				24957,31				
4005	499	2	492	5	496	24958,67+	MB	1		III
4005	—		398	1		24959,26				III
4005	—		085	00a		24961,24				
4004	970	0				24961,95				
4004	—		859	0a		24962,64				
4004	616	0/1	630	0	623	24964,11+	T	q		
4004	—		480	1a		24965,00				III
4004	387	0				24965,58				
4004	117	00				24967,26				
4003	774	1	781	0	777	24969,39+	T	q		I
4003	361	1	371	2	366	24971,95+				III
4002	985	2	983	0	984	24974,33+	T	p		I
4002	786	00	770	4		24975,67 §	MB	1		IIIa
4002	502	3	496	0h	500	24977,35+			S	Ia
4002	124	0/1	074	4		24980,01 §				III
4001	762	0				24981,96				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
4001	379	0				24984,35				
4001	053	00				24986,38				
4000	838	3	840	3	839	24987,72+	MB	0		IIb
4000	646	00				24988,92				
4000	469	0				24990,03				
4000	212	2	210	00	211	24991,64+	MB	0		Ia
3999	938	00				24993,35				
3999	—		821	1		24994,07				III
3999	673	0				24995,01				
3999	465	0				24996,31	T	q		
3999	254	2	260	1	257	24997,61+				I
3998	952	0				24999,50				
3998	243	1	254	7	249	25003,91+	T	q		III
3997	751	0				25007,02				
3997	336	0				25009,62				
3997	145	5	143	2	144	25010,82+	MB	2		Ia
3996	939	0				25012,10				
3996	731	0/1				25013,40	T	p		
3996	641	1	657	2	649	25013,92+				III
3996	361	0				25015,71				
3995	985	00				25018,54	D	r		
3995	690	00				25019,89				
3995	441	0				25021,48				
3995	282	00				25022,47				
3994	941	0				25024,61				
3994	728	0				25025,94				
3994	577	00				25026,89				
3994	430	0				25027,81	T	r		
3994	214	0				25029,16				
3994	063	0				25030,11				
3993	850	3	848	3	849	25031,45+	MB	0	S	IIb
3993	588	00				25033,08				
3993	261	3	255	5	258	25035,15+	MB	0		IIIa
3992	979	0				25036,90				
3992	720	0				25038,53				
3992	546	0				25039,62			d	
3992	340	4				25040,91				I
3992	012	2				25046,96	MB	2		I
3991	832	5	833	0	832	25044,10+				Ia
3991	607	0				25045,53				
3991	—		506	2		25046,08				III
3991	412	0				25046,73				
3991	179	1	145	8		25048,41 §	MB	0		IIIa
3990	956	0				25049,59				
3990	712	0				25051,13				
3990	536	0				25052,23				
3990	380	0				25053,21				
3990	036	7	031	0	034	25055,38+	MB	2		Ia
3989	846	00				25056,56				
3989	670	0				25057,67				
3989	513	00				25058,66				
3989	146	0	170	0		25060,96	T	r		
3988	980	0/1				25062,00				
3988	732	0				25063,56				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
3988	380	0				25065,77	T	r		
3988	194	00				25066,94				
3987	902	00				25068,78				
3987	495	0				25071,34				
3987	—		363	3		25072,16				III
3987	209	0				25073,13				
3986	921	3	921	0	921	25074,95+	MB	1		Ia
3986	660	00				25076,59			d	
3985	937	0				25081,14				
3985	692	00	702	3	697	25082,65+	T	q		III
3985	476	0/1				25084,04				
3984	868	1				25078,86				I
3984	463	0				25090,41				
3984	190	0				25092,13				
3983	936	0	971	1		25093,73	MB	0	S	IIIa
3983	814	0				25094,50				
3983	662	0/1				25095,46				
3982	921	0				25100,13				
3982	780	0				25101,02				
3982	—		633	4		25101,94	MB	1		III
3982	562	5	557	1	560	25102,40+				Ia
3982	096	0				25105,33				
3981	556	0/1				25108,73				
3981	231	00				25110,78	T	r		
3980	994	0				25112,28				
3980	215	00				25117,19				
3979	917	0				25119,07				
3979	760	3	740	1	750	25120,13+	T	p		Ib
3979	551	00				25121,38				
3979	353	3	322	1		25122,63				I
3979	161	00				25123,85				
3978	892	00				25125,54				
3978	708	3	666	2		25126,71	D	0		Ib
3978	444	0/1				25128,37	MB	0		
3978	304	0				25129,26				
3978	141	2	147	1	144	25130,27+	D	0		I
3977	418	0				25134,86				
3977	113	0	091	1h		25136,78	MB	0		IIIa
3976	827	3	835	3	831	25138,56+				IIb
3976	290	0				25141,99				
3975	982	0				25143,93				
3975	689	3	666	2		25145,79	MB	0		Ib
3975	463	00				25147,22				
3975	129	00				25149,33				
3974	760	1	772	3	766	25151,63+	T	p		IIIb
3974	214	1	210	1	212	25155,13+	MB	0	S	II
3973	684	00				25158,48				
3973	266	0				25161,12	D	r	d	
3972	582	0				25165,45			d	
3972	350	0				25166,92				
3971	800	00				25170,41				
3971	454	2	448	1	451	25172,62+	T	q		Ib
3970	454	0/1				25178,94				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
3970	073	H_δ				25181,36				
3969	658	2				25183,99				I
3968	947	0/1	912	1		25188,50	T	p		
3968	535	0				25191,12				
3968	126	0				25193,71				
3967	459	0				25197,95	D	rd		
3967	061	0				25200,48				
3966	879	0				25201,63				
3966	—		800	1		25202,13	T	q		III
3966	445	0				25204,39				
3966	318	0				25205,20	T	q		
3965	853	0				25208,15				
3965	606	0				25209,72				
3965	420	0				25210,90				
3965	082	0	090	1a	086	25213,02+	T	q		III
3964	824	00				25214,69				
3964	608	0				25216,07				
3964	275	00				25218,18				
3963	732	1	730	1a	731	25221,64+	T	q	d	IIb
3963	552	0/1	525	0		25222,78				
3963	430	0				25223,56				
3963	152	4	144	4	148	25225,35+	MB	1		IIb
3962	822	0				25227,42				
3962	575	0	561	0a	568	25229,04+				II
3962	340	3	328	3	334	25230,54+	MB	1		IIb
3962	167	0				25231,60				
3961	928	00				25233,12				
3961	722	00				25234,42				
3961	419	0				25236,36				
3961	175	00				25237,92	D	r		
3960	986	0/1				25239,12				
3960	788	0/1	758	1		25240,38				
3960	446	00				25242,56				
3960	203	0	188	1	195	25244,16+	MB	0		IIIa
3959	961	4	955	1	958	25245,67+				I
3959	805	00				25246,65				
3959	568	0	603	0		25248,16				
3959	372	0				25249,41				
3959	245	0	210	0		25250,22	D	rd		II
3958	953	00				25252,08				
3958	665	0				25253,92				
3958	230	0				25256,70				
3957	382	0				25262,11	P	0		
3957	041	0/1	020	0		25264,29	T	r		
3956	234	0				25269,44				
3956	064	0				25270,52				
3955	609	00				25273,43				
3955	425	0				25274,61				
3955	195	2	177	1	186	25276,13+	MB	0		I
3954	934	0				25277,74				
3954	613	0				25279,80				
3954	115	0				25282,98				
3953	895	0				25284,39	D	rd		

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
3953	343	0				25287,92				
3953	198	00				25288,84	T	r		
3952	765	0	819	0		25291,62				
3952	381	00				25294,07				
3952	193	0				25295,27				
3951	994	0				25296,55				
3951	493	1	484	1	489	25299,78+	T	p		IIb
3951	136	0	122	1	129	25302,09+				III
3950	933	0				25303,34				
3950	730	00				25304,64				
3950	583	4	573	2	578	25305,62+	MB	0		Ib
3950	205	0				25308,01				
3950	—		093	00		25308,72				
3949	714	00				25311,15				
3949	406	2	400	0a	403	25313,14+	T	r	d	I
3949	121	0/1	081	0		25314,95				
3948	698	00				25317,66				
3948	438	0				25319,33				
3948	232	0/1				25320,65	T	r	d	
3947	899	00				25322,79				
3947	627	0				25324,53			d	
3947	362	0				25326,23				
3947	101	2	091	1	096	25327,94+	MB	0		I
3946	926	00				25329,04				
3946	746	00				25330,19				
3946	520	00				25331,64			d	
3946	301	0				25333,04				
3946	048	0	108	0a		25334,67	T	r		
3945	748	0				25336,58				
3945	160	0				25340,37				
3944	830	2	818	1	824	25342,53+	T	q		Ib
3944	636	0				25343,74				
3944	532	0				25344,40				
3944	277	4	272	4	275	25346,06+	MB	1		IIb
3944	041	00				25347,56				
3943	885	00				25348,63				
3943	621	0				25350,26				
3943	335	00				25352,10				
3943	015	0				25354,15				
3942	549	0/1	606	0a		25357,15	T	r	d	
3942	407	00				25358,06				
3942	016	0				25360,58				
3941	473	00				25364,07	D	r		
3941	178	0				25365,97				
3940	520	00				25370,21				
3940	241	0				25372,00				
3939	971	00				25373,74				
3939	—		893	0		25374,22	T	r		
3939	816	0				25374,74				
3939	409	00				25377,36				
3938	909	0				25380,58	D	r		
3938	456	00				25383,50	P	0		
3938	164	0				25385,29				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in A.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
3937	863	0				25387,33				
3937	673	00				25388,55				
3937	397	0/1				25390,33	T	r		
3936	608	0				25395,42				
3936	428	0				25396,58				
3936	239	00				25397,80				
3936	059	00				25398,96				
3935	599	00				25401,95				
3935	153	2	181	1a		25404,80	T	r		Ib
3934	356	00	328	00		25409,95				
3933	970	0				25412,44				
3933	586	2	598	2	592	25414,89+	T	0		IIb
3932	995	00				25418,75				
3932	435	00				25422,36				
3931	920	0				25425,69				
3931	587	00				25427,85				
3931	127	0				25430,82	P	0		
3930	661	2	676	0a	668	25433,79+	T	r		I
3929	820	0/1				25439,28	D	r		
3929	173	0				25443,47				
3928	682	00				25447,00				
3928	359	4	388	1		25448,74	T	p		I
3927	—		901	0		25451,72				
3927	631	0				25453,46				
3927	—		244	0		25455,31	T	0		
3927	184	3	191	0	187	25456,34+				I
3926	354	00				25461,74				
3925	—		970	0a		25464,22	T	rd		
3925	878	1				25464,82				I
3924	882	00				25471,29				
3924	383	4	409	6		25474,52	MB	2	S	IIIb
3924	050	00				25476,69				
3923	288	0				25481,64				
3922	182	00				25488,82				
3919	967	0				25503,22	T	r		
3919	496	0/1				25506,29				
3918	420	0				25513,29				
3917	943	4	953	1	948	25516,37+	T	r		Ib
3917	529	00				25519,09			d	
3916	936	1	958	1		25522,96	T	p		IIb
3916	154	2	177	00		25528,06				I
3915	623	00				25531,52	D	r		
3915	377	00				25533,12				
3914	970	0				25535,77				
3913	959	0	012	00		25542,37	T	q		
3912	—		848	1		25543,00				III
3912	578	2				25551,39	D	r		I
3912	019	0				25555,04				
3911	410	0				25559,01				
3911	164	0				25560,63				
3910	466	0				25565,19				
3910	023	2	040	1	031	25568,03+	T	p		Ib
3909	045	1				25574,48	D	r		I

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
3908	799	0				25576,09				
3908	450	0				25578,37	D	r		
3908	—		045	0		25581,01				
3907	784	00				25582,73				
3907	489	2	476	2a	483	25584,71+	T	p		IIb
3906	845	0/1				25588,88	D	rd		
3906	199	0				25593,11				
3905	789	1				25595,80	T	r		I
3905	464	3	516	00		25597,93				I
3905	084	00				25600,42				
3904	524	00				25604,09				
3904	387	0				25604,99	D	rd		
3903	306	0				25612,08				
3902	614	1	620	3	617	25616,60+	T	0		III
3902	063	00	124	0a		25620,24				
3901	041	0				25626,95				
3900	—		934	00		25627,68	T	r		
3899	—		883	1		25635,57	T	r		III
3899	316	1				25638,29			d	I
3898	413	0/1				25644,22	T	p		
3898	118	2	120	1	119	25646,82+	T	p	d	Ib
3897	—		929	0a		25647,40				
3897	831	0				25648,06				
3897	538	1	517	1		25649,99				IIb
3896	772	00				25655,35				
3896	505	0				25656,78				
3896	078	0				25659,60				
3895	075	00				25666,21				
3894	019	0/1				25673,16			d	
3892	965	00				25680,11	T	q		
3892	525	0				25683,01				
3892	194	00				25685,20				
3890	699	2	700	1	699	25695,07	T	q		Ib
3890	321	0				25697,56				
3889	962	00				25699,94				
3889	639	00				25702,07				
3889	292	6	299	1	295	25704,34+	MB	3	S	Ia
3888	990	H;	988			25706,37				
3888	206	00				25711,54				
3887	838	2	836	2	837	25713,98+	MB	0		IIb
3887	416	1	388	1		25716,77				II
3886	811	0				25720,77				
3886	613	0				25722,08				
3886	217	3	218	1	217	25724,70+	MB	0		I
3885	856	00				25727,09				
3884	148	1	144	3	146	25738,42+	MB	0	S	III
3883	669	00				25741,58				
3882	044	00	045	1	045	25752,35+	T	p		III
3880	—		133	0		25765,05				
3879	—		726	1		25767,73				
3879	603	4				25768,56	MB	1	breit	
3879	—		526	4		25769,06				
3878	—		630	1		25775,02	D	rw		III

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
3878	342	0/1				25776,94	D	rd		
3877	950	0				25779,54	P,W	0		
3877	336	0/1	266	1		25783,62	T	p	d	
3876	914	0				25786,43				
3876	426	0				25789,68	D	rd		
3875	859	00				25793,45				
3875	364	0				25796,75				
3874	851	3	864	0	857	25800,12+	D	rd		I
3874	100	2	120	2	110	25805,09+	T	0		IIb
3873	472	00				25809,34				
3872	991	00				25812,55				
3872	357	3	354	4	356	25816,78+	MB	1	S	IIIb
3871	585	5	594	5	589	25821,89+	MB	2	S	IIb
3871	284	0				25823,93			d	
3870	923	3	910	2	917	25826,38+	MB	0		Ib
3870	638	2	630	2	634	25828,26+				IIb
3870	180	1	158	0		25831,29				I
3869	938	3	931	3	935	25832,93+	MB	0		IIb
3869	477	0/1				25835,99				
3869	156	4	155	2	156	25838,13+	MB	0		Ib
3868	836	0				25840,27				
3868	472	1				25842,70				I
3868	022	0/1	991	00		25845,71	T	p		I
3867	672	1				25848,05				I
3867	063	5	076	2	069	25852,08+	MB	1	S	I
3866	491	0	455	00		25855,94				
3866	018	1	990	00		25859,10				I
3865	—		477	2		25862,73	T	1		III
3865	204	1				25864,55				I
3864	313	2	272	1		25870,51	MB	0		I
3864	096	2	074	1		25871,97				I
3863	816	0				25873,84				
3863	445	1				25876,33				I
3863	198	6	202	4	200	25877,97+	MB	2		Ib
3862	867	0				25880,40				
3862	549	1				25882,33				I
3862	049	00				25885,68				
3861	494	5	496	4	495	25889,39	MB	1	S	Ib
3861	082	2				25892,16				I
3860	697	4	711	4	704	25894,70+	MB	1		IIb
3860	—		552	00b		25895,72				
3860	313	0	365	00		25897,32				
3860	—		060	1		25899,02				III
3859	—		877	3		25900,26	MB	1	S	IIIa
3859	814	2				25900,67				I
3858	975	0	008	1		25906,30				III
3858	668	6	662	2	665	25908,38+	MB	1		I
3858	155	0				25911,80				
3857	763	3	782	2	772	25914,38+	MB	0		Ib
3856	718	1				25921,46				I
3856	—		549	00		25922,59				
3856	—		332	0		25924,06				
3855	692	1				25928,36				I

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
3855	432	0/1	480	0ah		25930,11	T	r		
3854	525	3	489	1		25936,21	T	r		Ib
3854	138	0				25938,80				
3853	865	0				25940,65				
3853	547	1				25942,79				I
3853	265	0				25944,69				
3852	446	1				25950,20	D	r		I
3851	917	0				25953,77				
3851	567	0/1				25956,13				
3851	269	3	266	3	268	25958,14+	MB	0	S	IIb
3850	648	00				25962,32				
3849	—		988	0		25966,76	T	q		
3849	714	1	700	0	707	25968,67+				I
3849	320	3	304	2	312	25971,32+	T	0		Ib
3849	066	0				25972,99				
3848	—		928	00		25973,93				
3848	791	4	784	1	788	25974,87+				Ib
3847	905	2				25980,83	D	rw		I
3846	710	0				25988,90				
3846	219	3	226	1	222	25992,20+	T	p		Ib
3845	832	1	834	0	833	25994,82+				I
3845	511	0/1				25997,00	T	qd		
3845	—		395	0h		25997,76				
3844	997	0				26000,48	D	r		
3844	284	1				26005,29				I
3844	051	1				26006,87				I
3843	042	1				26013,70	D	rd		I
3842	435	1	453	00b		26017,81	T	r		I
3841	774	0/1				26022,29				
3841	456	1	450	1a	453	26024,46+	D	r		II
3840	—		548	1		26030,59	T	pd		III
3840	—		167	0		26033,18				
3839	858	0				26035,37				
3839	—		296	0		26039,06				
3839	207	0				26039,69	T	r		
3838	808	0				26042,39				
3837	629	3	609	0a		26050,39	D	rd		I
3836	911	0				26055,27				
3836	457	3	443	2	450	26058,40+	MB	0		Ib
3835	835	1	860	0		26062,58				I
3835	345	H_η	381	1a		26065,91			d	
3833	876	0				26075,89				
3833	607	0	489	0		26078,40	D	r		II
3833	057	0				26081,47	P	0	d	
3832	737	00				26083,64				
3832	423	3	415	0	419	26085,81+	D	r		I
3831	923	00				26089,18				
3831	647	0				26091,06				
3831	093	2	101	1	097	26094,81+	T	r		Ib
3830	683	0				26097,63				
3829	—		973	00		26102,48	D	r		
3829	167	2				26107,96	T	r		I
3828	872	0				26109,97				

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
3828	226	0				26114,38				
3827	349	0				26120,36	T	r		
3826	918	0/1				26123,30				
3826	679	0				26124,94				
3826	265	0				26127,76				
3825	—		622	0		26132,16	D	r		
3825	277	0/1				26134,51				
3824	921	2	940	2	930	26136,88+	MB	0		IIb
3823	872	0				26144,11				
3823	035	0	086	1		26149,84	T	q	d	III
3822	260	0				26155,14				
3821	—		872	1		26157,79	T	q		III
3821	713	1				26158,88				I
3820	840	0/1				26164,86				
3819	772	0				26172,17				
3819	—		464	1a		26174,30				III
3819	319	1	257	1ah		26175,28	T	p		IIb
3818	—		895	1		26178,15				III
3818	176	1	184	1	180	26183,08+	T	q		IIb
3817	141	00				26190,21				
3816	794	0	789	1	792	26192,61+	T	pd		III
3816	—		482	00a		26194,74				
3816	—		343	1a		26195,70				III
3815	316	2	333	1	324	26202,68+	T	p		Ib
3814	889	0				26205,67	T	r		
3814	—		568	00		26207,88				
3813	424	0	497	1		26215,74	T	r		III
3812	737	5	744	2	740	26220,44+	MB	0		Ib
3812	172	1	174	1	173	26224,34+	T	0		II
3811	735	0,1				26227,35				
3811	254	0				26230,66	D	r		
3810	894	1				26233,14				
3810	609	0				26235,11				
3809	—		874	1		26240,18	T	q		III
3809	678	0				26241,52				
3809	271	0				26244,32				
3809	021	2	021	1	021	26246,04+	MB	0		I
3807	—		971	1a		26253,29				III
3807	898	0/1				26253,78	T	q		
3807	040	00				26259,70				
3806	—		733	1		26261,82	T	p		III
3806	298	00				26264,82				
3805	859	0				26268,85				
3804	770	00				26275,37	D	rw		
3804	090	0				26280,06				
3803	323	0	269	0		26285,36				
3803	023	6	031	5	027	26287,41+	MB	2		Ib
3802	412	0/1				26291,66				
3802	091	1	076	1	084	26293,93+	T	p		IIb
3801	605	2	616	0h	610	26297,21+				I
3800	857	1				26302,42	D	rd		I
3800	613	1				26304,10				I
3800	004	2	045	1		26308,32	T	p		Ib

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
3799	337	0				26312,94				
3799	029	2	032	3	030	26315,06+	MB	1		III
3798	853	2	816	1a		26316,29				I
3798	255	0/1				26320,44				
3797	905	H_9	908			26322,85	MB	0		
3797	509	3	518	5	514	26325,57+				IIIb
3797	148	1	128	2	138	26328,18+				IIIb
3796	876	0				26330,00				
3796	585	7	595	6	590	26331,98+	MB	2		Ib
3796	—		062	1		26335,65				III
3795	389	00				26340,37				
3794	457	4	464	1	460	26346,76+	MB	0		I
3791	397	7	403	2	400	26368,02+	MB	1		Ia
3790	955	2	962	0	958	26371,09+	D	q		I
3790	552	0				26373,92			d	
3789	657	0				26380,15	D	rw		
3789	259	0/1				26382,92				
3788	284	00				26389,71			d	
3787	627	0				26394,29				
3787	—		419	1a		26395,73	T	p		III
3787	282	3				26396,69				I
3786	477	0				26402,30	D	rd		
3785	387	0				26409,90	D	rd		
3784	718	0/1				26415,27			d	
3784	168	2	156	1	162	26418,45+	T	q		I
3783	928	1				26420,09				
3783	338	0				26424,21				
3783	040	0	966	00a		26426,29				
3782	794	0	756	0a		26428,01	T	p		
3782	490	1	522	0		26430,13				I
3782	007	4				26433,51				I
3781	704	0				26435,63				
3781	273	0/1				26438,64				
3780	329	1				26445,24			d	I
3779	499	0/1				26451,05				
3778	084	0				26460,95				
3777	471	1	500	00		26465,25				I
3777	—		104	1a		26467,83				III
3776	972	2	980	1	976	26468,72+	MB	0		I
3776	671	0/1				26470,85				
3775	554	2	576	1		26479,39	T	q		Ib
3775	217	0				26481,05				
3774	663	0				26484,94				
3774	317	2	301	1	309	26487,42+	MB	0		I
3771	486	4	500	3	493	26506,95+	MB	0		Ib
3770	621	H_δ				26513,33				
3770	229	2	230	1	229	26516,08+				Ib
3769	277	00				26522,78				
3768	734	2	726	0a	730	26526,63+				I
3768	423	00				26528,79	T	rd		
3768	—		280	00		26529,80				
3765	050	00				26552,56				
3764	—		434	00		26556,90	T	r		

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
3762	992	2	982	1	987	26567,11+	T	r		Ib
3762	546	0/1				26570,22				
3762	083	0				26573,49				
3761	742	0				26575,90				
3760	764	0				26583,52	D	rd		
3760	413	0				26585,30				
3759	666	0	598	0		26590,58	T	q		
3758	653	0				26597,74				
3757	581	1	590	0	586	26604,59+	D	r		I
3757	259	00				26607,61				
3756	632	1	590	1		26612,05	T	r		IIb
3756	174	0				26615,30				
3755	869	0/1				26617,46				
3755	084	0/1				26623,02	D	r		
3754	229	0				26629,09				
3752	593	1	629	0a		26640,69	D	rd		I
3752	155	0				26643,81				
3751	871	3	879	2	875	26645,79+	MB	0		Ib
3750	134	H_ε				26658,17				
3748	718	0				26668,23			d	
3748	028	00				26673,14	D	rd		
3747	677	00				26675,64				
3747	420	0				26677,47				
3746	704	0				26682,57				
3745	141	0				26693,71				
3744	861	0	875	00	868	26695,65+				
3744	462	0				26698,55				
3743	108	00				26708,20				
3742	245	1				26714,37	D	rd		I
3741	782	0				26717,67				
3741	521	0				26719,53				
3741	207	1	209	1	208	26721,77+	T	p		IIb
3740	742	0				26725,10				
3740	262	0/1	268	0	265	26728,51+				
3739	—		623	00		26733,08				
3739	322	00				26735,24				
3738	671	0				26739,90				
3738	—		098	00		26743,98				
3736	016	00				26758,90	D	r		
3734	541	H_δ				26769,47				
3733	017	0				26780,40				
3732	745	00				26782,35				
3732	108	3	108	2	108	26786,92+	MB	1		IIb
3731	744	0				26789,54				
3731	205	00				26793,40				
3730	682	0/1				26797,16	D	rd		
3730	080	0				26801,48				
3728	733	00				26811,16				
3726	441	1				26827,65	D	rd		I
3725	813	00				26832,18				
3724	795	0	843	0		26839,51	T	q		
3724	072	0				26844,72				
3723	749	0				26847,05	D	r		

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
3723	294	0				26850,33	D	r		
3722	892	0				26853,23				
3722	106	2	093	2h	100	26858,94+	MB	0	d	IIb
3721	252	0				26865,06	D	r		
3720	791	0				26868,39				
3719	—		924	0a		26874,69				
3719	176	1	178	0a	177	26880,05+	T	r		I
3718	834	0/1				26882,53				
3718	178	0				26887,28				
3717	243	0	317	0		26894,04	T	r	d	
3716	775	0				26897,43				
3716	255	0				26901,19				
3715	975	0	990	1	983	26903,16+	T	q		III
3715	309	0/1				26908,03				
3714	644	0/1	686	0		26912,85	T	q	d	
3714	370	0				26914,84				
3713	978	0				26917,68				
3712	470	0				26928,62				
3711	551	0				26935,28				
3710	256	0				26945,68				
3704	564	2	567	0	565	26986,07+	T	r		I
3702	548	00				27000,77				
3702	118	4	112	3	115	27003,93+	MB	1		Ib
3701	861	3	883	1		27005,78				Ib
3700	067	1	048	1	058	27018,94+	MB	0		II
3699	779	1	783	1	781	27020,97+				II
3699	027	0				27026,47	D	rd		
3697	824	0	855	1		27035,27	T	p		III
3696	724	0				27043,31	D	rd		
3696	213	00				27047,05				
3695	—		146	1		27054,85	T	q		III
3694	316	0	295	00		27060,94	T	r		
3693	693	0				27065,50				
3692	748	0				27072,43				
3690	142	2	143	1	142	27091,55+	MB	0		I
3689	806	0				27094,01				
3689	747	0				27094,45				
3688	551	0/1	590	0a		27103,23	T	r		
3687	290	0	304	0a	297	27112,45+	D	rd		II
3684	780	00				27130,96				
3684	481	0	463	1	472	27133,23+	MB	2		III
3684	305	6	313	5	309	27134,43+				I
3683	414	1				27141,03	D	r		I
3682	503	0				27147,74				
3682	274	2	291	1	282	27149,37+	MB	1		I
3681	951	5	963	2	957	27151,77+				I
3681	355	0	343	1	349	27156,25+	T	r		III
3680	537	0	526	1	531	27162,29+	T	q		III
3679	802	0/1				27167,67	D	rd		
3679	015	00				27173,48				
3677	977	0	985	00b	981	27181,12+	T	r		
3677	071	0				27187,84				
3676	777	3	800	0a		27190,02	T	r		I

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ in Å.-E.		Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
3674	863	0				27204,18				
3674	378	5	398	7	388	27207,70+	MB	1		IIIb
3673	—		773	1b		27212,24				III
3673	637	3	621	3	629	27213,32+	MB	0		IIb
3673	039	00				27217,69				
3672	—		342	0a		27222,86	T	r		
3671	—		970	0		27226,61				
3669	018	2	000	0a	009	27255,01+	T	r		I
3668	862	1	840	0a		27256,11	P	0		I
3667	—		524	00		27258,61	T	r		
3666	774	0				27264,20				
3666	244	0				27268,14				
3665	887	5	907	3	897	27270,71+	MB	1		Ib
3665	552	0				27273,28				
3665	238	2	242	1	240	27275,60+	T	q		Ib
3664	890	0	911	0		27278,21				II
3664	585	0	600	00a	592	27280,43+				
3664	115	5	132	3	123	27283,92+	MB	0		Ib
3663	501	0				27288,55				
3663	046	5	055	1a	050	27292,24+	T	p		I
3662	731	1	698	0		27294,53	T	q		
3662	—		480	0a		27296,15				
3658	651	1	664	0a	657	27324,68+	T	r		I
3658	283	0				27327,47				
3657	940	2				27330,03	D	r		I
3657	496	0				27333,35				
3656	519	0				27340,65	D	rd		
3655	649	3	673	0		27347,16	T	p		I
3654	912	0				27352,68				
3653	738	0				27361,46	D	rd		
3652	456	4	460	2	458	27371,05+	MB	1		I
3651	176	0				27380,66				
3650	770	0				27383,71				
3650	084	2				27388,86	T	q		I
3648	339	0				27401,95	T	r		
3646	830	3	830	0	830	27413,29+	T	q		I
3640	821	0				27458,54				
3640	095	0				27464,01				
3639	517	1				27468,37				I
3638	970	0				27472,50				
3636	961	0/1	017	1		27487,67	T	r		III
3635	600	00				27497,97				
3635	096	2	094	1a	095	27501,79+	D	r		I
3633	940	00				27510,53				
3633	316	3	328	1	324	27515,19+	MB	0		I
3632	660	3	681	1		27520,22				I
3627	281	0/1				27561,03	D	r		
3626	515	0/1				27566,85				
3624	675	00				27580,85				
3622	958	0				27593,92	D	r		
3622	498	0				27597,42				
3622	—		161	1a		27599,99	T	r		III
3621	208	00				27607,25	D	rd		

Finkelnburg			Gale, Monk u. Lee		Mittelwert	Wellenzahl ν im Vakuum	Ältere Beobachtungen		Bemerkungen	Klasse
λ	in Å.-E.	Int.	λ	Int.	λ		Name	Int.		
3620	038	2	052	1	045	27616,12+	MB	0		I
3618	—		729	1		27626,15	MB	0		IIIa
3618	140	0				27630,66	T	r		
3617	363	2				27636,60	T	—		I
3616	—		401	1		27643,95	MB	0		III
3616	333	2	325	1	329	27644,50+			d	II
3615	207	0				27653,08	D	rd		
3614	175	00				27660,98	D	rd		
3613	222	0/1				27668,27				
3612	874	3	897	1		27670,93	MB	0		I
3612	520	0				27673,64				
3611	738	0				27679,63				
3611	044	00				27684,95	D	q		
3607	014	0				27715,89				
3599	908	2				27770,59				I
3594	112	00				27815,38				
3593	—		542	1		27819,78	MB	0		IIIa
3593	—		378	0		27821,09				III
3560	020	1				28081,74				I
3552	829	0				28138,58				
3534	472	0				28284,72				
3531	832	0				28305,86	D	rd		
3497	580	0				28583,05				
3396	207	2				29436,20	MB	0	d	Ia
3395	163	3	159	1	161	29447,27+	MB	1		Ia
3394	835	3	838	2	836	29448,08+				I
3368	386	1				29679,31	MB	0		I
3349	571	1				29846,02				I
3315	301	1				30154,53	T	q		I
3314	840	0/1				30158,72				

Zum Schluß möchte ich nicht verfehlen, auch an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. H. Konen für Anregung und dauernde Unterstützung dieser Arbeit, sowie Herrn Prof. Dr. J. Hopmann und Herrn Privatdozenten Dr. R. Mecke für so manchen Rat bei der Durchführung aufs herzlichste zu danken.

Literaturverzeichnis.

(Nur soweit im Text benutzt.)

1. H. S. Allen, The band-spectrum of hydrogen. Proc. Roy. Soc. London (A) **106**, 69, 1924.

2. H. S. Allen and J. Sandemann, Bands in the secondary spectrum of hydrogen I. Proc. Roy. Soc. (A) **114**, 293, 1927.

3. H. S. Allen and J. Sandemann, Bands in the secondary spectrum of hydrogen II. Proc. Roy. Soc. (A) **116**, 312, 1927.

4. J. S. Ames (Wellenlängenmessungen). Phil. Mag. **30**, 33, 1890.

5. S. Barratt, The influence of foreign gases on the secondary spectrum of hydrogen. Phil. Mag. (6) **46**, 627, 1923.

6. K. Basu, Grouping of the lines of the secondary spectrum of hydrogen. Phil. Mag. (6) **46**, 417, 1923.

7. Z. Bay und W. Steiner, Das kontinuierliche Wasserstoffspektrum als Lichtquelle für Absorptionsversuche im Ultraviolett. ZS. f. Phys. **45**, 337, 1927.

8. R. T. Birge, The quantum levels and resulting constants of the hydrogen molecule. Proc. Nat. Acad. Amer. **14**, 12, 1928.

9. P. M. S. Blackett und J. Franck, Anregung von Spektren des Wasserstoffs durch Elektronenstoß. ZS. f. Phys. **34**, 389, 1925.

10. C. J. Brasefield, H_3 as a possible emitter of the secondary hydrogen spectrum. Phys. Rev. (2) **29**, 915, 1927.

11. C. R. Bury, On the Fulcher lines in the hydrogen spectrum. Phil. Mag. (6) **50**, 1139, 1927.

12. L. Citron, Über das Verhalten des Viellinienspektrums des Wasserstoffs bei tiefen Temperaturen. Ann. d. Phys. (4) **73**, 470, 1924.

13. M. F. Croze, Sur le second spectre de l'hydrogène dans l'extrême rouge. C. R. **152**, 1574, 1911.

14. M. F. Croze, Recherches expérimentales sur les spectres d'émission des gaz usuels. Ann. de phys. **1**, 35, 1919.

15. E. Curtis, The Fulcher hydrogen bands. Proc. Roy. Soc. **107**, 570, 1925.

16. E. Curtis, New series in the secondary hydrogen spectrum. Phil. Mag. (7) **1**, 695, 1926.

17. D. B. Deodhar, Supplementary table of wave-lengths of new lines in the secondary spectrum of hydrogen. Proc. Roy. Soc. (A) **113**, 420, 1926.

18. G. H. Dieke, Banden in het veellijnenspectrum van waterstof. Versl. Amsterdam **23**, 390, 1924.

19. G. H. Dieke, Bemerkungen über die Intensitäten im Viellinienspektrum des Wasserstoffs. ZS. f. Phys. **32**, 180, 1925.

20. G. H. Dieke, Bands in the secondary spectrum of hydrogen. Proc. Amsterdam **27**, 490, 1925.

21. G. H. Dieke, Some remarks on the Fulcher hydrogen bands. Phil. Mag. (6) **50**, 173, 1925.

22. O. S. Duffendack, The secondary spectrum of hydrogen. Phys. Rev. (2) **23**, 107, 1924.

23. O. S. Duffendack, The excitation of the secondary spectrum of hydrogen by electron impacts. Astrophys. Journ. **60**, 122, 1924.

24. Duffieux, Sur la masse des particles qui émettent le spectre second de l'hydrogène. C. R. **176**, 1876, 1923.

25. Dufour (Zeemaneffektuntersuchungen). Ann. chim. phys. **9**, 361, 1906.

26. Dufour (Zeemaneffektuntersuchungen II). Journ. de phys. (4) **8**, 258, 1909.

27. E. B. Frost (Einfluß fremder Gase). Astrophys. Journ. **116**, 100, 1902.

28. G. S. Fulcher, The production of light by cathode rays I. Astrophys. Journ. **34**, 388, 1911.

29. G. S. Fulcher, The production of light by cathode rays II. Astrophys. Journ. **37**, 60, 1913.

30. G. S. Fulcher, Band lines in the secondary spectrum of hydrogen. Phys. Rev. (2) **21**, 375, 1923.

31. H. G. Gale, Monk and K. O. Lee, Wave-lengths in the secondary spectrum of hydrogen. Astrophys. Journ. **57**, 89, 1928.

32. E. Gehrcke und E. Lau, Über das Viellinienspektrum des Wasserstoffs. Berl. Ber. 1922, S. 453.

33. E. Gehrcke und E. Lau, Das Viellinienspektrum des Wasserstoffs II. Mitteilung. Berl. Ber. 1923, S. 242.

34. K. Glitscher, Über die Intensitätsverteilung im Viellinienspektrum des Wasserstoffs. Sitzungsber. d. Münch. Akad. 1916, S. 125.

35. F. Goos, Intensitätsmessungen von Linien des Viellinienspektrums des Wasserstoffs bei verschiedener Temperatur und verschiedener Dichte. ZS. f. Phys. **31**, 229, 1925.

36. B. Hasselberg (Erste Wellenlängenmessungen). Mem. Akad. St. Petersburg (7) **30**, Nr. 7, 1882.

37. B. Hasselberg (Wellenlängenmessungen). Phil. Mag. (5) **17**, 329, 1882.

38. B. Hasselberg (Wellenlängenmessungen). Mem. Akad. St. Petersburg (7) **31**, Nr. 14, 1883.

39. K. L. Hertel, The effect of an electric field on a radiating hydrogen molecule. Phys. Rev. (2) **29**, 270, 1927.

40. G. Herzberg, Untersuchungen über die Erscheinungen bei der elektrodenlosen Ringentladung im Wasserstoff. Ann. d. Phys. **84**, 553, 1927.

41. G. Herzberg, Über die Spektren des Wasserstoffs. Ann. d. Phys. **84**, 565, 1927.

42. A. L. L. Hughes and P. Lowe, Intensities in the hydrogen spectrum. Phys. Rev. (2) **21**, 292, 1923.

43. M. C. Johnson, Doppler effects and intensities of lines in the molecular spectrum of hydrogen positive rays. Proc. Roy. Soc. (A) **114**, 697, 1927.

44. W. Jungjohann, Über Emission und Absorption leuchtender Gase bei hohen Stromdichten unter Verwendung von Gleichstrom. ZS. f. wiss. Photogr. **9**, 84 und 105, 1910.

45. W. v. Keussler, Über die Art der Anregung der Atom- und Molekülspektren von Wasserstoff durch Elektronenstoß. ZS. f. Phys. **14**, 19, 1923.

46. M. Kimura and M. Fukuda, Influences of the presence of gases or vapours upon the intensities of the lines of the secondary spectrum of hydrogen. Mem. Kyoto **5**, 153, 1921.

47. M. Kimura and G. Nakamura, The secondary spectrum of hydrogen under various excitations. Jap. Journ. of Phys. **1**, 85, 1923.

48. M. Kiuti, The Stark-effect on the secondary spectrum of hydrogen. Jap. Journ. of Phys. **1**, 29, 1922.

49. M. Kiuti, The structure of the band spectrum of hydrogen. Nagaoka-Festschrift, S. 193, Tokio 1925.

50. E. Lau, Anregungsmaxima einiger Spektrallinien in den Schichten der positiven Säule des Wasserstoffs. Ann. d. Phys. (4) **77**, 183, 1925.

51. McLennan and G. M. Shrum, The secondary spectrum of hydrogen at very low temperatures. Proc. Trans. Roy. Soc. Canada (3) **18**, 177, 1924.

52. McLennan, H. G. Smith and C. A. Lea, The band spectra of helium and hydrogen at low temperature. Proc. Roy. Soc. (A) **113**, 183, 1926.

53. McLennan, H. G. Smith and W. T. Collins, Intensities in the secondary spectrum of hydrogen at various temperature. Proc. Roy. Soc. (A) **116**, 277, 1927.

54. R. Mecke, Bandenspektra. Phys. ZS. **26**, 217, 1925.

55. R. Mecke und M. Guillery, Bandenspektra II. Phys. ZS. **28**, 479 und 514, 1927.

56. A. C. Menzies, The secondary spectrum of hydrogen. Nature **110**, 952, 1922.

57. T. R. Merton, The secondary spectrum of hydrogen. Nature **104**, 406, 1919.

58. T. R. Merton, On the secondary spectrum of hydrogen. Proc. Roy. Soc. (A) **96**, 382, 1920.

59. T. R. Merton and S. Barrat, On the spectrum of hydrogen. Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) **222**, 369, 1922.

60. J. W. Nicholson, On the secondary spectrum of hydrogen. Nature **105**, 166, 1920.

61. J. W. Nicholson, The secondary spectrum of hydrogen. Month. Not. **85**, 449, 1925.

62. J. W. Nicholson, A hydrogen spectrum of constant frequency-difference. Month. Not. **85**, 656, 1925.

63. K. F. Niessen, Über die Ionisierungsspannung und das Viellinienspektrum von Wasserstoff. ZS. f. Phys. **43**, 694, 1927.

64. Sh. Nitta, The effect of an electric field on the spectrum lines of hydrogen. Kyoto Mem. **2**, 349, 1917.

65. A. R. Olson and G. Glockner, Critical potentials and dissociation of H_2. Proc. Nat. Acad. Amer. **9**, 122, 1923.

66. A. H. Poetker, The infrared radiation of hydrogen. Phys. Rev. (2) **30**, 418, 1927.

67. Porlezza e Norzi, Contributo alla conoscenza del secondo spettrodel'idrogeno. Linc. Rend. (5) **20** [I], 819, 1911.

68. Porlezza, Contributo usw. Linc. Rend. (5) **20** [II], 176, 1911.

69. O. W. Richardson and T. Tanaka, On a *P*-, *Q*- and *R*-combination in the many lined spectrum of hydrogen. Proc. Roy. Soc. (A) **106**, 640, 1924.

70. O. W. Richardson and T. Tanaka, Regularities in the secondary spectrum of hydrogen. Proc. Roy. Soc. (A) **107**, 602, 1925.

71. O. W. Richardson, Structure in the secondary spectrum of hydrogen I. Proc. Roy. Soc. **108**, 553, 1925.

72. O. W. Richardson, Structure usw. II. Proc. Roy. Soc. **109**, 35, 1925.

73. O. W. Richardson, Structure usw. III. Proc. Roy. Soc. **109**, 239, 1925.

74. O. W. Richardson, Structure usw. IV. Proc. Roy. Soc. **111**, 714, 1926.

75. O. W. Richardson, Structure usw. V. Proc. Roy. Soc. **113**, 368, 1926.

76. O. W. Richardson, The socondary hydrogen spectrum. Nature **118**, 116, 1926.

77. O. W. Richardson, Structure usw. VI. Proc. Roy. Soc. **114**, 643, 1927.

78. O. W. Richardson, The hydrogen band spectrum: new band systems in the violet. Proc. Roy. Soc. (A) **115**, 528, 1927.

79. O. W. Richardson, On the intensity distribution among the lines of certain bands in the spectrum hydrogen molecule. Proc. Roy. Soc. **116**, 484, 1927.

80. J. Sandemann, The secondary spectrum of hydrogen at higher pressures. Proc. Roy. Soc. **108**, 607, 1925.

81. J. Sandemann, The secondary spectrum of hydrogen at higher pressures II. Proc. Roy. Soc. **110**, 326, 1926.

82. K. Schüler und L. Wolf, Über Dispersionskonstanten und kritische Elektronengeschwindigkeiten des molekularen Wasserstoffs. ZS. f. Phys. **34**, 343, 1925.

83. J. Schwedes, Über Intensitätsmessungen im Spektrum strömender Gase. ZS. f. wiss. Photogr. **11**, 169, 1913.

84. H. D. Smith and C. J. Brasefield, The secondary spectrum of hydrogen and the occurence of H_3^+. Proc. Nat. Acad. Amer. **12**, 443, 1926.

85. L. A. Sommer, Absorption experiments in excited molecular hydrogen. Nature **120**, 841, 1927.

86. H. Stanley and H. S. Allen, The band spectrum of hydrogen. Proc. Roy. Soc. **106**, 69, 1924.

87. H. Stanley and J. Sandemann, Bands in the secondary spectrum of hydrogen. Proc. Roy. Soc. (A) **114**, 293, 1927.

88. H. Stanley, H. S. Allen and J. Sandemann, Bands in the secondary spectrum of hydrogen II. Proc. Roy. Soc. **116**, 312, 1927.

89. T. Takamine and U. Yoshida, The effect of an electric field in the spectrum lines of hydrogen. Mem. Coll. Kyoto **2**, 321, 1917.

90. T. Takamine and N. Kokubu, The effect of an electric field in the spectrum lines of hydrogen II. Mem. Coll. **3**, 271, 1919.

91. T. Tanaka, Wave-lengths of additional lines in the many-lined spectrum of hydrogen. Proc. Roy. Soc. **108**, 592, 1925.

92. W. M. Venable, A classification of the lines of the secondary spectrum of hydrogen. Journ. Opt. Soc. Amer. **12**, 487, 1926.

93. H. E. Watson, (Wellenlängenmessungen). Proc. Roy. Soc. **82**, 189, 1909.

94. M. Weth, Über die Anregung des kontinuierlichen, Serien- und Bandenspektrums des Wasserstoffs durch langsame Kanal- und Kathoden-Strahlen des positiven Spitzenstroms. Ann. d. Phys. (4) **62**, 589, 1920.

95. E. Witmer, Critical potentials and the heat of dissociation of hydrogen as determined from its ultra-violet band-spectrum. Proc. Nat. Acad. Amer. **12**, 238, 1926.

96. R. W. Wood, An extension of the Balmer series of hydrogen and spectroscopic phenomena of very long vacuum tubes. Proc. Roy. Soc. **97**, 455, 1920.

97. R. W. Wood, Hydrogen spectra from long vacuum tubes. Phil. Mag. (6) **42**, 729, 1921.

98. R. W. Wood, Hydrogen spectra usw. II. Phil. Mag. (6) **46**, 605, 1923.

Bonn, Physikalisches Institut der Universität, September 1928.

Über die theoretischen Grundlagen der Flimmerphotometrie.

Erste Mitteilung.

Die Gesetze der Flimmerphotometrie beim Dunkelsehen.

Von **P. Lasareff** in Moskau.

(Eingegangen am 13. September 1928.)

In der vorliegenden Arbeit wurden die allgemeinen Gleichungen der Photochemie der Netzhaut beim Dunkelsehen für die konstante und periodische Beleuchtung entwickelt. — Ferner wurde angenommen, daß zwei Lichtquellen gleiche Empfindungen geben, wenn die materiellen Änderungen in der Netzhaut identisch sind. Aus dieser Annahme wurden die Bedingungen der Identität der Empfindungen beim konstanten und bei der periodischen Beleuchtung gefunden. Diese Hypothesen gestatten, das Talbotsche Gesetz abzuleiten und zu zeigen, daß zwei verschiedenfarbige Lichtquellen, die nacheinander periodisch auf dieselbe Stelle der Netzhaut wirken, dann eine kontinuierliche Empfindung auslösen, wenn diese beiden Lichtquellen bei ein und derselben Frequenz von Licht- und Dunkelheitwechsel eine kontinuierliche Empfindung geben. — Endlich wurde gezeigt, daß der Flimmer- und Peripheriewert für das Peripheriesehen eine identische Größe ist.

In der vorliegenden Arbeit beabsichtige ich, die von mir entwickelte Ionentheorie des Sehens* auf die Erscheinung der Flimmerphotometrie anzuwenden und deren quantitative Gesetze beim Dunkelsehen festzustellen.

I. Allgemeine Theorie der photochemischen Prozesse in der Netzhaut während des Dunkelsehens.

Im weiteren werden wir voraussetzen, daß bei jeder Gesichtsempfindung in den lichtempfindlichen Stoffen der Netzhaut eine photochemische Reaktion entsteht, und daß die Produkte dieser Reaktion auf die Endorgane der Sehnerven reizend wirken können. Diese Vorstellung über das Wesen der Gesichtsreizungen wurde zum erstenmal von I. Müller ausgesprochen**.

Beim Dunkelsehen ist dieser chemische Prozeß mit der lichtempfindlichen Substanz der Stäbchen — mit dem Sehpurpur — verbunden, und wie Trendelenburg*** gezeigt hat, muß die Zeit t, während welcher

---

* P. Lasareff, Pflügers Archiv **154**, 459, 1913; **155**, 310, 1910; Recherches sur la théorie ionique de l'excitation, S. 81—120, Moscou 1926; Ionentheorie der Reizung, S. 13—21, Bern und Leipzig 1923; Théorie ionique de l'excitation des tissus vivants, S. 74—111, Paris 1928.

** I. Müller, Handbuch der Physiologie des Menschen, S. 55, Coblenz 1837.

*** W. Trendelenburg, ZS. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorg. **37**, 1, 1904.

die prozentuale Zersetzung der Substanz dieselbe bleibt, die Absorptionskonstante des Purpurs k und die Intensität des wirkenden Lichtes J durch die Formel

$$Jkt = A = \text{Konst} \tag{1}$$

verbunden sein.

Die Formel kann aus der Annahme abgeleitet werden, daß die Geschwindigkeit des Ausbleichens der absorbierten Energie proportional * ist. Diese Tatsache können wir, indem wir C die Konzentration des Sehpurpurs nennen, folgendermaßen schreiben: $-\frac{dC}{dt} = \alpha k J C$. kJC muß bei kleinen C der absorbierten Energie gleich sein, α bedeutet die Reaktionskonstante; daraus erhalten wir

$$\lg \frac{C}{C_0} = -\alpha k J t. \tag{2}$$

Wenn kJt konstant ist, muß auch C/C_0 konstant sein. Daraus bekommen wir die von Trendelenburg gefundene Beziehung.

Die Kinetik des Purpurausbleichens ist mit derjenigen identisch, die ich für das Ausbleichen von Farbstoffen gefunden habe **.

Während der Bestrahlung des Purpurs im Auge existiert ein Restitutionsprozeß, dessen Geschwindigkeit v_2 der Konzentration der Produkte der photochemischen Reaktion direkt proportional ist, $v_2 = \alpha_2 C_1'$ (α_2 ist eine Konstante, C_1' die Konzentration der Produkte). Die allgemeine Gleichung der Kinetik der Sehpurpurzersetzung in der Netzhaut ist deshalb:

$$-\frac{dC}{dt} = \frac{dC_1'}{dt} = \alpha_1 k J C - \alpha_2 C_1'. \tag{3}$$

In dieser Gleichung kann J entweder konstant oder eine beliebige Funktion der Zeit sein.

Aus der Gleichung (3) kann man direkt eine einfache Beziehung für den stationären Zustand der Netzhaut finden. In diesem Falle muß, da der Zustand von der Zeit unabhängig ist, $\frac{dC}{dt} = 0$ oder

$$C_1' = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} k J C \tag{4}$$

sein.

---

* Vgl. P. Lasareff, Das Ausbleichen von Farbstoffen im sichtbaren Spektrum. Ein Versuch, die Grundgesetze der chemischen Wirkung des Lichtes zu erforschen. S. 40. Moskau 1911 (russisch).

** P. Lasareff, Ann. d. Phys. **24**, 663, 1908.

Im folgenden wollen wir noch einen anderen Prozeß betrachten, nämlich den Prozeß der periodischen Beleuchtung der Netzhaut, bei dem $J = J_0(1 - \sin nt)$ ist. n ist die Frequenz, wobei wir voraussetzen werden, daß wir nur einen schwelligen Prozeß der Verschmelzung untersuchen, bei dem die Variationen von C_1' für unser Auge nicht bemerkbar und demzufolge die Variationen von C sehr gering sind. Daraus folgt unmittelbar, daß C als eine Konstante betrachtet werden kann, die nur sehr langsam mit der Zeit, während der Adaptation, sich ändert.

Das Integral der Gleichung (3), wo $J = J_0(1 - \sin nt)$ ist, hat eine Form

$$C_1' = Le^{-\alpha_2 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} kJ_0C - \frac{\alpha_1 kJ_0C}{\sqrt{n^2 + \alpha_2^2}} \sin(nt - \varphi),$$

L ist eine Konstante und $\frac{n}{\alpha_2} = \operatorname{tg}\varphi$. Im stationären Zustand muß $Le^{-\alpha_2 t} = 0$ und

$$C_1' = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} kJ_0C - \frac{\alpha_1 kJ_0C}{\sqrt{n^2 + \alpha_2^2}} \sin(nt - \varphi) \qquad (5)$$

sein. Die Amplitude der Variation der Konzentration der Produkte ist gleich:

$$A_0 = \frac{\alpha_1 kJ_0C}{\sqrt{n^2 + \alpha_2^2}}. \qquad (6)$$

Die konstante Intensität des fallenden Lichtes $2J_0$ muß im untersuchten Falle periodisch bis $J = 0$ mit dem Sektor geändert werden, wobei, wie wir angenommen haben, die momentane Intensität $J = J_0(1 - \sin nt)$ ist.

Die Größe C ändert sich durch die restituierende Wirkung der Zellen in der Dunkelheit, wobei die Restitution nach der Gleichung $C = C_0(1 - \gamma e^{-\alpha_3 t})$ vor sich geht; γ ist eine Konstante, die von der Intensität der Vorbelichtung abhängt, und α_3 eine Konstante, die die restituierende Wirkung der Zellen charakterisiert*.

II. Die Bedingungen der schwelligen Empfindung.

Um die materiellen Prozesse in der Netzhaut mit den Empfindungen verbinden zu können, muß man folgende Hypothese machen, die als eine fundamentale Basis der physiko-chemischen Theorie der Erregung betrachtet werden kann; gleiche materielle Änderungen in einem Teile des

* P. Lasareff, Recherches, S. 106; Journ. f. Psychologie und Neurologie 32, 232, 1926.

Organismus rufen unter allen anderen konstanten Bedingungen identische Empfindungen hervor. Wenn bei einer Lichtreizung die Ionen, die auf die Netzhaut reizend wirken und die ionisierten Produkte der photochemischen Reaktion in der Netzhaut darstellen, eine gewisse Konzentration B erreichen, so erhalten wir demzufolge die Empfindung einer bestimmten Intensität des Lichtes. Dieselbe Empfindung erhalten wir auch bei der elektrischen Reizung, wenn die Ionenkonzentration in der Netzhaut die gleiche Größe B erreicht. Da wir annehmen können, daß beim Schwellenwert der Reizung die Konzentration der Produkte C_1' einen Wert A haben muß, so erhalten wir für schwellige Reize bei konstanter Beleuchtung die Bedingung [Formel (4)]

$$C_1' = A = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} k J C. \tag{7}$$

Wenn wir eine überschwellige Empfindung haben, so muß C_1' gleich A_1, A_2 usw. sein. Die Größen A_1, A_2 stellen die Konzentrationen dar, die diesen verschiedenen Empfindungen entsprechen. Daraus können wir schließen, daß, wenn die auffallende Energie einer bestimmten Wellenlänge in einer gewissen Menge absorbiert ist und eine schwellige Empfindung hervorruft, alle anderen Strahlen des Spektrums auch erregend wirken müssen, wenn kJC einen konstanten Wert hat.

Da α_1 nicht von der Wellenlänge abhängig ist*, so können wir sagen, daß bei gleicher Absorption im Sehpurpur die Strahlen eine identische Empfindung hervorrufen.

Um die Wechselzahl der Intermittenzen bei periodischer Belichtung des Auges zu finden, die eine kontinuierliche Empfindung hervorruft, muß man aus der Formel (5) oder (6) die Amplidude der Lichtintensität suchen, die bei der periodischen Belichtung eine kontinuierliche Empfindung hervorruft. Theoretisch ist diese Frage bis jetzt nicht gelöst, und wir können nur sagen, daß diese Schwellenamplitude von der Frequenz n abhängen muß; daraus können wir schließen, daß

$$\left.\begin{aligned} A_0 = \varphi(n) &= \frac{\alpha_1 k J_0 C}{\sqrt{n^2 + \alpha_2^2}} \\ \text{oder} \\ \varphi(n)\sqrt{n^2 + \alpha_2^2} &= \alpha_1 k J_0 C. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

* Nach dem Einsteinschen Gesetz muß α_1 der Wellenlänge proportional sein. Aber für den gesamten Prozeß des Ausbleichens kann man die Proportionalität der Geschwindigkeit des Ausbleichens und der absorbierten Energiemenge als experimentelle Tatsache annehmen. Der Elementarprozeß muß auch in diesem Falle nach dem Einsteinschen Gesetz verlaufen.

Über die Form von $\varphi(n)$ kann man verschiedene Hypothesen anstellen, und in meinen früheren Arbeiten* habe ich nachgewiesen, daß die mit dem Experiment übereinstimmenden Formen entweder: $\varphi(n) = \frac{Re^{pn}}{\sqrt{n^2 + \alpha_2^2}}$ [R und p die Konstanten] (Form A), oder $\varphi(n) = Re^{pn}$ (Form B).

Die Annahme (A) führt unmittelbar zu den von Ives und Allen empirisch gefundenen Formeln, die n und J_0 verbinden.

Ein wenig bessere Resultate erhält man, wenn man die Form (B) wählt.

III. Die allgemeinen Gesetze der Flimmerphotometrie.

1. Das Talbotsche Gesetz. Wie zuerst Talbot und dann sehr genau Helmholtz experimentell nachgewiesen haben, empfindet das Auge die kontinuierliche Beleuchtung und die periodische Bestrahlung bei genügend rascher Lichtunterbrechung als identisch, wenn die Energiemengen, die dem Auge zugeführt sind, während einer Periode des Lichtwechsels in beiden Fällen gleich sind.

Dies Gesetz, das viele praktische Anwendungen in der Photometrie gefunden hat, kann aus der von uns entwickelten Theorie für Peripheriesehen abgeleitet werden.

Wie wir erkannt haben, ist die Konzentration der ionisierten Produkte der photochemischen Reaktion bei periodischer Belichtung des Auges durch die Formel

$$C_1' = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} k J_0 C - \frac{\alpha_1 k J_0 C}{\sqrt{n^2 + \alpha_2^2}} \cdot \sin(nt - \varphi)$$

gegeben. $2J_0$ in dieser Formel stellt eine konstante Intensität der Lichtquelle dar, die sich mit dem Sektor nach dem Gesetz $J = J_0(1 - \sin nt)$ ändert; diese periodische Intensität wirkt auf das Auge.

Ist die Periode der Variation der Intensität des Lichtes sehr gering und damit n sehr groß, so kann das periodische Glied in obiger Formel sehr klein gemacht werden, und man erhält, daß die Konzentration C_1' bei periodischer Belichtung mit der Intensität $J = J_0(1 - \sin nt)$

$$C_1' = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} k J_0 C \tag{9}$$

sein muß.

---

* P. Lasareff, Phil. Mag. **2**, 1170, 1926; Pflügers Archiv **214**, 439, 1926; Théorie ionique, S. 101.

Dieselbe Konzentration erhalten wir, wenn wir das Auge mit dem Lichte der konstanten Intensität J_0 beleuchten. Die während der Periode $T = \frac{1}{N} = \frac{2\pi}{n}$ auffallende Energiemenge ist in diesen beiden Fällen gleich $J_0 T$. Das Talbotsche Gesetz ist somit theoretisch nachgewiesen. Die experimentellen Untersuchungen, die beim Dunkelsehen von mir vorgenommen wurden, bestätigen innerhalb 0,5 % die Richtigkeit dieses Gesetzes *.

2. Über die Messung der Intensität der verschiedenfarbigen Lichtquellen beim peripheren Sehen. Wie bekannt ist, erhalten wir beim Peripheriesehen keine Empfindung der Farbe, und verschiedenfarbige Beleuchtungen unterscheiden sich nur durch die Intensität. Wenn eine bestimmte Stelle der Netzhaut abwechselnd von zwei verschiedenfarbigen Lichtquellen beleuchtet wird, so erhält man eine kontinuierliche Empfindung, wenn die Konzentration der ionisierten Produkte an dieser Stelle der Netzhaut während der Änderung der Belichtung die gleiche bleibt.

Die Bedingung der Identität der Empfindung kann einfach aus der Formel (4) erhalten werden. Wenn zwei verschiedenfarbige Beleuchtungen die Intensitäten $2J_0'$ und $2J_0''$ haben, so rufen sie die gleiche Konzentration C_1', C_2' hervor, wenn

$$C_1' = C_2' = \frac{2\alpha_1}{\alpha_2} k_1 J_0' C = \frac{2\alpha_1}{\alpha_2} k_2 J_0'' C,$$

wo k_1 und k_2 die entsprechenden Absorptionskonstanten sind.

Daraus ersieht man, daß zwei Lichtquellen nach der Substitution identische Empfindungen hervorrufen und eine gleiche subjektive Intensität haben, wenn

$$k_1 J_0' = k_2 J_0'' \tag{10}$$

ist.

Wir können auch die Bedingung für die Verschmelzung der Empfindung bei periodischer Verdunkelung mit dem Sektor für verschiedenfarbige Lichtquellen finden. Wir nehmen an, daß die Intensitätsänderung nach dem Gesetz $J = J_0(1 - \sin nt)$ vor sich geht und demzufolge sich die Intensität $2J_0$ der konstanten Lichtquelle mit dem Sektor nach dem Sinusgesetz mit der Frequenz n ändert.

Aus der Formel (8) geht direkt hervor, daß die Verschmelzung der Empfindungen nur dann entsteht, wenn die Bedingung

$$\varphi(n)\sqrt{n^2 + \alpha_2^2} = \alpha_1 k J_0 C$$

erfüllt ist.

* P. Lasareff, Recherches, S. 95 und 104.

Daraus erhalten wir, daß bei der Verschmelzung der Empfindungen bei der Belichtung mit zwei verschiedenfarbigen Lichtquellen und bei n = Konst die Bedingung

$$\varphi(n)\sqrt{n^2+\alpha_2^2} = \alpha_1 k_1 J_0' C = \alpha_1 k_2 J_0'' C = \text{Konst}$$

sein muß, oder $k_1 J_0' = k_2 J_0''$.

Wir sehen somit, daß die verschiedenfarbigen Lichtquellen nur dann eine flimmeräquivalente Beleuchtung einer Fläche geben, wenn diese Quellen bei ein und derselben Frequenz der Unterbrechung mit dem Sektor eine kontinuierliche Empfindung hervorrufen.

Dies Gesetz wurde von vielen Forschern für das zentrale Sehen empirisch nachgewiesen*.

3. Flimmeräquivalente Beleuchtung und Peripheriewerte. Zum Schluß muß man bemerken, daß wir die monochromatische Belichtung der Netzhaut mit konstantem Lichte, dessen Intensität $2J_0'$ ist (Licht A), mit der Intensität von homogenem Lichte von bestimmter und konstanter Wellenlänge (Licht B) vergleichen können, dessen Intensität $2J_0$ ist.

In diesem Falle muß bei identischen Empfindungen

$$C_1' = C_1'' = \frac{2\alpha_1}{\alpha_2} k_1 J_0' C = \frac{2\alpha_1}{\alpha_2} k_0 J_0 C$$

sein. k_0 ist eine Absorptionskonstante für das Licht (B)**, $2J_0$-Peripheriewert vom Licht (A) ist. Wenn zwei Lichtquellen identischen Peripheriewert haben (die entsprechenden Intensitäten sind $2J_0'$ und $2J_0''$), so müssen die Peripheriewerte gleich sein. Daraus erhält man

$$J_0 = \frac{k_1 J_0'}{k_0} = \frac{k_2 J_0''}{k_0}$$

oder

$$k_1 J_0' = k_2 J_0''.$$

Wir können also schließen, daß die Strahlen mit gleichem Peripheriewert Flimmeräquivalente sind.

Moskau, Institut für Physik und Biophysik.

---

* Vgl. O. Polimanti, Über die sogenannte Flimmerphotometrie, Abhandlungen zur Physiologie der Gesichtsempfindung, herausgegeben von J. v. Kries, Heft 2, S. 83, Leipzig 1902.

** P. Lasareff, Recherches, S. 97.

Die Funkenspannung bei Drucken $p < 760$ mm Hg und das Minimumpotential, unter Berücksichtigung der Elektrodenfunktion dargestellt.

Von **Fr. Klingelfuss** in Basel.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 24. September 1928.)

Unter gewissen Bedingungen, die sich aus der Elektrodenfunktion bei Gasentladungen ergeben, läßt sich in Verbindung mit der Einsteinschen Energiegleichung das Funkenpotential auch für konstante Schlagweite und abnehmenden Druck in Übereinstimmung mit der Erfahrung darstellen. Das Minimumpotential für Luft ergibt sich dann unabhängig vom Elektrodenabstand bei einer bestimmten Wellenlänge und gleich der elektrostatischen C G S-Einheit des Potentials.

In einer früheren Mitteilung* wurde gezeigt, daß sich durch die Einführung einer Elektrodenfunktion $Q = k + n\,D - V_d$ das Funkenpotential bei Atmosphärendruck, d. h. bei konstantem Druck und veränderlichem Elektrodenabstand, als Funktion $V_s = f(\delta, D)$ in den weitesten Grenzen innerhalb der Beobachtungsfehler in Übereinstimmung mit dem Experiment darstellen läßt. Es soll nun gezeigt werden, daß es auch gelingt, unter Berücksichtigung der sich aus der Elektrodenfunktion ergebenden Bedingungen die Funkenspannung bei konstantem Elektrodenabstand und veränderlichem Druck für Drucke $p < 760$ mm Hg als Funktion $V_v = \varphi(p, \delta_{ü})$ darzustellen. Mit $\delta_{ü} = r\,D + \delta_0$ bezeichnen wir den charakteristischen Elektrodenabstand (Schlagweite) bei der Spannung $V_{ü} = m\,D + V_{ü\,0}$. Hierin bedeuten r und m Konstanten, D ist der Durchmesser kugelförmiger Elektroden. Für $D = 0$, d. h. für eine Spitzenelektrode, wird $\delta_{ü} = \delta_0$ und $V_{ü} = V_{ü\,0}$. Für einen Vergleich der Rechnung mit dem Experiment fehlt für die Funktion $\varphi(p, \delta_{ü})$ das umfangreiche Versuchsmaterial, wie es für die Funktion $f(\delta, D)$ vorliegt so daß nach Auffassung des Autors die vorliegende Mitteilung mehr den Zweck haben soll, den Atomphysiker auf Möglichkeiten aufmerksam zu machen, die sich durch die Heranziehung der Elektrodenfunktion in die Darstellung der Vorgänge bei Gasentladungen zwanglos ergeben.

In der Gleichung für das Funkenpotential bei Atmosphärendruck:

$$V_s = k \cdot \left(\frac{\delta}{10} + 1\right) + n\,D - V_d,$$

wo

$$V_d = \sqrt{k} \cdot e^{\ln \sqrt{k}\left(1 - \frac{\delta}{\delta_{ü}}\right)} \cdot \frac{\delta_{ü} - \delta}{\delta_0}$$

* Fr. Klingelfuss, Ann. d. Phys. **82**, 275, 1927 und **83**, 565, 1927.

bedeutet, wird bei der Schlagweite $\delta = \delta_{ü}$ das Glied $V_d = 0$, und man kann dann schreiben

$$k\left(\frac{\delta'_{ü}}{10} + 1\right) + n D' = V_{ü} = m D' + V_{ü\,0},$$

worin $\delta'_{ü} = r D' + \delta_0$ bedeutet. Indem man $V'_{ü} - V_{ü\,0} = V_{ü}$ und $\delta'_{ü} - \delta_0 = \delta_{ü}$ setzt und $V_{ü}$ durch $\delta_{ü}$ dividiert, erhält man für die charakteristische Schlagweite $\delta_{ü}$ die lineare Gleichung

$$V_{ü} = \frac{m}{r}\,\delta_{ü}.$$

Hierin bedeutet m/r eine für $V_{ü}/\delta_{ü}$ charakteristische, konstante Feldstärke, die wir mit $\mathfrak{E}_{ü} = 1387{,}5$ Volt/mm bezeichnen. Wir können daher schreiben

$$\frac{V_{ü}}{\delta_{ü}} = \mathfrak{E}_{ü} = \text{const.} \tag{1}$$

Wenn bei irgend einem, so muß bei dem durch die Schlagweite $\delta_{ü}$ ausgezeichneten Elektrodenabstand das Funkenpotential für Drucke p kleiner als Atmosphärendruck sich darstellen lassen.

Führt man den Druck ein, so lautet die Gleichung (1), für Atmosphärendruck $h_{ü}$ gesetzt,

$$\frac{V_{ü}}{h_{ü}\,\delta_{ü}} = \frac{\mathfrak{E}_{ü}}{h_{ü}}. \tag{1a}$$

Dadurch, daß wir h als eine unbenannte Zahl anstatt des Druckes p hier einführen, wahren wir nicht nur die Dimension der Gleichung, sondern halten auch die Begriffe Druck und Länge auseinander, was sich für das Folgende nützlich erweisen wird.

Es sollen sich nun verhalten

$$h : h_{ü} = \delta : \delta_{ü},$$

so daß

$$h = \frac{h_{ü}}{\delta_{ü}}\,\delta$$

wird, was wir beiderseits mit δ multiplizieren, um zu erhalten

$$(h\,\delta) = \frac{h_{ü}}{\delta_{ü}}\,\delta^2. \tag{2}$$

Die Grenzbedingungen lauten dann

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } (h\,\delta) = 0: \quad h = 0 \quad \text{und} \quad \delta = 0, \\ &\text{für } (h\,\delta) = (h\,\delta)_{ü}: \; h = h_{ü} \quad \text{und} \quad \delta = \delta_{ü}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Setzen wir das nun in die Gleichung (1a) ein, so lautet dieselbe für $(h\,\delta)_0$ bis $(h\,\delta)_{ü}$

$$V' = \frac{\mathfrak{E}_{ü}}{h_{ü}} \cdot \Big[(h\,\delta)\Big]_{(h\,\delta)_0}^{(h\,\delta)_{ü}}. \tag{4}$$

Diese Gleichung wird Null für $(h\delta) = 0$, drückt daher für kleine Drucke das Anwachsen der Spannung unterhalb dem kritischen $(h\delta)_k$ beim Minimumpotential nicht aus.

Für sehr niedere Drucke hat sich die elementare Energiegleichung

$$eV = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

an Hand von Röntgenspektren bestätigt, aus der man, für die Ladung des freien Elektrons $e = 1{,}591\,55 \cdot 10^{-20}$ el. magn. E., für das Planck-sche Wirkungsquantum $h = 654 \cdot 10^{-29}$ und für $c = 3 \cdot 10^{10}$ eingesetzt, erhält:

$$V = \frac{12\,327}{\lambda} \text{ Volt.} \tag{5}$$

Nach dieser Gleichung ist die Spannung V der Wellenlänge λ umgekehrt proportional und für $\lambda > 12\,327$ wird $V < 1$ Volt. Auch diese Gleichung bringt das Anwachsen der Spannung nach Überschreitung der kritischen Wellenlänge λ_k beim Minimumpotential nicht zum Ausdruck. Aber während die Gleichung (4) das Anwachsen der Spannung mit wachsendem Druck $p > p_k$, dem kritischen Druck beim Minimumpotential, einerseits zum Ausdruck bringt, genügt andererseits die Gleichung (5), um das Anwachsen der Spannung für Drucke $p < p_k$ darzustellen. Addiert man nun die Gleichungen (4) und (5) und schreibt

$$V_v = V' + V = \frac{\mathfrak{E}_{\ddot{u}}}{h_{\ddot{u}}}(h\delta) + \frac{12\,327}{\lambda}, \tag{6}$$

so muß die Summe beider mindestens für die Grenzspannungen $V_{v\,max}$ im Vakuum und $V_{\ddot{u}} = V'$ bei Atmosphärendruck die zutreffenden Spannungen geben. Wir setzen nach der Bedingung der Elektrodenfunktion den Grenzwert von $V_{v\,max} = V_{\ddot{u}}$. $V_{\ddot{u}}$ liegt aber bei der Schlagweite $\delta_{\ddot{u}}$ oder nach den Grenzbedingungen nach (3) bei $(h\delta)_{\ddot{u}}$. Wir schreiben nun als Grenzbedingungen für λ entsprechend (3)

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } (h\delta) = 0: \quad \lambda = 0, \\ &\text{für } (h\delta) = (h\delta)_{\ddot{u}}: \quad \lambda = \lambda_{\ddot{u}}. \end{aligned}\right\} \tag{6a}$$

Um das Verhältnis von $(h\delta)$ zu λ zwischen den beiden Grenzwerten zu prüfen, schreiben wir die Gleichung (5) in der Form

$$V = \left[\frac{(h\delta)'_{\ddot{u}}}{(h\delta)} - 1\right] \cdot V_0. \tag{5a}$$

Hierin bedeutet $\delta'_{\ddot{u}}$ das $\delta_{\ddot{u}}$ für „ebene Platten".

Nach früheren Untersuchungen hat es sich gezeigt, daß für die von Spath benutzten „ebenen Platten" ein äquivalenter Kugeldurchmesser eingeführt werden konnte. Die nach der Funktion $V = f(\delta, D')$, wo D'

den äquivalenten Kugeldurchmesser bedeutet, berechneten Spannungen ergaben eine vollkommene Übereinstimmung mit den von Spath mit „ebenen Platten“ gemessenen Spannungen*.

Nach (5) können wir schreiben $V_0 = \frac{12\,327}{\lambda'_{\ddot{u}}}$, wo $\lambda'_{\ddot{u}}$ die Wellenlänge mit D' bei Atmosphärendruck bedeutet, wofür wir nach den Grenzbedingungen schreiben $\lambda'_{\ddot{u}} = (h\,\delta)'_{\ddot{u}}$. Setzen wir das für V_0 in die Gleichung (5a) ein, so lautet dieselbe

$$V = \frac{(h\,\delta)'_{\ddot{u}}}{(h\,\delta)} \cdot \frac{12\,327}{(h\,\delta)'_{\ddot{u}}} - V_0.$$

Hierin hebt sich $(h\,\delta)'_{\ddot{u}}$, und da V_0 gegen das erste Glied vernachlässigt werden kann, wird

$$V = \frac{12\,327}{(h\,\delta)} \text{ Volt.} \tag{7}$$

Diese Gleichung ist übereinstimmend mit der Gleichung (5), und man erhält durch Gleichsetzung von (7) und (5)

$$\underline{(h\,\delta) = \lambda \text{ Å.-E.}} \tag{8}$$

Um den Faktor $\mathfrak{E}_{\ddot{u}}/h_{\ddot{u}}$ in der Gleichung (6), den wir auch schreiben können $\mathfrak{E}_{\ddot{u}}\,\delta_{\ddot{u}}/\lambda_{\ddot{u}}$, bestimmen zu können, muß $\delta_{\ddot{u}}$ bekannt sein. Wir berechnen deshalb $\lambda'_{\ddot{u}}$ für D', dessen $\delta'_{\ddot{u}} = 400$ mm ist. D' bedeutet hier wieder den äquivalenten Kugeldurchmesser, der sich für Spaths ebene Platten ergeben hat. Unter Berücksichtigung der Elektrodenfunktion schreiben wir $V'_{\ddot{u}} = a\,.\,\delta'_{\ddot{u}} + k + n\,D'$, worin wir nunmehr statt $a\,.\,\delta'_{\ddot{u}}$ setzen $a\,.\,\lambda'_{\ddot{u}}$, wodurch wir die rechte Seite der Gleichung mit Rücksicht auf die Größenordnung [Volt, Å.-E.] mit 10^{-4} zu multiplizieren haben. Wir setzen nun

$$V\lambda = a\,.\,10^{-4}\,\lambda'_{\ddot{u}} + (k + n\,D')\,.\,10^{-4}$$

und darin $\lambda = \lambda_{\ddot{u}}$, und indem wir den sehr wenig von 1 verschiedenen Bruch $\lambda'_{\ddot{u}}/\lambda_{\ddot{u}}$ vernachlässigen, können wir schreiben

$$V'_0 = a\,.\,10^{-4} + \frac{k + n\,D'}{\lambda_{\ddot{u}}} \cdot 10^{-4}. \tag{5b}$$

Setzen wir hierin nach (5) für $\lambda_{\ddot{u}} = \frac{12\,327}{V_0}$ und $V_0 = a\,.\,10^{-4}$, so wird $V'_0 = 0{,}040\,545$.

Mit V'_0 erhalten wir nach (5) das zu $\delta'_{\ddot{u}}$ gehörende

$$\lambda'_{\ddot{u}} = 304\,000 \text{ Å.-E.},$$

* Fr. Klingelfuss, Ann. d. Phys. **82**, 288—292, 1927.

und mit $\delta'_{\ddot{u}} = 400\,\text{mm}$ und $\lambda'_{\ddot{u}} = 304\,000$ ergibt sich der gesuchte Koeffizient

$$\frac{\mathfrak{E}_{\ddot{u}}}{h_{\ddot{u}}} = \frac{\mathfrak{E}_{\ddot{u}}\,\delta'_{\ddot{u}}}{\lambda'_{\ddot{u}}} = 1{,}825\,66\ \text{Volt/Å.-E.}$$

Setzen wir diesen Koeffizienten für $\mathfrak{E}_{\ddot{u}}/h_{\ddot{u}}$, ferner nach (8) $(h\,\delta) = \lambda$ in (6) ein, so lautet die Gleichung schließlich

$$V_v = 1{,}825\,66\,\lambda + \frac{12\,327}{\lambda}. \qquad (9)$$

Nach $\lambda'_{\ddot{u}} = h_{\ddot{u}}\,\delta'_{\ddot{u}}$ wird

$$h_{\ddot{u}} = \frac{304\,000}{400} = 760 = \text{const.}$$

Setzt man das ein, so wird $\delta_{\ddot{u}} = \frac{12\,327}{V_0 \cdot 760} = 401{,}3\,\text{mm}$ der sich nach $\lambda_{\ddot{u}} = \frac{12\,327}{V_0}$ ergebende Elektrodenabstand für ein homogenes Feld. Das für Spaths Platten eingesetzte äquivalente $\delta'_{\ddot{u}} = 400\,\text{mm}$ unterscheidet sich nur sehr wenig hiervon. Die mit der Höhe der Quecksilbersäule bei Atmosphärendruck übereinstimmende Konstante drückt nicht den Druck, sondern das Verhältnis $\lambda_{\ddot{u}}/\delta_{\ddot{u}} = h_{\ddot{u}}$ aus.

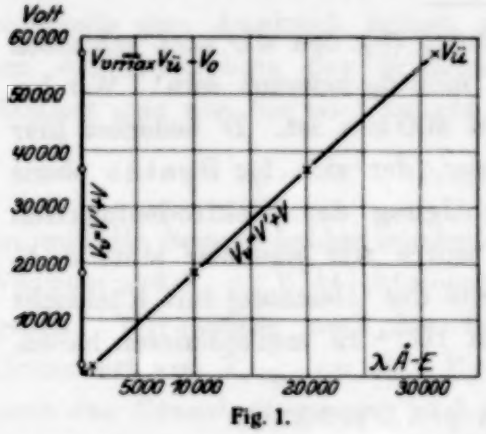


Fig. 1.

Die Gleichung (9) gibt mit $\lambda = 82{,}171$ Å.-E. ein Minimum für $V_v = 300$ Volt.

Nach der Gleichung (9) sind die Tabellen 1 und 2 berechnet. In Tabelle 1 war dabei maßgebend die zurzeit praktisch erreichbare kürzeste Wellenlänge (im Röntgenspektrum). Tabelle 2 wurde berechnet für das kleinste $\delta_{\ddot{u}}$ (nach den Bedingungen der Elektrodenfunktion), um die ganzen Kurven zwischen $\lambda_{\min}$ und $\lambda_{\ddot{u}}$ auch zeichnerisch möglichst übersichtlich darstellen zu können.

Das Minimumpotential ergibt sich unabhängig von $\delta_{\ddot{u}}$ für Luft zu 300,03 Volt und bei der Wellenlänge $\lambda_k = 82{,}171$ Å.-E. $= 8{,}2 \cdot 10^{-6}$ mm.

In Fig. 1 sind die Zahlen der Tabelle 2 graphisch dargestellt. Trotzdem diese Tabelle für das kleinste $\delta_{\ddot{u}} = 41{,}1$ mm berechnet ist, läßt die Figur weiter nichts erkennen als die Kurve nach der Gleichung (4). Die Kurve nach der Gleichung (5) kommt darin nicht zum Ausdruck. Man muß, um das zu erreichen, die Darstellung in einem erheblich größeren

Maßstabe durchführen, was eine Beschränkung auf die kritische Gegend beim Minimumpotential zur Folge hat. In der Fig. 2 ist die Kurve der Fig. 1 zwischen $\lambda = 2{,}5$ Å.-E. und $\lambda = 600$ Å.-E. dargestellt, also für

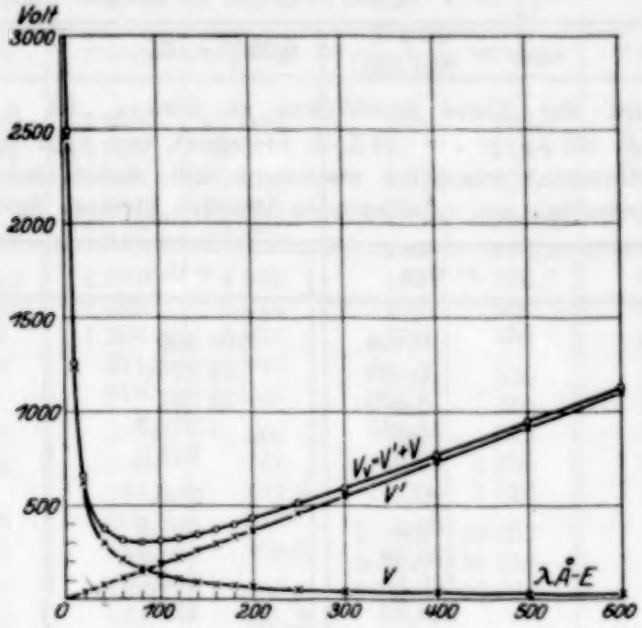


Fig. 2.

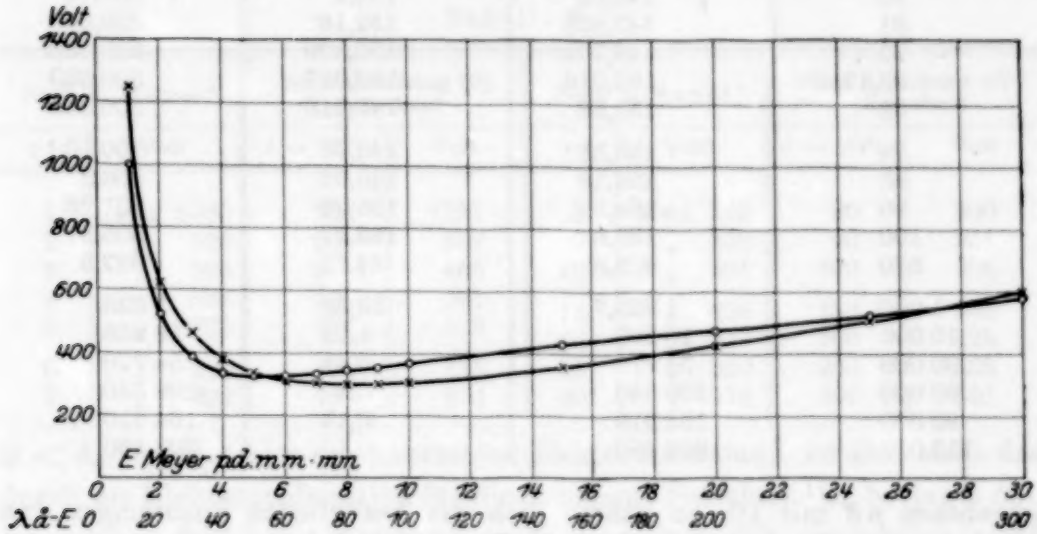


Fig. 3.

○ Gemessen von E. Meyer. × Berechnet nach Gleichung (9).

ein Gebiet, das in der Fig. 1 bis zu den beiden ersten Markierungen links und rechts vom Wendepunkt der Kurve reicht.

Schumann gibt u. a. eine auf $p\delta$ bezogene Kurve von V nach Messungen von E. Meyer wieder*. Multipliziert man die daselbst an-

* W. O. Schumann, Elektrische Durchbruchfeldstärke von Gasen, S. 53. Berlin, Jul. Springer, 1923.

Tabelle 1.

$$D = 75\,\text{mm};\quad \delta_{\ddot{u}} = 1{,}4356 \cdot 75 + 41{,}1 = 148{,}8\,\text{mm};$$
$$\lambda_{\ddot{u}} = 760 \cdot 148{,}8 = 113\,088\ \text{Å.-E.};$$
$$V_{\ddot{u}} = 1 \cdot 82\,566 \cdot 113\,088 = 206\,460\ \text{Volt};$$
$$\lambda_{\min} = \frac{12\,327}{206\,460} = 0{,}0597\ \text{Å.-E.}$$

Um den Verlauf der Kurve überblicken zu können, ist die Tabelle von $\lambda_{\min} = 0{,}06$ Å.-E. bis $\lambda_{\ddot{u}} = 113\,088$ Å.-E. berechnet, und zwar mit nur so vielen Zahlen, als ein Überblick wünschbar erscheinen läßt; dabei sind in der Gegend des Minimumpotentials aus naheliegenden Gründen kleinere Sprünge gewählt.

λ Å.-E.	V' Volt	V Volt	V_p Volt
0,06	0,109	206 460	206 460
0,1	0,182	123 270	123 270
1	1,825	12 327	12 329
10	18,256	1 232,7	1 251
20	36,5	616,3	653
40	73	308	381
60	109,5	205,5	315
75	136,93	164,36	301,29
77	140,58	160,09	300,67
79	144,23	156	300,23
80	146,05	154,1	300,15
81	147,888	152,18	300,068
82	149,704	150,329	300,033
82,171	150,016	150,017	300,033
83	151,53	148,518	300,048
84	153,35	146,75	300,10
85	155,18	145,02	300,2
90	164,3	136,96	301,26
100	182,6	123,27	305,87
500	912,8	24,65	937,5
1 000	1 825,7	12,38	1 838
10 000	18 257	1,23	18 258
30 000	54 770	0,41	54 770
60 000	109 540	0,2	109 540
90 000	164 310	0,13	164 310
113 088	206 460	0,1	206 460

gegebenen $p\delta$ mit 10, so nähern sich die bezüglichen Spannungen den nach der Gleichung (9) für λ Å.-E. berechneten Spannungen, wie die Gegenüberstellung in Tabelle 3 erkennen läßt. In Fig. 3 sind die beiden Kurven, die von Meyer mit $p\delta = \lambda/10$ und die nach Gleichung (5) berechnete Kurve gezeichnet.

Nach den sehr sorgfältigen Messungen von E. Meyer* liegt das Minimumpotential in der Höhe von 327 Volt bei $pl = 5{,}67$ mm . mm

* E. Meyer, Ann. d. Phys. 58, 297, 1919.

Tabelle 2.

$D = 0$; $\delta_{ü} = 41{,}1$ mm;
$\lambda_{ü} = 31\,236$ Å.-E.;
$V_{ü} = 57\,026$ Volt; $\lambda_{min} = 0{,}216$ Å.-E.

λ Å.-E.	V' Volt	V Volt	V_p Volt	λ Å.-E.	V' Volt	V Volt	V_p Volt
0,216	0,39	57 069	57 069	100	182,6	123	306
0,3	0,55	41 090	41 090	120	219,1	103	322
0,4	0,73	30 818	30 819	140	255,6	88	344
0,5	0,91	24 654	24 655	150	273,85	82,18	356
1,0	1,83	12 327	12 329	160	292,2	77	369
2,5	4,56	4 931	4 936	180	328,6	68	395
5,0	9,13	2 465	2 474	200	365	61	426
10	18,3	1 233	1 251	250	456	49	505
15	23,4	821,8	845	300	550	41	591
20	36	616	652	400	730	31	761
30	54,8	410,9	466	500	913	25	938
40	73,0	308	381	600	1 095	21	1 116
50	91	246,5	337,5	1 000	1 826	12	1 838
60	109,5	205,5	315	10 000	18 257	1,2	18 258
70	127,8	176,1	303,9	20 000	36 513	0,6	36 514
80	146,0	154,1	300,1	31 236	57 026	0,4	57 026
90	164,3	137	301,3				

Tabelle 3.

Nach E. Meyer*		Nach Gleichung (9) berechnet		Nach E. Meyer*		Nach Gleichung (9) berechnet	
pl	Volt	$\lambda = (\lambda\delta)$	Volt	pl	Volt	$\lambda = (\lambda\delta)$	Volt
1	etwa 1000	10	1251	8	etwa 342	80	300
2	„ 520	20	652	9	„ 352	90	301
3	„ 385	30	466	10	„ 364	100	306
4	„ 338	40	381	15	„ 430	150	356
5	„ 329	50	338	20	„ 477	200	426
6	„ 328	60	315	25	„ 520	250	505
7	„ 332	70	304	30	„ 574	300	591

($l < \delta_{ü}$ bedeutet hier den konstanten Elektrodenabstand, ist aber nicht das durch die Elektrodenfunktion für die konstante Feldstärke $\mathfrak{E}_{ü}$ bedingte $\delta_{ü}$). In welcher Beziehung dieses pl zu λ steht, läßt sich einstweilen nicht überblicken (vgl. Tabelle 3 und Fig. 3). Wir kommen später darauf zurück.

Was die Höhe 327 Volt anbelangt, so ist es wohl möglich, daß dieselbe durch die sehr kleinen Räume, in denen Herr E. Meyer seine Untersuchungen vorgenommen hat, beeinflußt wurde. Nach Townsend** ist bei gleichem Druck und gleichem Elektrodenabstand das Potential

* Mittelwerte nach Schumann, a. a. O. S. 56.

** J. S. Townsend, Marx, Handb. d. Radiologie 1, 350, 1920.

größer, wenn die Röhre enger ist. Die Elektrodenfunktion bedingt aber schon für Kugeln von 2 cm Durchmesser einen Elektrodenabstand $\delta_{ü} = 70$ mm. Für die nach der Tabelle 1 berechneten Zahlen ist der Elektrodenabstand schon $\delta_{ü} = 148{,}8$ mm und für „ebene Platten", für die wir das äquivalente $\delta_{ü} = 400$ mm setzen, wird der Elektrodenabstand noch dementsprechend größer, um der Bedingung nach (1) zu genügen. Die Elektrodenfunktion als solche wurde ermittelt aus den Zahlen über Entladungen ohne Fremdionisierung in Luft von Atmosphärendruck mit veränderlichem δ, wobei der Einfluß von Raumladungen möglichst vermieden wurde. Sollen die Wandladungen im Vakuum annähernd unschädlich gemacht werden, so müssen entsprechend große Gefäße die Elektroden umgeben, eine Bedingung, auf die auch Günther-schulze* aufmerksam gemacht hat mit dem Hinweis darauf, daß anderenfalls die gemessenen Spannungen nicht richtig sind.

Die Beziehung zwischen dem Druck p und der Wellenlänge λ ergibt sich in Anlehnung an die, wie wir gleich sehen werden, hier nicht zutreffende Gleichung nach Paschens Gesetz

$$p\,\delta_{\text{const}} = \delta\,p_{\text{const}},$$

wofür wir nunmehr zu schreiben haben

$$p\,\lambda_{ü} = p_{ü}\,\lambda. \tag{10}$$

Setzen wir hierin für $\lambda_{ü} = p_{ü}\,\delta_{ü}$ ein, wo $p_{ü}$ den Druck bei 760 mm Hg bedeutet, so erhalten wir in Abweichung von Paschens Gleichung

$$p\,\delta_{ü} = \lambda,$$

denn $p\,\delta_{ü}$ ist nichts anderes als $p\,\delta_{\text{const}}$ in Paschens Gleichung.

Nach der Gleichung

$$p_n = \frac{\lambda_n}{\delta_{ü}} \tag{11}$$

ist die Tabelle 4 für einige beliebig gewählte $\lambda_{ü}$ berechnet.

Tabelle 4.

$\lambda_{ü}$ Å.-E.	$\delta_{ü} = \frac{\lambda_{ü}}{760}$ mm	$\lambda_{\min} = \frac{6752}{\lambda_{ü}}$ ** Å.-E.	$p_{\min}$ nach (11) mm	$p_{\min}\,\delta_{ü} = \lambda_{\min}$ Å.-E.
300 000	395	0,022 5	$5{,}7 \cdot 10^{-5}$	0,0225
200 000	263	0,033 76	$1{,}28 \cdot 10^{-4}$	0,0337
100 000	131,5	0,067 5	$5{,}13 \cdot 10^{-4}$	0,067
50 000	65,8	0,135	$2 \cdot 10^{-3}$	0,13

* Abbildung bei R. Seeliger, Einführung in die Physik d. Gasentl., S. 76. Leipzig, Barth, 1927.

** Man erhält die Gleichung, wenn man nach (5) setzt $\lambda_{\min} = \frac{12\,327}{V_{ü}}$ (wo $V_{ü} = V_{v\,\max}$) und hierin nach (4) für $V_{ü} = 1{,}825\,66\,\lambda_{ü}$ einsetzt.

Für die kritische Wellenlänge beim Minimumpotential $\lambda_k = 82$ Å.-E. ergeben sich die in der Tabelle 5 zusammengestellten Drucke p_k in Abhängigkeit von $\delta_{ü}$.

Tabelle 5.

$\lambda_{ü}$ Å.-E.	$\delta_{ü}$ mm	p_k nach (11) mm	$p_k \cdot \delta_{ü} = \lambda_k$ Å.-E.
300 000	395	0,2076	82
200 000	263	0,3118	82
100 000	131,5	0,623	82
50 000	65,8	1,246	82

Das Produkt $p_k \cdot \delta_{ü}$ in dieser Tabelle ist unabhängig von $\delta_{ü}$ konstant, und zwar ist, wie übrigens aus (11) unmittelbar hervorgeht, $p_k \cdot \delta_{ü} = \lambda_k$. Es ist auch $p_{\min} \cdot \delta_{ü} = \lambda_{\min}$, somit allgemein $p\,\delta_{ü} = \lambda$. In Tabelle 6 sind noch schließlich die Drucke für $\delta_{ü} = 148{,}8$, wofür die Tabelle 1 berechnet wurde, zusammengestellt.

Tabelle 6 (zu Tabelle 1).

$p = \frac{\lambda}{\delta_{ü}}$ mm; $\delta_{ü} = 148{,}8$ mm; $\lambda_{\min} = 0{,}06$ Å.-E.; $\lambda_{ü} = 113\,088$ Å.-E.

λ Å.-E.	p mm	λ Å.-E.	p mm	λ Å.-E.	p mm	λ Å.-E.	p mm
0,06	0,000 403	40	0,2688	500	3,360	60 000	403,2
0,1	0,000 672	60	0,4032	1 000	6,72	90 000	604,8
1	0,006 72	80	0,5376	10 000	67,2	113 088	760
10	0,067 2	82	0,551	20 000	134,4		
20	0,134 4	100	0,672	30 000	201,6		

Trägt man die Drucke als Ordinaten mit 760 mm bei $V_{ü}$ auf, so fällt die Kurve von p mit der Geraden von V' in Fig. 1 zusammen.

Die Druckminima in Tabelle 4 und das Druckminimum in Tabelle 6 erscheinen hoch in bezug auf $\lambda_{\min}$ bzw. auf die anzulegende Spannung. Das mag nun daher rühren, daß bei der Bestimmung der Konstanten in der Elektrodenfunktion für das Funkenpotential Selbstionisierung vorausgesetzt wurde. Es hat demgemäß keinen Sinn, etwa die in Glühkathodenröhren angestrebten niederen Drucke hier zum Vergleich heranzuziehen. Ob aber außerdem andere Ursachen mitbestimmend sind für eine allfällige Differenz zwischen den berechneten und gemessenen Drucken, entzieht sich beim heutigen Stande der Kenntnis über die Zustände in der Vakuumröhre vollständig der Beurteilung. Die Höhe des Kathoden- bzw. Anodenfalles kommt dabei wohl außer Betracht, denn sie charakterisieren das Potentialgefälle, aber nicht das Funkenpotential als Funktion $\varphi(p, \delta_{ü})$.

Zu einer Erklärung der Differenz zwischen dem von E. Meyer aus dem Experiment mit dem Elektrodenabstand $l < \delta_{\ddot{u}}$ bestimmten $p_0 l = 5{,}67$ mm . mm (hier bedeutet $p_0 = p_k$) und dem unter Hinzuziehung der Elektrodenfunktion berechneten $p_k \cdot \delta_{\ddot{u}} = 82$ Å.-E. führt folgende Überlegung.

Nach den Zahlen in Tabelle 5 nimmt der kritische Druck p_k beim Minimumpotential mit abnehmendem $\delta_{\ddot{u}}$ zu. Die gleiche Beobachtung wird auch beim Experiment nach den Zahlen der Tabelle 5 von E. Meyer* gemacht. Setzen wir nun die kritische Länge beim Minimumpotential $\lambda_k = 82$ Å.-E. als eine von $\delta_{\ddot{u}}$ unabhängige Konstante, und die Höhe des kritischen Druckes p_0 als vom Elektrodenabstand $\delta_{\ddot{u}}$ gesetzmäßig abhängig voraus, so läßt sich für $l < \delta_{\ddot{u}}$ der funktionelle Elektrodenabstand $\delta_{\ddot{u}}$ nach der Gleichung (11) durch

$$\delta_{\ddot{u}} = \frac{82}{p_0} \tag{11a}$$

berechnen. Unter funktionellem Elektrodenabstand verstehen wir denjenigen Abstand $\delta_{\ddot{u}}$, der sich bei einer bestimmten Anordnung mit $l < \delta_{\ddot{u}}$ unter Benutzung der dabei gemessenen Drucke und bezüglichen Spannungen nach den Gleichungen der Elektrodenfunktion ergeben würde. Von der Elektrodenanordnung hängt — im Vakuum noch erheblicher als in freier Luft und großen Räumen — die Gestaltung des elektrischen Feldes ab. Das elektrische Feld wird besonders durch Raumladungen sehr beeinflußt, diese müssen aber um so kleiner werden, je niedriger die an die Elektroden gelegte Spannung ist; sie wird daher ceteris paribus beim Minimumpotential am kleinsten sein, so daß der beim Minimumpotential bestimmte funktionelle Elektrodenabstand der Wahrscheinlichkeit am nächsten kommt. Mit zunehmender Spannung werden sich Feldverzerrungen in höherem Maße geltend machen, so daß die allgemeine Gleichung $\delta_{\ddot{u}} = \frac{\lambda_n}{p_n}$ für $\lambda_n \gtrless \lambda_k$ nicht das richtige $\delta_{\ddot{u}}$ ergeben würde. Bestimmt man dagegen $\delta_{\ddot{u}}$ aus dem Druck beim Minimumpotential, so lassen sich für andere gemessene Drucke p' die Wellenlängen nach

$$\lambda = p' \delta_{\ddot{u}}$$

berechnen. Die so erhaltenen Wellenlängen lassen sich dann ohne weiteres in die Gleichung (9) zur Berechnung der Spannung V_v einsetzen. Man erhält aus einer so berechneten Kurve ein Bild über die durch die Elektrodenfunktion bzw. die Feldverzerrung bei $l < \delta_{\ddot{u}}$ verursachten Fehler.

* E. Meyer, Ann. d. Phys. 58, 297, 1919.

Nach dieser Überlegung sind die beiden Tabellen 7 und 8 aus den von E. Meyer angegebenen Spannungen beim Minimumpotential berechnet. In Tabelle 8 wurde p_0 berechnet unter Einsetzung in Gleichung (9) für

Tabelle 7.

l mm	p_0 mm	$\delta_{\ddot{u}} = \frac{82}{p_0}$ mm	$\lambda_{\ddot{u}} = 760\,\delta_{\ddot{u}}$
0,960	5,90	14	10 640
1,962	2,90	28,2	21 432
2,979	1,90	43,16	32 800
4,046	1,40	58,5	44 460
4,926	1,15	71,3	54 188

Mittel: $l\,p_0 = 5{,}67$ mm . mm; $p_0\,\delta_{\ddot{u}} = 82$ Å.-E.

Tabelle 8.

p gemessen von E. Meyer beim Elektrodenabstand $l = 2{,}979$ mm
Druck beim Minimumpotential . . . . . $p_0 = 1{,}9$ mm
Korrigierter (funktioneller) Elektrodenabstand . . $\delta_{\ddot{u}} = \frac{82}{1{,}9} = 43{,}16$ mm

$$\lambda = 43{,}16\,.\,p \text{ Å.-E.}; \quad \lambda_{\ddot{u}} = 760\,.\,43{,}16 = 32\,800 \text{ Å.-E.};$$

$$V_v = 1{,}825\,66\,.\,\lambda + \frac{12\,327}{\lambda} \text{ Volt.}$$

$p\,l$ mm . mm	p mm	λ Å.-E.	$1{,}852\,66\,.\,\lambda$ Volt	$\frac{12\,327}{\lambda}$ Volt	V_v Volt	Nach Tabelle 3 etwa Volt
1	0,34	14,67	27	840	867	1000
2	0,67	28,92	53	426	479	520
3	1,00	43,16	79	285	364	385
4	1,34	57,83	106	213	319	338
5	1,68	72,51	132	170	302	329
5,67	1,90	82,00	149,70	150,33	300,03	327
6	2,01	86,75	158,38	142,05	300,4	328
7	2,35	101,43	185	121	306	332
8	2,68	115,67	211	107	318	342
9	3,02	130,34	238	94	332	352
10	3,36	145,02	265	85	350	364
15	5,03	217,09	396	56	452	430
20	6,71	289,60	529	42	571	477
25	8,4	362,54	662	34	696	520
30	10,07	434,62	793	28	821	574

$V_v = 300$ und $\lambda = \delta_{\ddot{u}}\,p = 43{,}16\,p$. Die Kurve nach Tabelle 8 fällt vollkommen mit der Kurve nach Tabelle 2 für $\delta_{\ddot{u}} = 41{,}1$ mm in Fig. 2 und 3 zusammen. Die Rechnung gibt für $p_k = 1{,}9$: $\lambda_k = 82$ und $V_{\min} = 300$ Volt. Die kritische Wellenlänge und das Minimumpotential ergeben sich somit auch nach den Messungen von E. Meyer in voll-

kommener Übereinstimmung mit dem nach (9) für $\delta_{\ddot{u}} \geqq \delta_0$ berechneten Minimumpotential, sobald die durch die Elektrodenfunktion geforderte Korrektion vorgenommen wird. Dieses Resultat kann natürlich nur dann beweiskräftig sein, wenn sich nachweisen läßt, daß der beim Minimumpotential gemessene Druck sich durch die Gleichung $p_0 = \lambda_k/\delta_{\ddot{u}}$ darstellen läßt.

Nach den Zahlen dieser Tabelle sind für $l < \delta_{\ddot{u}}$ die Funkenpotentiale für Drucke $p > p_k$ niedriger und für Drucke $p < p_k$ höher, als nach der Rechnung für $l = \delta_{\ddot{u}}$ sich ergibt. Townsends Beobachtung (siehe S. 133) bezieht sich demnach wohl auf Drucke $p < p_k$.

Von Interesse ist auch die Zusammenstellung der Drucke, in Abhängigkeit von $\lambda_{\ddot{u}}$, einerseits der von E. Meyer beim Minimumpotential gemessenen und andererseits der sich aus der Rechnung ergebenden Drucke, wozu wir die in Tabelle 5 aufgeführten Zahlen benutzen können. Wir erhalten dann die in Tabelle 9 zusammengestellten Zahlen.

Tabelle 9.

Reihe nach E. Meyer aus Tabelle 7		Aus Tabelle 5	
$\lambda_{\ddot{u}}$	$p_0 = p_k$	$\lambda_{\ddot{u}}$	p_k
10 640	5,9	50 000	1,25
21 432	2,9	100 000	0,62
32 800	1,9	200 000	0,31
44 460	1,4	300 000	0,21
54 188	1,15		

Die Reihe von E. Meyer, in welche die gemessenen Drucke eingesetzt sind, schließt sich gut an die Reihe der Tabelle 5 an. Noch deutlicher ist das in der Fig. 4 zu erkennen, wo die beiden Kurven glatt ineinander übergehen. Die Übereinstimmung wird besonders deutlich dadurch, daß die Koordinaten für $\lambda_{\ddot{u}}$ und p_k sich vertauschen lassen. Die Fig. 4, deren Maßstab entsprechend gewählt ist, zeigt in der Tat, daß man den Druck $= p_k$ oder die Grenzwellenlänge $= \lambda_{\ddot{u}} = 760\,\delta_{\ddot{u}}$ beliebig als Ordinate oder als Abszisse auftragen kann, ohne daß der Verlauf der Kurve dadurch eine Änderung erfährt. Es ist damit gezeigt, wie sich bei Elektrodenabständen in Vakuumröhren $l < \delta_{\ddot{u}}$ aus dem beim Minimumpotential gemessenen kritischen Druck p_k und danach die korrigierte Funktion $V_v = \varphi(p, \delta_{\ddot{u}})$ bestimmen läßt. Das verhältnismäßig einfache Experiment der Bestimmung von p_k läßt sich in den meisten Fällen leicht durchführen. Die Bedeutung des äquivalenten Kugeldurch-

messers für „ebene Platten“ bei Entladungen unter Atmosphärendruck findet hiernach bei Entladungen unter Drucken kleiner als Atmosphärendruck und $l < \delta_{ü}$ in dem funktionellen Elektrodenabstand $\delta_{ü}$ sein Gegenstück.

Durch vorstehende Ausführungen konnte vor allem gezeigt werden, welchen Einfluß die Berücksichtigung der Elektrodenfunktion bei Untersuchungen an Gasentladungen hat. Wenn das hier vorliegende Resultat wegen der unzulänglichen einheitlichen Angaben über experimentelle Ergebnisse mit diesen nicht direkt und in größerem Umfange verglichen werden kann, so mag die Ursache zum großen Teil daran liegen, daß die durch die Elektroden verursachten Einflüsse zu wenig berücksichtigt wurden.

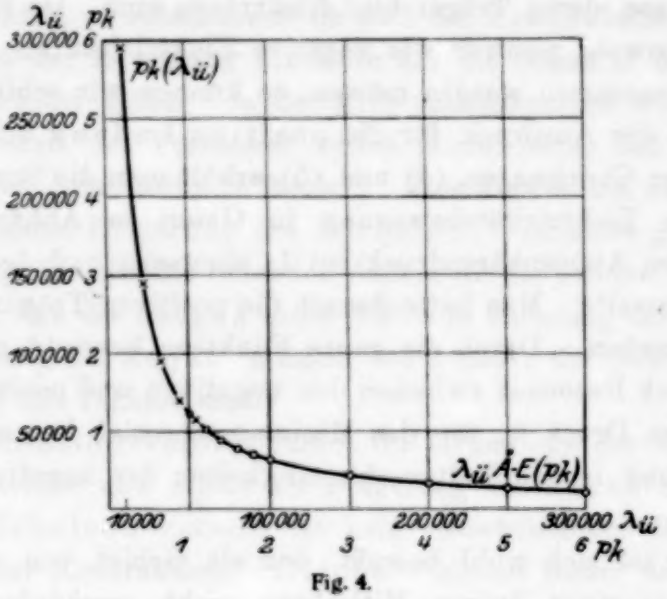


Fig. 4.

Die Bedingungen aus der Elektrodenfunktion geben darüber Aufschluß und sollten bei zukünftigen Arbeiten beachtet werden*. Praktisch wird die Bedingung, den Elektrodenabstand gleich $\delta_{ü} = r\,D + \delta_0$ auszuführen, sowie die Raumladungen durch genügend große Gefäße möglichst auszuschalten, nicht immer durchführbar sein, aber man wird beides mehr als bisher in Rechnung stellen können. Besondere Vorsicht ist bei der Benutzung „ebener Platten“ als Elektroden walten zu lassen. Für wirklich ebene Platten müßte nach den Gleichungen aus der Elektrodenfunktion $\delta_{ü} = \infty$ gesetzt werden. In Wirklichkeit läßt sich aber jede „ebene Platte“ durch ein endliches D', d. h. durch einen äquivalenten endlichen

* Daß im Gebiet zwischen 100 und 760 mm Hg überhaupt keine genauen Messungen vorliegen, wird auch von Schumann als ein Mangel hervorgehoben (a. a. O. S. 115).

Kugeldurchmesser, ersetzen. Die Ursache liegt in der unvermeidlichen Feldverzerrung durch die Ränder der Platten. Wo es irgendwie angängig ist, sollte daher kugelförmigen Elektroden der Vorzug gegeben werden, besonders wo es sich um die Durchführung zuverlässiger Messungen handelt.

Die Gleichung (9) $V_v = V' + V$, in der nach (4) $V' = \varepsilon(h\delta)$ aus $V_{\ddot{u}} = \mathfrak{E}_{\ddot{u}} \cdot \delta_{\ddot{u}}$ bei 760 mm Hg und normaler Temperatur und nach (5) $V = \frac{v}{\lambda}$ aus $eV = h\frac{c}{\lambda}$ hervorgegangen sind, läßt sich physikalisch etwa folgendermaßen erklären:

Die Gleichung (5) drückt die Funktion $V = \psi(e)$ also von negativer Ladung aus, deren Träger hier Elektronen sind. Da für elektrische Entladungen sowohl positive wie negative Elektrizität als in Bewegung befindlich angenommen werden müssen, so können wir schließen, daß die Gleichung (4) der Ausdruck für die positive Ladung sei. Durch die Addition beider Gleichungen, (4) und (5), erhält man die Summe positiver und negativer Elektrizitätsbewegung in Gasen in Abhängigkeit vom Druck zwischen Atmosphärendruck bei $\lambda_{\ddot{u}}$ einerseits und dem Druck p_{min} bei λ_{min} andererseits. Man hätte danach die positiven Träger als geladene Moleküle anzusehen. Durch die ganze Funktion herrscht nach $\lambda = c/\nu$ bei jedem Druck Resonanz zwischen den negativen und positiven Trägern. Beim kritischen Druck p_k für das Minimumpotential herrscht außerdem Übereinstimmung in den Voltgeschwindigkeiten der negativen und positiven Träger.

Verfasser ist sich wohl bewußt, daß ein Gebiet von solcher Weitschichtigkeit in einer kurzen Mitteilung nicht erschöpfend behandelt werden kann. Das soll auch nicht der Zweck dieser Mitteilung sein, sondern, wie schon eingangs erwähnt, soll hiermit nur auf die Aussichten hingewiesen werden, die sich eröffnen, wenn die Elektrodenfunktion auch bei Gasentladungen unter vermindertem Drucke berücksichtigt wird.

Basel, im September 1928.

Ein neuer Versuch über die Mitführung des Äthers.

Von **Arnold Dworsky** in Vyskov.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Januar 1928.)

Es wird ein Versuch über die Mitführung des Äthers durch die Erde vorgeschlagen; dieser prinzipiell sehr einfache Versuch vermeidet Reflexionen. Wird ein Lichtstrahl, der auf einen entfernten Schirm fällt, während 24 Stunden beobachtet, so sollte er auf dem Schirm einen Kreis oder eine gerade Linie beschreiben, je nachdem der Lichtstrahl senkrecht oder parallel zur Ebene der Erdbahn verläuft.

Der berühmte Interferenzversuch von Michelson war zu dem Zwecke angestellt worden, zu entscheiden, ob nach der Fresnelschen Anschauung der Äther bei der Bewegung der Erde um die Sonne in absoluter Ruhe bleibt, oder ob der Äther von der Erde mitgenommen wird. Aus dem negativen Ausfall des Versuches schloß Michelson, daß die Erde den sie umgebenden Äther mit sich führe*. Eine andere, auf den ersten Blick etwas gewaltsame Erklärung des Michelson-Versuches gibt unter Aufrechterhaltung des absolut ruhenden Äthers die Hypothese von Lorentz-Fitzgerald, daß die Länge λ eines Stabes in Richtung der Erdbewegung eine Verkürzung um $\lambda v^2/2c^2$ erfährt, wo v und c die Geschwindigkeiten der Erde und des Lichtes sind.

Der Michelson-Versuch bildet die Grundlage der Einsteinschen Relativitätstheorie und ergibt als Folgerung die Lorentz-Kontraktion. Aber der Michelson-Versuch ist kein entscheidender Beweis für die Existenz dieser Kontraktion. Riecke** nimmt außer der in Richtung der Bewegung erfolgenden Verkürzung auch eine solche senkrecht zur Bewegung an und zeigt, daß es eine unendlich große Anzahl derartiger Annahmen gibt, die sämtlich die durch die Bewegung bedingten Verlängerungen der Lichtwege kompensieren und daher mit den Ergebnissen der Beobachtung in Übereinstimmung stehen. In ähnlicher Weise wie Riecke, erklärt Rose-Innes*** unter Verzicht auf die Relativitätstheorie den negativen Befund Michelsons, indem er einen Einfluß der Erdbewegung senkrecht zur Erdbahn annimmt, einen Einfluß, der mit zunehmender Entfernung von der Erde verschwinden müßte. Birkeland**** schreibt dem die Erde umgebenden Äther eine durch die Erdbewegung verursachte

* A. A. Michelson und E. W. Morley, Phil. Mag. (5) **24**, 449—463, 1887.
** E. Riecke, Göttinger Nachr., Math.-Phys. Klasse 1911, S. 271—277.
*** J. Rose-Innes, Phil. Mag. (6) **27**, 150—153, 1914.
**** R. Birkeland, Phil. Mag. (6) **37**, 150—156, 1919.

Anisotropie zu und kommt so zu dem Schluß, daß die Stellung des Interferenzapparates zur Richtung der Erdbewegung keinen Einfluß auf die Zeit besitzt, die das Licht zum Zurücklegen der Wege im Michelson-Versuch braucht.

Eine weitere Möglichkeit der Erklärung des Michelson-Versuches ist die folgende: Nach der Wellen- oder elektromagnetischen Theorie bleibt das Reflexionsgesetz gültig, wenn sich der reflektierende Spiegel senkrecht zu seiner Normalen bewegt*. Anders liegen die Verhältnisse aber, wenn es sich um ponderable Körper in einem bewegten System handelt. Gilt vom Standpunkt der Emissions-, der Lichtquantentheorie das Reflexionsgesetz in einem bewegten System nicht mehr streng, so könnte in dem zur Erdbewegung senkrechten Strahlengang der Reflexionswinkel am bewegten Spiegel gerade so viel größer sein, daß zwischen den Lichtwegen in Richtung der Erdbewegung und senkrecht hierzu keine Differenz besteht oder nur eine so kleine, daß sie durch den Michelson-Versuch nicht festgestellt werden kann.

Kürzlich hat Miller** den Michelson-Versuch in der Ebene und auf dem Mount Wilson wiederholt und in der Seehöhe von 1731 m eine Verschiebung der Interferenzstreifen beobachtet, die etwa $^1/_{10}$ Streifenabstand betrug. Hiernach würden Erde und Äther in der Höhe von 1731 m sich mit einer relativen Geschwindigkeit von etwa 10 km/sec gegeneinander bewegen. Strum*** erklärt sowohl das negative Ergebnis von Michelson wie auch die neuen Beobachtungen von Miller durch die Annahme einer funktionellen Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit der Lichtquelle.

Nimmt man mit Michelson an, daß die Erde bei ihrer Bewegung den Äther mitführt, so ergibt die Erklärung der Aberration des Fixsternlichts Schwierigkeiten, die aber durch Stokes**** behoben wurden, der nachwies, daß sowohl der unbewegliche Äther Fresnels wie der bewegliche, wirbelfreie Äther die Aberration richtig zu berechnen erlaubt; eine gewisse Schwierigkeit bietet hier allerdings die Forderung der Wirbelfreiheit, aber auch die Relativitätstheorie löst nicht alle Schwierigkeiten, die sich aus der Aberration ergeben. Denn die Relativitätstheorie vermag

---

* P. Drude, Lehrbuch der Optik, 3. Aufl., S. 460, 1912. E. Kohl, Ann. d. Phys. (4) **28**, 259—308, 1909. M. v. Laue, Ann. d. Phys. (4) **33**, 186—191, 1910.

** Dayton C. Miller, Phys. Rev. (2) **19**, 407—408, 1922 und **27**, 812, 1926.

*** L. Strum, ZS. f. Phys. **24**, 20—23, 1924.

**** P. Drude, Lehrbuch der Optik, 3. Aufl., S. 470—473, 1912.

nicht die Aberration als unabhängig von der Bewegung der Lichtquelle nachzuweisen *.

Im Hinblick auf die Wichtigkeit des Michelson-Versuches und auf die vielen Erklärungsmöglichkeiten seines negativen Ergebnisses dürfte es angebracht sein, auf einen neuen Versuch hinzuweisen, der geeignet erscheint, die Frage nach der Mitführung des Äthers durch die Erde zu entscheiden.

In Fig. 1 stelle der Kreis die Erde dar, AA_1 sei ihre Achse, BC sei eine 1 km lange Strecke, die senkrecht zu der durch den Pfeil angedeuteten Richtung der Erdbewegung im Weltraum liegt, LD sei ein Lichtstrahl, der von der Lichtquelle L ausgeht und in einiger Höhe über dem Erdboden läuft. Für einen Beobachter wird die Strecke LD nicht etwa vertikal, sondern horizontal liegen; in Fig. 2 ist sie deshalb horizontal

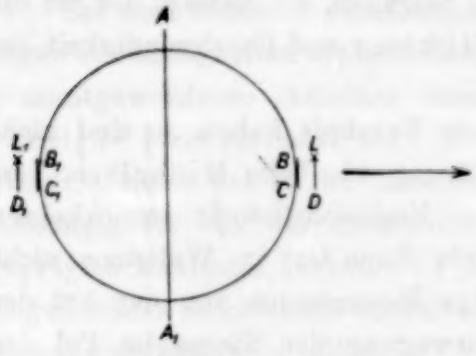


Fig. 1.

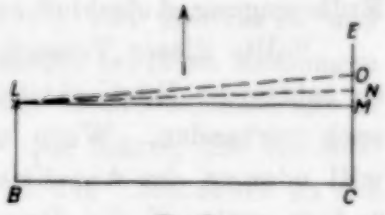


Fig. 2.

und der Deutlichkeit wegen in einem größeren Maßstabe gezeichnet. In gleicher Höhe mit der Lichtquelle L über dem Erdboden, aber 1 km entfernt, befinde sich auf einem Schirm CE eine Marke M. Der von L ausgehende Lichtstrahl erzeuge auf dem Schirm CE einen Lichtfleck von nur wenigen Zentimetern Durchmesser und treffe die Marke M. Die Geschwindigkeit der Erde beträgt rund 30 km/sec.

Die Lichtquelle L nimmt zwar an der Erdbewegung teil, aber der von ihr ausgehende Lichtstrahl wird in der Gegend des Schirmes CE der Erde näher sein, als es wäre, wenn die Erde stillstände. Zum Zurücklegen der 1 km langen Strecke braucht das Licht $^1/_{300\,000}$ Sekunde, und da in einer Sekunde die Erde sich um 30 km weiter bewegt, ist der Lichtfleck auf dem Schirm CE um $^{30}/_{300\,000}$ km $=$ 10 cm der Erde genähert. Demgemäß hatte der Lichtstrahl ursprünglich etwa die Richtung LN; da die Erde sich aber ihm fortwährend näherte, so trifft der Lichtfleck nicht auf die Stelle N, sondern auf die um 10 cm tiefere Marke M.

* R. Tomaschek, ZS. f. Phys. **32**, 397—402, 1925.

Nach 12 Stunden wird der Lichtstrahl infolge der Drehung der Erde um ihre Achse die Lage $L_1 D_1$ (Fig. 1) haben. Die Erde nähert sich jetzt nicht dem Lichtstrahl, sondern sie entfernt sich von ihm. Der Lichtstrahl, der beim Verlassen der Lichtquelle noch immer die Richtung nach der Stelle N des Schirmes hat, wird jetzt nicht in M, sondern auf der um 20 cm höheren Stelle O (also 10 cm höher als N) einen Lichtfleck erzeugen. Während der 24 Stunden eines Tages beschreibt der Lichtfleck auf dem Schirm CE einen Kreis, dessen Durchmesser 20 cm beträgt. Liegt der Lichtstrahl LD nicht in der Ebene der Fig. 1, sondern senkrecht zu ihr, so bewegt sich der Lichtfleck während 24 Stunden in einer 20 cm langen Geraden, die er in dieser Zeit zweimal durchläuft.

Es ist nicht nötig, den Lichtweg, wie es wegen der Einfachheit der Rechnung geschah, 1 km lang zu wählen. In einer Entfernung von 50 m würde die maximale Verschiebung 1 cm betragen, ein Betrag, der für die Beobachtung ausreichend ist, um über Richtung und Geschwindigkeit der Erdbewegung Aufschluß zu geben.

Sollte dieser Versuch kein positives Ergebnis haben, so sind nicht so zahlreiche Möglichkeiten einer Erklärung wie beim Michelson-Versuch vorhanden. Wenn man nicht zur Emissionstheorie zurückkehren will oder zu der Annahme, daß die Erde ihren Ort im Weltraum nicht ändere, während die Sterne kreisförmige Bewegungen von der Art der Erdbahn ausführen, so daß die Kreisbewegung der Sterne im Pol der Erdbahn nicht eine scheinbare, sondern eine reelle wäre, so bleibt nur übrig, anzunehmen, daß der Äther bei der Bewegung der Erde mitgenommen wird.

Der vorgeschlagene Versuch ist prinzipiell sehr einfach, aber nicht ganz leicht auszuführen. Er hat jedoch gegenüber dem Michelson-Versuch den Vorzug, daß Reflexionen und die Hin- und Rückwege der Lichtstrahlen vermieden sind, und daß es nur auf eine einzige Richtung ankommt. Er ist auch zwischen hohen Gebäuden oder auf Berghöhen auszuführen und dürfte im Falle des negativen Ausgangs geeignet sein, das obenerwähnte Millersche Ergebnis einer Nachprüfung zu unterziehen.

Zum Schluß möchte ich Herrn Dr. L. Janicki, der mich in liebenswürdiger Weise auf die einschlägige Literatur hingewiesen hat, meinen besten Dank aussprechen.

Vyskov (Wischau), Mähren.

Zur Kenntnis des Wechselstromlichtbogens in Flüssigkeiten.

(Bemerkung zu der gleichnamigen Arbeit von Bodforss und Frölich.)

Von **A. v. Engel** in Berlin-Wilmersdorf.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 26. September 1928.)

Die von Bodforss und Frölich an einem Flüssigkeitsbogen im Schwingungskreis gemessene hohe Spannung kommt durch periodische Stromunterbrechungen zustande; sie ist daher nicht mit der normalen Lichtbogenspannung identisch. (Beweis durch Messung mit kontinuierlichem Wechselstrom.) Die dem Lichtbogen zugeführte Leistung läßt sich mithin nicht bestimmen als Produkt der Effektivwerte der Bogenspannung und des Stromes, da diese Größen nicht gleichzeitig wirksam sind.

Bei dem Studium der Erscheinungen, welche für elektrische Lichtbogen in Flüssigkeiten typisch sind, fiel unter den wenigen in der Literatur bekanntgewordenen Arbeiten besonders die 1922 von Bodforss und Frölich* veröffentlichte auf. Die Verfasser fanden bei ihren Messungen über die Masse des in der Zeiteinheit zerstäubten Elektrodenmaterials in Abhängigkeit von der effektiven Stromstärke eine Kurve, die ein ausgeprägtes Maximum aufweist. Ferner wurde von den Autoren die an der Bogenstrecke herrschende effektive Spannung, welche für den Zerstäubungsvorgang wirksam sein sollte, der Größenordnung nach zu 600 bis 2000 Volt bei Strömen zwischen 0,5 und 3 Amp. und Bogenlängen von 0,1 bis 0,35 mm beobachtet. Der Wechselstrombogen brannte dabei z. B. zwischen Kupferelektroden in Äthyläther.

In der genannten Arbeit sind bereits, besonders was den merkwürdigen Verlauf der in die Flüssigkeit übergangenen Materialmenge betrifft, Zweifel an der Realität der gefundenen Gesetzmäßigkeiten ausgesprochen. Da jedoch inzwischen diese Veröffentlichung in alle Handbücher ohne Zusatz aufgenommen wurde, hielt ich die folgenden Ausführungen, welche eine Erklärung und Berichtigung geben sollen, für zweckmäßig.

Bodforss und Frölich benutzen als Stromquelle ein 48-Perioden-Wechselstromnetz, welches einen aus einem Boas-Transformator und Kondensatoren bestehenden Schwingungskreis speist. Die Entladungsstrecke ist vermutlich in Serie mit dem Kondensator geschaltet; die Arbeit enthält darüber nichts Näheres. Diese Angaben schon erregten den

* Sven Bodforss und P. Frölich, ZS. f. Phys. **10**, 69, 1922.

Verdacht, daß die Entladung durch unregelmäßig folgende stromlose Pausen unterbrochen war. Jeder Stromstoß kann aus ein oder mehreren Halbwellen (mit der Frequenz des Schwingungskreises) bestehen, ein neuer Schwingungszug folgt jedesmal, wenn die aus Kondensatorspannung und Transformatorspannung sich ergebende Summenspannung (Momentanwert) die Zündspannung der Entladestrecke erreicht*. Der Effektivwert des mittels Hitzdrahtinstrumentes beobachteten Wechselstromes gibt über Zahl und Größe der hochfrequenten Amplituden nur indirekt Auskunft und kann daher bei der in intermittierenden Flüssigkeitsbogen meist fehlenden Konstanz nur mit Vorsicht zur Bestimmung der Bogenleistung (-arbeit) herangezogen werden.

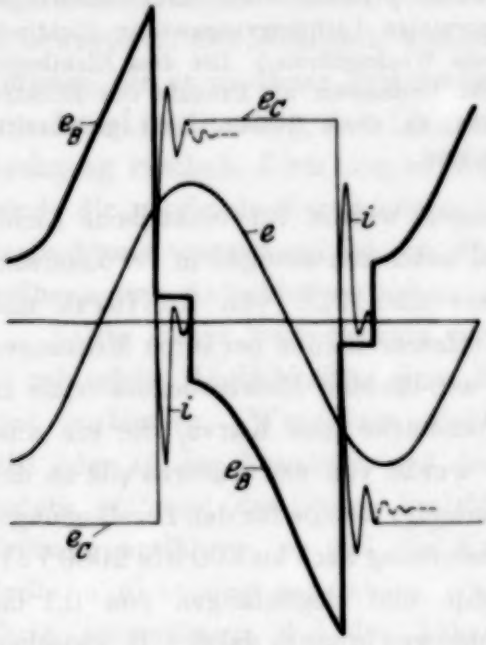


Fig. 1.
Zeitlicher Strom- und Spannungsverlauf eines Schwingungskreises mit in Serie geschaltetem Lichtbogen.

Die hauptsächliche Störung liegt in der Anzeige des zur Spannungsmessung an der Bogenstrecke verwendeten Elektrometers. Der mutmaßliche Spannungsverlauf ist der in Fig. 1 dargestellte. Darin bedeuten e die treibende Spannung, e_C die Kondensatorspannung, e_B die Bogenspannung und i den Strom. Der Verlauf der Spannung e_B ist durch die Höhe der Kondensatorgleichladung, welche vom Abreißen des Stromes herrührt, beeinflußt; die Messung von e_B im Schwingungskreise gibt größenordnungsmäßig verschiedene Werte gegenüber der in einem Kreise ohne Kondensator.

Die Vermutungen erhalten eine Stütze durch die bisherigen Beobachtungen an Lichtbogen in anderen organischen Flüssigkeiten. Trotzdem glaubte der Verfasser auf die im folgenden beschriebenen Versuche nicht verzichten zu können.

Die verwendete Meßanordnung (Fig. 2) besteht aus einen Drehstromgenerator G (50 Per/s), der Selbstinduktion L (etwa 0,3 Henry) und der aus zwei Kupferkugeln von 3 mm Durchmesser bestehenden Entladungsstrecke in einem mit Äthyläther gefüllten Glasgefäß. Strom- und Spannungs-

* R. Rüdenberg, Elektr. Schaltvorgänge. Berlin, Springer. 2. Aufl., 1927.

verlauf wurden mittels der Meßschleifen S_1 und S_2 eines Siemens-Blondel-Oszillographen aufgezeichnet. Da die Erhaltung des Lichtbogens geringerer Stromstärke (unter 4 Amp.) selbst bei einer Generatorspannung von 500 bis 900 Volt und einigen Zehntel Millimetern Kugelabstand schwierig ist, wurde folgendes Verfahren benutzt: Zunächst wurde mittels eines Metallstückes der Bogen mit höherer Stromstärke (etwa 10 Amp.) eingeleitet

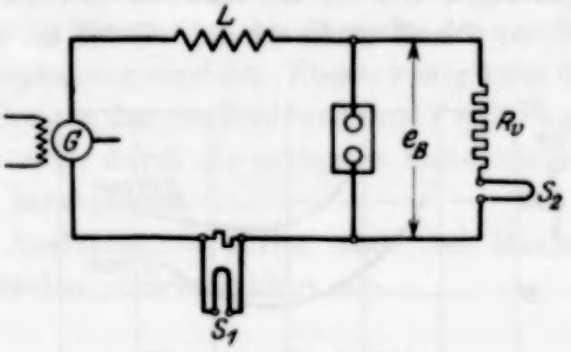


Fig. 2. Versuchsschaltung.

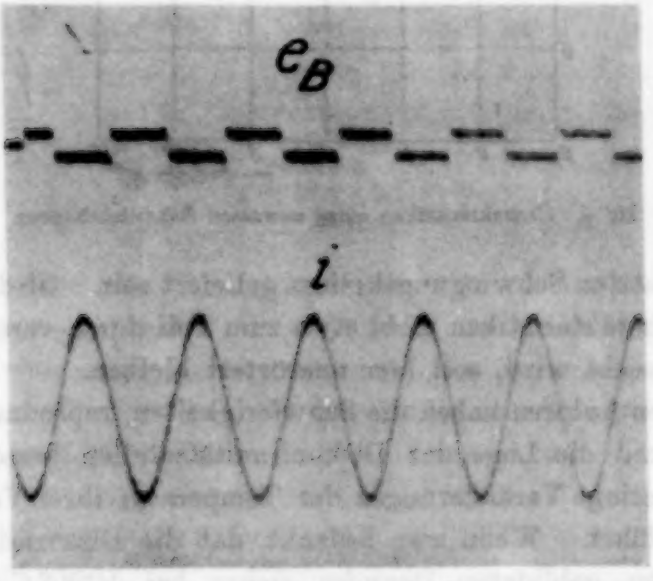


Fig. 3. Lichtbogen in Äthyläther. Oszillogramm der Bogenspannung und des Stromes.

und nach dem Zünden die Generatorspannung durch allmähliches Zuschalten von Erregerwiderständen bis auf die Remanenzspannung herunter geregelt. Dieser ganze, wenige Sekunden dauernde Vorgang wurde oszillographiert.

Fig. 3 zeigt einen Teil eines Oszillogramms, aus welchem im Gegensatz zu Fig. 1 ein regulärer Verlauf von Strom (i) und Bogenspannung (e_B) zu ersehen ist. Das Bogenspannungsbild ist durch die drei Ordinaten:

Zünd-, Lösch- und Brennspannung, genügend beschrieben. Unter Brennspannung (von der Simonschen Schule auch als Wendespannung bezeichnet) verstehen wir die Bogenspannung im Augenblick des Strommaximums. Die Abhängigkeit der Brennspannung vom Effektivwert des Bogenstromes gibt Fig. 4 wieder. Im Gegensatz zu den Bodforss-Frölichschen Kennlinien verlaufen unsere Kurven zwischen 14 bis 23 Volt, bezogen auf Bogenlängen von 0,1 bis 0,25 mm und Stromstärken von 2 bis 10 Amp. effektiv. Damit dürfte der Beweis für die störende Wirkung

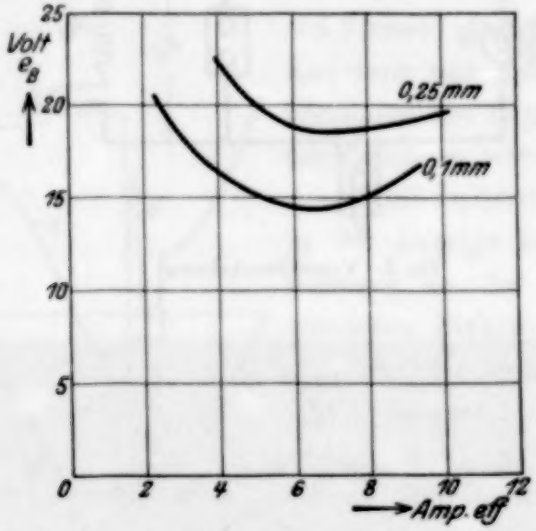


Fig. 4. Charakteristiken eines normalen Ätherlichtbogens.

des früher benutzten Schwingungskreises geliefert sein. Ob der ansteigende Ast unserer Charakteristiken nicht etwa zum Teil durch veränderte Bogenlänge vorgetäuscht wird, soll hier unerörtert bleiben.

Die beiden Autoren haben die Schwierigkeiten, reproduzierbare Werte zu erhalten und die Lage der Diskontinuitätsstellen besser fixieren zu können, auf geringe Veränderungen der Temperatur ihrer Versuchsflüssigkeit zurückgeführt. Wenn man bedenkt, daß die Dissoziation des durch den Lichtbogen gebildeten Dampfes sicher bei 1000° C und darüber merklich stattfindet, der Lichtbogen der Einwirkung der (in Ruhe gedachten) Gashülle mit ihrer auf Siedetemperatur befindlichen Außenhaut unmittelbar entzogen ist, so ist die obige Erklärung durchaus nicht plausibel. Bei unseren Versuchen haben Temperaturänderungen des Äthers von $\pm$ 10° C keinen Einfluß auf die Größe der Brennspannung ergeben. Die beobachteten Sprungstellen sind wahrscheinlich darauf zurückzuführen, daß bei höheren Stromstärken die Zahl der bis zum Abreißen des Stromes ablaufenden Halbwellen vergrößert wird, wodurch der

durch das Elektrometer gemessene quadratische Mittelwert der Spannung e_B infolge kleinerem e_C sinkt (siehe Fig. 1, e_C gestrichelt).

Schließlich sei noch der Einfluß der Zünd- und Löschspitzen auf die Anzeige von Instrumenten, die den Effektivwert der Spannung messen, kurz behandelt. Wenn auch das Verhältnis Zünd- bzw. Löschspannung zu Brennspannung der Größe nach zehn und mehr beträgt, so ist die Zeitdauer dieser Spitzen beim ungestörten Bogen so kurz, daß der mittels Voltmeters gemessene Wert selten das Doppelte der aus dem Oszillogramm ermittelten Brennspannung erreicht. Ebensowenig kann die hohe Frequenz ($1{,}8 \cdot 10^6$ Hertz) Ursache der von Bodforss und Frölich gefundenen hohen Bogenspannungen sein; durch die geringere Entionisierungszeit wird die Zündspitze sogar herabgesetzt.

Mit diesen Ausführungen dürfte auch das Maximum der anfangs behandelten Zerstäubungskurve erklärt sein.

Nachtrag zu der Arbeit: Bestimmungen von Schwächungskoeffizienten verschiedener Metalle und organischer Verbindungen im kurzwelligen Röntgengebiet.

Von **H. Stumpen** in Bonn.

(Eingegangen am 10. Oktober 1928.)

Von Herrn Dr. H. Seemann in Freiburg werde ich darauf aufmerksam gemacht, daß die in der unter obigem Titel erschienenen Arbeit* verwendete spektrometrische Methode in der angegebenen Form nicht von Bragg, sondern von Seemann** angegeben wurde. Es handelt sich dabei um die Verwendung eines eng ausgeblendeten Strahlenbüschels, das an dem Kristall zur Reflexion kommt.

Bonn, im Oktober 1928.

---

* H. Stumpen, ZS. f. Phys. **50**, 215, 1928.

** Deutsche Patentschrift Nr. 338065, Kl. 21g, Gruppe 16.

Zur Frage nach der Energieübertragung bei Kernstößen.

Von **W. Kuhn** in Heidelberg.

(Eingegangen am 23. September 1928.)

Ein größenordnungsmäßiger Ansatz ergibt, daß bei Stößen schneller α-Teilchen auf Atomkerne im allgemeinen nur wenige Prozent von der ursprünglichen Energie der α-Teilchen auf das Innere der Kerne übertragen wird. Wenn, in Anlehnung an die Versuche über Atomzertrümmerung, die letztere Energie als Maß für die Kernstabilität angenommen wird, so würde das Ergebnis mit Hinblick auf astrophysikalische Gesichtspunkte Bedeutung gewinnen, indem dann eine Umwandlung von Elementen unter den Bedingungen, die im Innern von Fixsternen vorhanden sind, erwartet werden kann.

Die Stabilität der Atomkerne wird wohl im allgemeinen beurteilt nach der Energie, die man etwa einem α-Teilchen geben muß, damit bei einem Kernstoß ein Zerfall des getroffenen Kerns herbeigeführt werden kann. Diese Energie ist bekanntlich von derselben Größenordnung wie die Energie, die bei spontanen radioaktiven Prozessen freigesetzt wird (also etwa 10^{-5} Erg). Wenn man ein derartiges Kriterium für die Stabilität benutzt, so bedeutet das eine Aussage über eine wichtige Kerneigenschaft, die besonders bei astrophysikalischen Betrachtungen eine große Rolle spielt. Es dürfte darum von Interesse sein, auf einen Gedankengang hinzuweisen, durch den man mit Bezug auf die Kernstabilität zu einem etwas anderen Ergebnis geführt wird.

Man kann sich nämlich fragen, inwiefern die Energie des stoßenden α-Teilchens auf die inneren Freiheitsgrade des getroffenen Kerns übertragen wird und inwiefern die gegenseitige Einwirkung beim Stoß in einer einfachen Abstoßung ohne Strukturbeeinflussung bestehen wird. Die Tatsache, daß die Ergebnisse der Ablenkungsversuche genau nach dem Coulombschen Gesetz zu berechnen sind, so lange Kernabstände vorkommen, die größer als etwa 10^{-12} cm sind, kann als Ausdruck dafür betrachtet werden, daß die Abstoßung ohne Beeinflussung in vielen Fällen praktisch allein vorliegt. Wenn nämlich hier, wenigstens vorübergehend, Energie zur Herbeiführung innerer Veränderungen in den Kernen verwendet würde, so dürfte sich dieses in der zeitlichen Änderung der Bewegungsenergie des stoßenden Teilchens und damit im Ergebnis des Ablenkungsversuchs bemerkbar machen.

Wenn nun die Energie des α-Teilchens in vielen Fällen überhaupt nicht auf den gestoßenen Kern übertragen werden kann, so ist die Frage naheliegend, bis zu welchem Grade eine solche Energieüberführung bei

denjenigen Stößen statthat, bei denen gerade noch eine Katastrophe im getroffenen Kern vermieden wird. Es dürfte dann dieser Energiebetrag ein ebenso richtiges Maß für die Stabilität des Kerns sein wie die primäre Energie, die das α-Teilchen vor einem solchen Stoße besessen hat.

Eine größenordnungsmäßige Abschätzung dieser für die Stabilität maßgebenden Energie erfolgt sehr leicht in Anknüpfung an früher gegebene Betrachtungen*, wo aus der Größe der Polarisierbarkeit leichter Atomkerne und der Größe der γ-Strahlfrequenzen der Schluß gezogen wurde, daß die γ-Strahlung wahrscheinlich auf eine Beweglichkeit der H- oder He-Partikel im Innern des Kerns zurückzuführen ist. Bereits bei Anlaß jener Betrachtung wurde die Verschiebung angegeben, die ein im Mittelpunkt des Kerns elastisch gebundenes Teilchen (Ladung e, Masse m, Frequenz der freien Schwingung ν_0) während des Heranfliegens einer α-Partikel erfährt**. Nach demselben Prinzip könnte auch die Gesamtenergie berechnet werden, die zu irgendeinem Zeitpunkt während oder nach dem Stoße auf die Partikel übergegangen ist. Die Berechnung, die insbesondere für den Fall eines nicht gerade zentralen Stoßes umständlich ist und die ja ohnehin nur größenordnungsmäßige Richtigkeit beanspruchen darf, kann indessen umgangen werden, wenn es sich nur um das Endergebnis handelt und nicht um die Ermittlung des Stoßverlaufs im einzelnen: Bei den in Frage stehenden Kernstößen dauert nämlich der Stoß nur etwa 10^{-21} sec, indem die Geschwindigkeit des α-Teilchens ein- bis zweimal 10^9 cm/sec, die in Frage kommenden Kernabstände etwa 10^{-12} cm betragen. Demgegenüber ist die Schwingungsdauer einer γ-Strahlung mittlerer Frequenz ungefähr 10^{-20} sec, also etwa zehnmal größer als die Stoßdauer. Wir begehen, wie sich leicht durch Vergleich mit der strengeren Theorie einsehen läßt, bei der Berechnung der beim Stoße insgesamt überführten Energie einen Fehler, der größen-

---

* W. Kuhn, ZS. f. Phys. **44**, 32, 1927.

** Annahmen und Art der Behandlung entsprechen also in mancher Hinsicht der von Bohr im Jahre 1913 (Phil. Mag. **25**, 12, 1913) entwickelten Theorie des Bremsvermögens von Atomen für α-Strahlen. Die vorliegende Behandlung stellt somit einen Versuch dar, das Verhalten wenigstens der schwereren Kernbestandteile durch ähnliche Begriffe zu beschreiben, wie sie sich bei der Betrachtung des äußeren Atomaufbaues bewährt haben. Man kann noch genauer sagen, daß in der Quantentheorie eine für alle Dispersionsvorgänge geltende Äquivalenz zwischen im Atom irgendwie gebundenen Teilchen und Oszillatoren entsprechender Ladung, Masse und Eigenfrequenz gefordert wird und daß nun diese Äquivalenz, die ja besonders ausdrücklich in der Matrizenmechanik betont wird, auch für das Verhalten der im Kern gebundenen schweren Bestandteile vorausgesetzt wird.

ordnungsmäßig nicht in Betracht fällt, wenn wir so rechnen, als ob die Stoßdauer verschwindend kurz gegenüber der Periode der freien Schwingung wäre *.

Mit der besprochenen Vereinfachung wird jetzt die auf ein H-Teilchen übertragene Energie leicht erhalten, indem man bedenkt, daß der vom α-Teilchen auf den Kern übertragene Impuls in erster Näherung gleich

$$J = 2\,\mu\,v_0 \sin\vartheta$$

ist. Es ist dabei $\mu = m_\alpha \dfrac{m_K}{m_\alpha + m_K}$, m_α die Masse des α-Teilchens, m_K die des getroffenen Kerns und $2\,\vartheta$ der Winkel, um den das α-Teilchen beim Stoß aus seiner Anfangsrichtung abgelenkt wird. Ist Z die Ordnungszahl des getroffenen Kerns, so wird offenbar der Z-te Teil dieses Impulses auf das in Frage stehende H-Teilchen übertragen werden. Da nach der festgesetzten Vereinfachung die Übertragung dieses Impulses sehr rasch erfolgt, ist die auf das H-Teilchen übertragene Energie:

$$E' = \frac{m_H}{2}\,v'^2 = \frac{m_H}{2}\left(\frac{2\,\mu\,v_0 \sin\vartheta}{m_H\,Z}\right)^2.$$

Es muß diese Größe noch mit einem Faktor $\frac{1}{4}$ multipliziert werden, indem der getroffene Kern als Ganzes wegen seiner ungefähr halb so großen spezifischen Ladung eine halb so große Geschwindigkeit wie das H-Teilchen erhalten wird und indem bei der Berechnung der auf das Kerninnere übertragenen Energie die relative Geschwindigkeit des H-Teilchens in bezug auf den Kernmittelpunkt maßgebend ist. Hätten sämtliche Teile des Kerns dieselbe spezifische Ladung, so würde ja keine Verzerrung und damit keine Energieübertragung auf das Innere des Kerns erfolgen. Falls also die Polarisierung wirklich von positiven Teilchen herrührt, so kann die Aussage dahin präzisiert werden, daß es sich um eine Beweglichkeit speziell der Protonen handeln dürfte. Der Ausdruck für die über-

---

* Würde z. B. die erste Hälfte des Impulses p zur Zeit $t = 0$, die zweite Hälfte eine Viertelperiode später auf das Teilchen übertragen, so wäre die entsprechend überführte Energie gleich $\frac{1}{2\,m}\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4\,m}\,p^2$, während bei Übertragung des ganzen Impulses in einem einzigen Zeitpunkt die überführte Energie gleich $\frac{1}{2\,m}\,p^2$, also doppelt so groß wäre. Man sieht so, daß bei Ablenkungswinkeln in der Nähe von 180^0 die abgeschätzte Energie etwas, aber nicht wesentlich zu groß sein wird, wenn der ganze Stoßvorgang innerhalb einer Zehntelperiode vor sich geht.

tragene Energie wird jetzt, da $\frac{m_K}{m_\alpha} = \frac{Z}{2}$, d. h. das Atomgewicht etwa proportional der Ordnungszahl ist:

$$E' = \frac{4}{(Z+2)^2} E_0 \sin^2 \vartheta. \qquad (1)$$

E_0 ist dabei die Energie des α-Teilchens vor dem Stoß. Wie aus der vorhergehenden Ermittlung dieser Beziehung hervorgeht, ist ein solcher Energiebetrag E' nur dann zu erwarten, wenn ν_0 wesentlich kleiner als die reziproke Stoßdauer (etwa 10^{21}) ist. Bei besonders stabilen und wenig polarisierbaren Kernen, wie etwa beim He, ist es natürlich möglich, daß die ν_0-Werte besonders hoch liegen und es würde in diesem Falle der Wert von E' kleiner als der Wert, der aus Formel (1) zu berechnen ist. Für Atomkerne wie Mg und Al dürften die Voraussetzungen wohl einigermaßen zutreffen und man sieht, daß hier die beim Stoße übertragene Energie nur einige Prozent von der ursprünglichen Energie des α-Teilchens betragen kann.

Es ist bereits früher (l. c.) darauf hingewiesen worden, daß eine Polarisierbarkeit des Kerns wenigstens teilweise von einer Beweglichkeit der Elektronen im Innern des Kerns herrühren kann. Hier müßte es sich um Elektronen handeln, deren Eigenfrequenzen bei wenigstens $5 \cdot 10^{21}$ liegen, wo also in allen Fällen die Schwingungsfrequenz größer als die Stoßdauer wäre. Es würde in diesem Falle keine Energie bleibend auf den Kern übertragen; die Polarisierung des Kerns würde adiabatisch erfolgen und während des Wegfliegens des stoßenden α-Teilchens auf Null zurückgehen. Es würde dieser Fall der ursprünglichen Annahme von Debye entsprechen, daß die Polarisierung jederzeit genau dem gerade vorherrschenden äußeren Felde entspricht. Da also hier nach dem Stoße keine Energie als Schwingungsenergie der Elektronen zurückbleibt, so ließe sich von einer Polarisierungsenergie nur noch in dem Sinne sprechen, daß damit die Arbeit gemeint wird, die geleistet werden muß, um die beim Stoße maximal auftretende Verzerrung des Kerns herbeizuführen. Man erhält hier für den Fall eines verschiebbaren Elektrons ($\nu_0 = 5 \cdot 10^{21}$) mit $E_0 = 7 \cdot 10^{-6}$ Erg, $Z = 13$ bei einem zentralen Stoß: $\frac{E'}{E_0} = 0{,}02$. Wie schon früher betont wurde (l. c. S. 35), müssen aber Betrachtungen über das Verhalten der Elektronen im Kern in viel höherem Maße bedenklich erscheinen als Betrachtungen über das Verhalten von Protonen und α-Teilchen. Es muß darum auf die große Unsicherheit dieser auf die Elektronen bezüglichen Angabe hingewiesen werden.

Das Resultat der bisherigen Betrachtungen besteht jetzt in der Aussage, daß bei Kernstößen nur wenige Prozent der ursprünglichen Energie des stoßenden α-Teilchens auf die inneren Freiheitsgrade des getroffenen Kerns übergeführt werden können. Da jetzt α-Teilchen mit einer primären Energie von etwa $6 \cdot 10^{-6}$ Erg schon z. B. bei Al eine Kernzertrümmerung hervorrufen können, so läßt sich als Maß der Stabilität die Angabe machen, daß ein Atomkern unstabil werden kann, sobald seinen inneren Freiheitsgraden eine Energie von etwa 10^{-7} Erg zugeführt wird.

Es ist naheliegend, an Hand dieses Stabilitätsmaßes die Frage zu prüfen, unter welchen Bedingungen eine Beeinflussung des Kernzerfalls durch äußere Bedingungen erwartet werden kann. Insbesondere soll gezeigt werden, daß die Möglichkeit einer Umwandlung der Elemente unter den Bedingungen, die sich im Innern von Fixsternen finden, d. h. bei Temperaturen von etwa $5 \cdot 10^{7}$ °, nahegelegt ist. Man sieht dies wohl am besten ein, wenn man die Verhältnisse, die für den Ablauf chemischer Reaktionen maßgebend sind, den Verhältnissen, die für die Kernreaktionen im Innern der Fixsterne gegeben sind, gegenüberstellt. Es ist wohl bekannt, daß den bei Zimmertemperatur verlaufenden chemischen Reaktionen eine Aktivierungsenergie von etwa 10^{-12} Erg/Molekül oder 10000 bis 20000 cal/gMol zukommt. Dies heißt, daß bei Zusammenstößen zwischen Molekülen, die an und für sich reagieren könnten, eine Reaktion in Wirklichkeit nur dann einsetzt, wenn beim Zusammenstoß die genannte Aktivierungsenergie in irgendwelcher Form vorhanden ist. Die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein einer solchen Energie vom Betrage q ist dann bekanntlich proportional $e^{-\frac{q}{kT}}$, so daß die Größe q/T als Kriterium für das Auftreten einer endlichen Reaktionsgeschwindigkeit betrachtet werden kann. Die Größe q/T für eine bei Zimmertemperatur verlaufende Reaktion ist also etwa $\frac{10^{-12}}{300} \backsimeq 3 \cdot 10^{-15}$. Wenn andererseits die kritische Energie für einen Kernvorgang z. B. $3 \cdot 10^{-7}$ Erg ist, so wird bei $5 \cdot 10^{7}$ ° die maßgebende Größe $\frac{q}{T} = \frac{3 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{7}} = 6 \cdot 10^{-15}$. Sie erhält also einen ähnlichen Wert wie im Falle der chemischen Reaktion und es wird darum in den beiden Fällen eine ähnliche Reaktionsgeschwindigkeit erwartet werden.

Wenn also die Erörterungen über die Energieübertragung bei Kernstößen wenigstens größenordnungsmäßig dem richtigen Sachverhalt entsprechen, so läßt sich behaupten, daß Elementenumwandlung im Innern

von Fixsternen etwa mit derselben Berechtigung erwartet werden kann wie eine Esterverseifung oder dergleichen bei Zimmertemperatur. Es ist klar, daß dabei die kritische Energie nicht durch Stöße von α-Teilchen zugeführt wird, da α-Teilchen hinreichend großer Energie (10^{-5} Erg) zu selten sind. Dagegen ist eine Übertragung durch β-Teilchen und insbesondere durch γ-Strahlen naheliegend. Unter der Annahme, daß die γ-Strahlung durch im Kern gebundene H-Teilchen erzeugt wird, lassen sich ja die zu erwartenden Absorptionskoeffizienten abschätzen* und es läßt sich dann unter Hinzunahme des Planckschen Strahlungsgesetzes die Zeit berechnen, die durchschnittlich verstreicht, bis ein Atomkern eine Anregungsenergie q aus dem Strahlungsfeld durch Absorption entnimmt. Sie beträgt bei $T = 5 \cdot 10^{7\,0}$ etwa $\frac{1}{100}$ sec für den Fall, daß $q = 2 \cdot 10^{-7}$ Erg und etwa ein Jahr für $q = 3 \cdot 10^{-7}$ Erg.

Wenn auf der einen Seite durch diese Betrachtungen die Möglichkeit einer Umwandlung der Elemente und damit ein Freiwerden von Energie im Innern der Fixsterne dem Verständnis näher gebracht wird, so ist auf der anderen Seite zu betonen, daß nur exotherm thermodynamisch von selbst verlaufende Vorgänge unter dem dargestellten Gesichtspunkt betrachtet werden können. Die Energie, die bei einem Kernzerfall, besonders bei der Emission einer H- oder He-Partikel frei wird, wird ja im allgemeinen größer sein als der Betrag, der oben erhalten wurde als Anregungsenergie für das Auftreten eines derartigen Zerfalls. Das bedeutet, daß bei den angenommenen Temperaturen zwar die Energie aufgebracht werden kann, um einen sehr stark exothermen Vorgang auszulösen, daß aber die Energie fehlt, um einen solchen Vorgang auch rückgängig zu machen. Der Fall ist ähnlich dem, daß bei Zimmertemperatur etwa die Anregungsenergie aufgebracht werden kann, um das thermodynamisch nicht stabile Ozon, zum Zerfall zu bringen, daß aber der inverse Prozeß, die Bildung von Ozon, bei derselben Temperatur als Temperaturreaktion nicht in Frage kommt. Durch die Betrachtung würden also die Vorgänge im Innern der Fixsterne nur insofern dem Verständnis näher gebracht, als es sich um die Auslösung an und für sich schon möglicher exotherm verlaufender Vorgänge handelt.

Bekanntlich spricht auch vieles dafür, daß im Innern der Himmelskörper tatsächlich solche Vorgänge stattfinden. So muß z. B., um die Wärmeausstrahlung der Sonne zu bestreiten, eine Nachlieferung von Energie aus dem Innern von etwa 2 Erg pro Gramm Sonnenmasse pro

---

* W. Kuhn, ZS. f. Phys. 43, 56, 1927.

Sekunde stattfinden. Das ist eine Energieentwicklung, die etwa doppelt so groß ist wie die von reinem Uran im Gleichgewicht mit seinen Zerfallsprodukten. Andererseits werden die leichteren Atome, die doch da sind, irgendwie aus anderen entstanden sein und es besteht ja die Regel, daß die Elemente mit geradzahligem Atomgewicht einerseits häufiger sind und andererseits schwerer zertrümmerbar als die mit ungeradzahligem Atomgewicht. Ferner ergibt eine Betrachtung der von Aston bestimmten Massendefekte der Elemente, daß ein Minimum etwa bei der Ordnungszahl 26 vorhanden ist, das heißt also, daß sämtliche Isotopengewichte der verschiedenen Elemente etwas größer als ganzzahlig werden (z. B. 134,079 statt 134,000), falls ein Element in der Nähe des Eisens ganzzahlig gesetzt und zur Basis für die übrigen Atomgewichte genommen wird. Nun hat man, insbesondere mit Bezug auf die extremen Fälle, den radioaktiven Zerfall und die Beziehung des H zum He die Massendefekte mit Kernenergiefragen in Zusammenhang gebracht. So sollte z. B. bei Vereinigung von vier H-Kernen mit zwei Elektronen zu einem He-Kern ein Massenüberschuß von $4 \cdot 0{,}008\,g$ übrig bleiben und in Form von Energie (mc^2) abgegeben werden. In diesem Sinne müßte also ein Atom mit mehr als ganzzahligem Atomgewicht als energiereich, weil schwerer, betrachtet werden, verglichen mit einem Atom, dessen Massendefekt Null ist. Man würde deshalb die Atomkerne des Eisens und seiner Nachbarelemente als besonders energiearm, energetisch besonders stabil zu betrachten haben und es ist vielleicht bemerkenswert, daß gerade das Eisen in alten kosmischen Gebilden, wie unser Sonnensystem eins darstellt, in überwiegend großer Menge vorhanden ist.

Heidelberg, Chem. Institut der Universität.

Zur Theorie der lichtelektrischen Wirkung.

Von **Hans Th. Wolff** in Dresden.

(Eingegangen am 18. Oktober 1928.)

Es wird die Hypothese vorgeschlagen, daß beim Photoeffekt Leitungselektronen der Metalle emittiert werden, denen durch Stöße zweiter Art Energie von optisch angeregten Atomen übertragen wurde.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit haben P. Lukirsky und S. Prileżaev* den normalen Photoeffekt einer Reihe von Metallen, die mit verschiedenen Linien des Quecksilberbogens bestrahlt wurden, untersucht. Der Vergleich der Anregungsgrenzen ν_1 und ν_2 zweier Metalle, welche die Kontaktpotentialdifferenz $K_{1,2}$ besitzen, ergab die Beziehung

$$h\nu_1 - h\nu_2 = \varepsilon \cdot K_{1,2}. \quad (\varepsilon = \text{Elementarladung.})$$

Diese Gleichung war innerhalb der Beobachtungsfehler (einige hundertstel Volt) stets erfüllt. Nach ihr macht sich bei der Aussendung von Lichtelektronen augenscheinlich eine Ablösungsarbeit vom Mutteratom nicht geltend, so daß die Verfasser den Schluß ziehen, daß beim Photoeffekt die Leitungselektronen ausgesandt werden. Diese Anschauung wird auch von anderer Seite vertreten.

Bekanntlich rufen Röntgenstrahlen an Elektronen, welche im Atom fest gebunden sind, lichtelektrische Wirkung hervor, während die lose gebundenen Elektronen zur Comptonstreuung Veranlassung geben. Im Hinblick hierauf vermuten die Verfasser, daß doch eine nicht zu kleine Bindung der Photoelektronen im Metall vorhanden ist. Diese Annahme steht im Widerspruch zur Vorstellung des „Elektronengases" in Metallen, welche durch Sommerfelds Arbeiten neuerdings wesentlich an Bedeutung gewonnen hat**.

Im folgenden soll nun eine Anschauung vorgeschlagen werden, welche die vorliegende Schwierigkeit beseitigt und erlaubt, die lichtelektrische Wirkung als resonanzähnliche Erscheinung aufzufassen. Zu letzterer Hypothese veranlaßt besonders der selektive Photoeffekt. Dieser dürfte aber vom normalen keine tiefgreifende Wesensverschiedenheit aufweisen, denn Fr. Wolf*** hat an einer Kalium-Natriumlegierung im Wellenlängengebiet 365 bis 546 mμ gezeigt, daß die Geschwindigkeiten der in maximaler Menge austretenden Elektronen für die beiden Effekte

---

* P. Lukirsky und S. Prileżaev, ZS. f. Phys. **49**, 236, 1928.

** A. Sommerfeld, Naturw. **15**, 825, 1927 und **16**, 374, 1928.

*** Franz Wolf, Ann. der Phys. **83**, 1001, 1927.

nahezu gleich groß sind. Die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Lichtfrequenz ist somit in beiden Fällen dieselbe.

Die Vorstellung, daß die Photoelektronen die Anfangsenergie $h\nu$ erhalten, also keine Energie infolge einer Ablösungsarbeit aus den Atomen einbüßen, liegt einer Arbeit von A. W. Uspensky* zugrunde. In ihr wird die Zahl der Lichtelektronen als Funktion der Intensität und Wellenlänge des Lichtes berechnet und mit Suhrmanns experimentell erhaltenen Kurven in der Nähe der langwelligen Grenze für Ag und Pt befriedigende Übereinstimmung erreicht. Die genannte Vorstellung findet sich ferner in einer theoretischen Abhandlung von G. Polvani**.

Nach der in vorliegender Mitteilung vertretenen Anschauung sind beim Photoeffekt Stöße zweiter Art wirksam. Es wird angenommen, daß zunächst ein Atomelektron durch das auffallende Licht auf eine höhere Quantenbahn gehoben wird. Ein in der Nähe vorbeifliegendes Leitungselektron gebe die Veranlassung, daß jenes Atomelektron auf seine Ausgangsbahn zurückkehrt. Die hierbei frei werdende Energie $h\nu$ möge auf das Leitungselektron in Form von kinetischer Energie übertragen werden.

Damit das Photoelektron wirklich die Anfangsenergie $h\nu$ besitzt, ist erforderlich, daß es nicht schon zuvor eine merkliche kinetische Energie besaß. Es ist verständlich, wenn der beschriebene Vorgang eines Stoßes zweiter Art bei raschen Leitungselektronen nicht stattfindet. Man kann z. B. annehmen, daß bei einem schnell am Atom vorbeifliegenden Elektron nicht Zeit für die Energieübertragung vorhanden ist.

Fr. Kirchner*** weist darauf hin, daß ein Maximum des selektiven Photoeffektes eintritt, wenn ein Elektron von dem relativ häufigsten Anregungszustand, der Anfangsbahn einer Resonanzlinie, durch das auftreffende Lichtquant bis an die Oberfläche des Atoms gehoben werden kann. Damit das austretende Photoelektron die der Einsteinschen Beziehung entsprechende Geschwindigkeit erlangt, muß man annehmen, daß das Atomelektron bei dem oben behandelten Stoßvorgang wieder auf die Anfangsbahn der Resonanzlinie zurücksinkt. Dies dürfte bei der Stabilität der Resonanzbahn verständlich sein. Zudem ist es vielleicht möglich, daß mit der Besetzung der Resonanzbahn eine Konfigurationsänderung der Atomelektronen verbunden ist, welche zunächst noch fortbesteht, nachdem das eine Elektron an die Peripherie befördert worden

* Anatol W. Uspensky, ZS. f. Phys. **40**, 456, 1926/27.
** G. Polvani, Cim. (N. S.) **3**, 319, 1926.
*** Fritz Kirchner, Phys. ZS. **24**, 303, 1924.

ist, und zur Folge hat, daß dieses bei dem Stoßvorgang vorzugsweise auf die Resonanzbahn zurückkehrt.

Wesentlich andere Verhältnisse liegen bei der durch Röntgen- oder γ-Strahlen bewirkten Elektronenaussendung vor. Die betrachteten Stöße zweiter Art kommen hier nicht in Frage, vielmehr werden die Atomelektronen selbst emittiert. Demgemäß spielt jetzt die Arbeit, welche zur Entfernung eines Photoelektrons aus dem Atom erforderlich ist, eine wichtige Rolle. Daß jetzt die Atomelektronen selbst ausgesandt werden, ist natürlich dadurch bedingt, daß sie genügend große Energiequanten übertragen bekommen, um mit einer gewissen Geschwindigkeit den Wirkungsbereich ihrer Atome verlassen zu können. Auf diesen Fall bezieht sich die wellenmechanische Theorie des Photoeffektes, welche G. Wentzel* und Guido Beck** gegeben haben. Beck sagt in der Zusammenfassung am Schluß seiner Arbeit, daß unter dem Einfluß einer elektromagnetischen Welle Dispersion oder Photoeffekt eintritt, je nachdem die Frequenz der Welle diejenige des Serienkopfes unter- oder überschreitet. Im ersteren Falle würden nach unserer Hypothese außer der Dispersion auch die besprochenen Stöße zweiter Art eintreten können Auf einen weiteren Unterschied dieser beiden Fälle weist B. Gudden im Handbuch der Physik*** mit den Worten hin: „Schließlich führt jede Absorption im Röntgengebiet zu lichtelektrischer Wirkung; es ist nicht wie bei den Vorgängen an der Atomoberfläche zwischen lichtelektrisch wirksamer Absorption und der bei sehr langen Wellen ausschließlich verbleibenden Absorption ohne Elektronenabspaltung zu unterscheiden". Diese Tatsache fügt sich der in vorliegender Notiz vertretenen Anschauung ungezwungen ein. Man braucht sich nur vorzustellen, daß unter den Stößen zweiter Art auch solche sind, bei denen nicht auf Leitungselektronen, sondern Atome bzw. Moleküle Energie übertragen wird, indem eine Umwandlung von Strahlungsenergie in Wärmebewegung stattfindet. Solche Stöße übertreffen an Zahl offenbar weit diejenigen, welche zur Emission von Photoelektronen führen.

Dresden, Oktober 1928.

---

* G. Wentzel, ZS. f. Phys. **40**, 574, 1926.

** Guido Beck, ebenda **41**, 443, 1927. Vergleiche auch die Theorie von J. R. Oppenheimer, ebenda **41**, 268, 1927.

*** Handb. der Phys. XIII, 150, 1928.

Quantenmechanische Theorie der natürlichen optischen Aktivität von Flüssigkeiten und Gasen.

Von **L. Rosenfeld** in Göttingen.

(Eingegangen am 21. Oktober 1928.)

Auf Grund der Quantenmechanik wird die allgemeine Formel für das Drehungsvermögen aufgestellt. Ein reiner Energiezustand des Systems erweist sich als nichtdrehend. Der Drehungssinn eines drehenden Zustandes ändert sich periodisch mit der Zeit; die Periode ist die Hälfte der von Hund definierten „Schwebungsperiode" des Systems.

§ 1. Kernkonfigurationen und Zustände eines Moleküls. Bei gegebenem (Elektronen-, Schwingungs- und) Rotationszustand hat die Energie eines n-atomigen Moleküls für $n \geqq 4$ im allgemeinen zwei verschiedene (benachbarte) Eigenwerte. Von den beiden zugehörigen Eigenfunktionen bleibt die eine bei einer Spiegelung (in bezug auf den Koordinatenursprung) unverändert, die andere kehrt ihr Vorzeichen um; die bzw. Zustände nennen wir „symmetrisch" und „antisymmetrisch" *. Eine Funktion, die bei der Spiegelung unverändert bleibt, wird auch „(in bezug auf die Spiegelung) symmetrisch", eine solche, die dabei ihr Vorzeichen wechselt, „antisymmetrisch" genannt.

Einen „symmetrischen" Zustand bezeichnen wir durch einen Buchstaben, der die innere Quantenzahl angeben soll; einen „antisymmetrischen" Zustand mit derselben inneren Quantenzahl bezeichnen wir durch denselben gestrichenen Buchstaben. Die magnetischen Quantenzahlen schreiben wir, wenn nötig, noch dabei hin. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß sich alle Moleküle im Grundschwingungszustand und nur in den Rotationszuständen mit derselben inneren Quantenzahl r befinden.

Die physikalische Bedeutung dieser Zustände hat Hund ** angegeben. Das Molekül besitzt nämlich im allgemeinen für $n \geqq 4$ zwei spiegelbildliche Gleichgewichtskonfigurationen der Kerne, die man als Links- bzw. Rechtskonfiguration bezeichnen kann. Sowohl die symmetrische wie die antisymmetrische Eigenfunktion hat in diesen beiden Punkten des Konfigurationsraumes absolut genommen ein scharfes Maximum; mit anderen Worten stellt sowohl der symmetrische wie der antisymmetrische Zustand

---

* E. Wigner, ZS. f. Phys. **43**, 640, 1927; derselbe und J. v. Neumann, ebenda **49**, 90, 1928.

** F. Hund, ZS. f. Phys. **43**, 806, 1927.

angenähert ein Gemisch von Links- und Rechtsmolekülen in gleichen Anzahlen dar.

Mithin ist ein „drehender" Zustand, d. h. ein Zustand, bei dem alle Moleküle in derselben (Links- oder Rechts-) Konfiguration stehen, kein stationärer Quantenzustand (mit „scharfer" Energie). Wenn er (zunächst bei einem bestimmten Rotationszustand, in einem Magnetfeld) zu einer Zeit $t = 0$ irgendwie festgestellt ist, so kann man ihn mit hinreichender Genauigkeit etwa durch die Eigenfunktion

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_r + \psi_{r'}) \tag{1}$$

beschreiben, wobei ψ_r bzw. $\psi_{r'}$ die zum gegebenen Rotationszustand gehörige symmetrische bzw. antisymmetrische Eigenfunktion mit der Eigenfrequenz ν_r bzw. $\nu_{r'}$ ist. Zur Zeit t wird er dann durch

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_r e^{2\pi i \nu_r t} + \psi_{r'} e^{2\pi i \nu_{r'} t}) \tag{2}$$

gegeben, also in der Nähe des Anfangsmaximums ($\psi_r = \psi_{r'} = a$),

$$\psi(t) = \frac{2a}{\sqrt{2}} e^{2\pi i \left(\frac{\nu_r + \nu_{r'}}{2}\right) t} \cos 2\pi \left(\frac{\nu_r - \nu_{r'}}{2}\right) t:$$

man bekommt einen stetigen, periodischen Übergang von dem Links- in den Rechtszustand mit der „Schwebungsfrequenz" $\frac{\nu^{(rr')}}{2} = \frac{\nu_r - \nu_{r'}}{2}$. Hund* hat diese Frequenz abgeschätzt und gezeigt, daß sie unter Bedingungen, die in unserem Falle erfüllt sind, sehr klein ist gegen die optischen Frequenzen.

Wenn nun allgemeiner die Energie des Systems nicht stationär ist, so wird der Zustand (1) zur Zeit t

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l (c_{rl} + c_{r'l})\, \psi_l; \tag{3}$$

dabei ist (wie immer) die Summation $\sum_l$ über alle symmetrischen und antisymmetrischen Zustände l (sowie auch über die Werte der magnetischen Quantenzahl) zu erstrecken. Die Entwicklungskoeffizienten $c_{rl}(t)$ nach dem vollständigen Orthogonalsystem ψ_l lassen sich leicht aus der zeitabhängigen Schrödingerschen Gleichung bestimmen.

---

* l. c.

§ 2. Statistik des „drehenden" Zustandes. Der von Neumannsche statistische Operator† dieses Zustandes ist die Matrix mit den Elementen††

$$u_{lk} = \tfrac{1}{2}(c_{rk} + c_{r'k})(c^*_{rl} + c^*_{r'l}),$$

so daß der Erwartungswert einer Größe x mit der Matrix (x_{kl}) durch

$$\sum_{k,l} u_{lk} x_{kl}$$

oder, wegen der Unitarität der Matrix (c_{rl}),

$$\tfrac{1}{2}[(c\,x\,c^{-1})_{rr} + (c\,x\,c^{-1})_{rr'} + (c\,x\,c^{-1})_{r'r} + (c\,x\,c^{-1})_{r'r'}]$$

gegeben ist.

Bisher haben wir als Anfangszustand (1) ein Gemisch des symmetrischen und des antisymmetrischen Zustandes genommen, die zu einem bestimmten Rotationszustand, d. h. auch zu einer bestimmten magnetischen Quantenzahl m, gehören. In Wirklichkeit aber sind in einer isotropen Gesamtheit (Gas oder Flüssigkeit) alle Orientierungen m gleichmäßig verteilt, und zwar für die innere Quantenzahl r mit dem Gewicht $g_r = 2r + 1$. Um den Raummittelwert††† $\bar{x}$ der Größe x zu bekommen, muß man also obigen statistischen Operator und folglich den Erwartungswert über m summieren und durch g_r dividieren:

$$\bar{x} = \frac{1}{g_r} \cdot \frac{1}{2} \sum_m \left[(c\,x\,c^{-1})^{(r\,r)}_{m\,m} + (c\,x\,c^{-1})^{(r\,r')}_{m\,m} + (c\,x\,c^{-1})^{(r'\,r)}_{m\,m} + (c\,x\,c^{-1})^{(r'\,r')}_{m\,m}\right].$$

Den Ausdruck†††† $\sum_m A^{(r\,r)}_{m\,m}$, d. h. die Spur der Matrix $\left(A^{(r\,r)}_{m\,m'}\right)$ in bezug auf m, bezeichnen wir mit $Sp\,A^{(r\,r)}$; entsprechend setzen wir

$$Sp\,(A^{(r\,s)}\,B^{(s\,r)}) = \sum_{m=-r}^{r} \sum_{m'=-s}^{s} A^{(r,\,s)}_{m\,m'}\,B^{(s,\,r)}_{m'\,m};$$

statt $Sp\,(A^{(r\,s)}\,A^{(s\,r)})$ schreiben wir auch $\|A^{(r\,s)}\|^2$. Die für uns nötigen Eigenschaften dieser Gebilde teilen wir in einem Anhang mit.

---

† J. v. Neumann, Gött. Nachr. 1927, S. 245 ff.

†† c^* ist zu c komplex konjugiert, $c^\dagger$ zu c adjungiert.

††† Das heißt Raummittelwert pro Molekül; um den makroskopischen Mittelwert zu bekommen, muß man mit der Anzahl N der Moleküle in der Volumeneinheit multiplizieren. — Die angegebene Vorschrift zur Berechnung des Erwartungswertes bei Richtungsentartung ist eine strenge Folgerung der statistischen Quantenmechanik.

†††† Die Zweckmäßigkeit dieser Begriffsbildung für die quantenmechanische Behandlung der Optik hat Herr Professor Born erkannt. Die im Anhang enthaltenen Resultate stammen von ihm. Näheres darüber wird in seinem in Vorbereitung befindlichen Buch über „Atommechanik" (Bd. II) zu finden sein.

Mit diesen Bezeichnungen schreibt sich die letzte Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{2\,g_r}\,[Sp\,(c\,x\,c^{-1})^{(rr)} + Sp\,(c\,x\,c^{-1})^{(rr')} + Sp\,(c\,x\,c^{-1})^{(r'r)} + Sp\,(c\,x\,c^{-1})^{(r'r')}]; \qquad (4)$$

für ein hermitisches x ist $\bar{x}$ eine reelle Zahl.

§ 3. Periodische Störung. Die Formel (4) erlaubt uns, den makroskopisch meßbaren Wert irgend einer Größe zu berechnen, sobald wir die Matrix (c_{rl}) kennen. Diese Matrix hängt in wohlbekannter Weise von dem Zeitverlauf der Energie des Systems ab. Wenn zunächst die Energie stationär ist, so findet man

$$c_{rl} = e^{2\pi i \nu_r t}\,\delta_{rl}$$

und folglich

$$\bar{x}^{(0)} = \frac{1}{2\,g_r}\,[Sp\,x^{(rr)} + Sp\,x^{(r'r')} + Sp\,x^{(rr')}\,e^{2\pi i \nu^{(rr')} t} + Sp\,x^{(r'r)}\,e^{-2\pi i \nu^{(rr')} t}]. \qquad (5)$$

Für eine in bezug auf die Spiegelung „symmetrische" Funktion ist $x^{(rr')} = x^{(r'r)} = 0$ und unter konsequenter Vernachlässigung des Unterschieds zwischen ψ_r und $\psi_{r'}$

$$x^{(rr)} \sim x^{(r'r')};$$

der Mittelwert ist zeitlich konstant:

$$\bar{x}^{(0)} = \frac{1}{2\,g_r}\,[Sp\,x^{(rr)} + Sp\,x^{(r'r')}] \sim \frac{1}{g_r}\,Sp\,x^{(rr)}.$$

Für eine „antisymmetrische" Funktion ergibt sich

$$\bar{x}^{(0)} = \frac{1}{2\,g_r}\,[Sp\,x^{(rr')}\,e^{2\pi i \nu^{(rr')} t} + Sp\,x^{(r'r)}\,e^{-2\pi i \nu^{(rr')} t}],$$

$$\bar{x}^{(0)} \sim \frac{1}{g_r}\,Sp\,x^{(rr')} \cos 2\pi \nu^{(rr')} t,$$

eine periodische Funktion der Zeit mit der halben Schwebungsperiode. Diese Resultate sind anschaulich klar. (In Wirklichkeit werden durch die Zusammenstöße die Phasenbeziehungen zwischen den einzelnen Molekeln bald zerstört, und es stellt sich infolgedessen ein razemischer Zustand ein.)

Nehmen wir nun an, daß sich zu dieser stationären Energie eine kleine periodische* Störung mit der Frequenz ν,

$$H' = A\,e^{2\pi i \nu t} + A^{\dagger}\,e^{-2\pi i \nu t},$$

* Strenggenommen muß man eine rein periodische Störung durch eine langsam anklingende $H'\,e^{2\pi\sigma t}$ approximieren, die zur Zeit $t_0 = -\infty$ ansetzt, und σ so gegen Null streben lassen, daß $\sigma\,t_0 \to -\infty$.

überlagert. Dann kommt bekanntlich zum eben berechneten Mittelwert $\bar{x}^{(0)}$ eine „durch die Störung induzierte" kleine Korrektion hinzu, die in erster Näherung (für x hermitisch)

$$\bar{x}^{(1)} = \frac{1}{2\,g_r}[\xi^{(rr)} + \xi^{(rr')} + \xi^{(r'r)} + \xi^{(r'r')}], \tag{6}$$

mit

$$\left.\begin{aligned}\xi^{(rs)} = e^{2\pi i(\nu^{(rs)}+\nu)t}\sum_k\left[\frac{Sp\,(A^{(rk)}\,x^{(ks)})}{h\,(\nu^{(rk)}+\nu)} + \frac{Sp\,(x^{(rk)}\,A^{(ks)})}{h\,(\nu^{(sk)}-\nu)}\right]\\ + e^{2\pi i(\nu^{(rs)}-\nu)t}\sum_k\left[\frac{Sp\,(A^{\dagger(rk)}\,x^{(ks)})}{h\,(\nu^{(rk)}-\nu)} + \frac{Sp\,(x^{(rk)}\,A^{\dagger(ks)})}{h\,(\nu^{(sk)}+\nu)}\right],\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

beträgt §. Es ist $\xi^{(rs)} = \xi^{*(sr)}$.

Wenn A und x beide symmetrische oder beide antisymmetrische Funktionen sind, so verschwinden $\xi^{(rr')}$ und $\xi^{(r'r)}$ identisch, weil dann auf alle Fälle von den beiden Matrizen $A^{(rk)}$, $x^{(kr')}$ oder $x^{(rk)}$, $A^{(kr')}$ immer eine verschwindet. Dann hat man

$$\bar{x}^{(1)} = \frac{1}{2\,g_r}[\xi^{(rr)} + \xi^{(r'r')}] \sim \frac{1}{g_r}\,\xi^{(rr)} \tag{8}$$

mit §§

$$\xi^{(rr)} = 2\sum_k\left\{\frac{\Re\,Sp\,(A^{(rk)}\,x^{(kr)}\,e^{2\pi i\nu t})}{h\,(\nu^{(rk)}+\nu)} + \frac{\Re\,Sp\,(x^{(rk)}\,A^{(kr)}\,e^{2\pi i\nu t})}{h\,(\nu^{(rk)}-\nu)}\right\}; \tag{9}$$

dabei bedeutet $\Re f$ den Realteil der komplexen Zahl f (den Imaginärteil werden wir entsprechend mit $\Im f$ bezeichnen).

Wenn A und x verschiedene Symmetrieeigenschaften haben, so verschwinden umgekehrt $\xi^{(rr)}$ und $\xi^{(r'r')}$ identisch, und es bleibt

$$\bar{x}^{(1)} = \frac{1}{2\,g_r}[\xi^{(rr')} + \xi^{(r'r)}]$$

übrig. Dafür können wir schreiben

$$\bar{x}^{(1)} = \frac{1}{g_r}\,\Re\sum_k\left[\frac{Sp\,(A^{(rk)}\,x^{(kr')}\,e^{2\pi i(\nu^{(rr')}+\nu)t})}{h\,(\nu^{(rk)}+\nu)} + \frac{Sp\,(x^{(rk)}\,A^{(kr')}\,e^{2\pi i(\nu^{(rr')}+\nu)t})}{h\,(\nu^{(r'k)}-\nu)}\right.$$
$$\left. + \frac{Sp\,(x^{(r'k)}\,A^{(kr)}\,e^{-2\pi i(\nu^{(rr')}-\nu)t})}{h\,(\nu^{(rk)}-\nu)} + \frac{Sp\,(A^{(r'k)}\,x^{(kr)}\,e^{-2\pi i(\nu^{(rr')}-\nu)t})}{h\,(\nu^{(r'k)}+\nu)}\right].$$

Um einen bestimmten Fall vor uns zu haben, nehmen wir an, daß x antisymmetrisch und A symmetrisch ist. Dann ist für die symmetrischen Zustände k

$$x^{(rk)}\,A^{(kr')} = A^{(r'k)}\,x^{(kr)} = 0$$

---

§ Die Formel (7) ist natürlich nur dann gültig, wenn die darin vorkommenden Spurbildungen sinnvoll sind, was allerdings für $s = r$ und $s = r'$ (oder $r = s'$) der Fall ist.

§§ Denn $A^{\dagger(rk)}\,B^{\dagger(ks)} = [B^{(sk)}\,A^{(kr)}]^{\dagger}$ und $Sp\,A^{\dagger} = (Sp\,A)^{*}$.

und für die antisymmetrischen k'

$$x^{(r'k')} A^{(k'r)} = A^{(rk')} x^{(k'r')} = 0;$$

ferner dürfen wir wohl $\nu^{(rk)} \sim \nu^{(r'k')}$ setzen, sowie

$$A^{(rk)} x^{(kr')} \sim A^{(r'k')} x^{(k'r)},$$
$$x^{(rk')} A^{(k'r')} \sim x^{(r'k)} A^{(kr)};$$

infolgedessen bekommen wir

$$\bar{x}^{(1)} = \frac{2\cos 2\pi \nu^{(rr')} t}{g_r} \sum_k \left[\frac{\Re\, Sp\,(A^{(rk)} x^{(kr')} e^{2\pi i \nu t})}{h(\nu^{(rk)} + \nu)} + \frac{\Re\, Sp\,(x^{(r'k)} A^{(kr)} e^{2\pi i \nu t})}{h(\nu^{(rk)} - \nu)} \right]. \tag{10}$$

Diese Formel gilt auch für x symmetrisch und A antisymmetrisch.

§ 4 Hamiltonsche Störungsfunktion. Jetzt handelt es sich darum, die Hamiltonsche Störungsfunktion H' oder A für den uns interessierenden Fall einer Strahlung von der Frequenz ν auszurechnen.

Es seien $e_\varkappa$ die Ladung, $m_\varkappa$ die Masse des $\varkappa$-ten Teilchens des Moleküls, $\mathfrak{r}_\varkappa$ sein Abstand $(x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa)$ vom Nullpunkt, $\mathfrak{p}_\varkappa$ der zugehörige Impuls $(p_{\varkappa x}, p_{\varkappa y}, p_{\varkappa z})$, und zwar in einem Koordinatensystem, in dem die Energie des ungestörten Moleküls in der Diagonalform ist, so daß

$$\mathfrak{p}_\varkappa^{(rs)} = m_\varkappa \cdot 2\pi i \nu^{(rs)} \mathfrak{r}_\varkappa^{(rs)}. \tag{11}$$

Wir setzen noch ($\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ ist das Vektorprodukt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$)

$$\mathfrak{P} = \sum_\varkappa e_\varkappa \mathfrak{r}_\varkappa, \tag{12}$$

$$\Theta_{xy} = \sum_\varkappa \frac{e_\varkappa}{m_\varkappa c} x_\varkappa p_{\varkappa y}, \tag{13}$$

$$\mathfrak{M} = \sum_\varkappa \frac{e_\varkappa}{2 m_\varkappa c} (\mathfrak{r}_\varkappa \times \mathfrak{p}_\varkappa); \tag{14}$$

$\mathfrak{P}$ ist die elektrische Polarisation, $\mathfrak{M}$ das magnetische Moment des Moleküls, und wir haben z. B.

$$2\mathfrak{M}_z = \Theta_{xy} - \Theta_{yx}. \tag{15}$$

Wir betrachten eine ebene Lichtwelle, die sich im Medium vom Brechungsindex n in der Richtung $\mathfrak{n}$ fortpflanzt und setzen

$$\mathfrak{s} = n\mathfrak{n}; \tag{16}$$

eine solche Welle kann man durch das Vektorpotential

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{A}_0 e^{2\pi i \nu \left(t - \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{s}}{c}\right)} \tag{17}$$

darstellen, wobei $\mathfrak{A}_0$ ein komplexer Vektor ist (die Phasen seiner Komponenten beschreiben die Polarisationsverhältnisse). Das elektromagnetische Feld der Welle ist dann

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{2\pi i\nu\left(t-\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{s}}{c}\right)}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 e^{2\pi i\nu\left(t-\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{s}}{c}\right)}, \tag{18}$$

mit

$$\mathfrak{E}_0 = -\frac{2\pi i\nu}{c}\mathfrak{A}_0; \tag{19}$$

wir setzen

$$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{s}\times\mathfrak{E}_0; \tag{20}$$

die Größe

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 e^{2\pi i\nu\left(t-\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{s}}{c}\right)}$$

ist dann die magnetische Induktion $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + \overline{\mathfrak{M}}$ (in rationellen Einheiten).

Die Hamiltonsche Funktion H' ist dann (in nicht-hermitischer Gestalt)

$$H' = -\sum_x \frac{e_x}{m_x c}\left(\mathfrak{p}_x \cdot \mathfrak{A}(\mathfrak{r}_x)\right);$$

nun können wir annehmen, daß die Abstände $\mathfrak{r}_x$ alle klein sind gegenüber der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{c}{\nu n}; \tag{21}$$

dann ist, nach (17) und (19),

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(\mathfrak{r}_x) &= \mathfrak{A}_0 e^{2\pi i\nu t}\left[1-\frac{2\pi i\nu}{c}(\mathfrak{r}_x\mathfrak{s})\right]\\ &= [\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{E}_0(\mathfrak{r}_x\mathfrak{s})]\, e^{2\pi i\nu t}\end{aligned}$$

und folglich, gemäß (11), (12), (13), (19),

$$H'^{(rs)} = \left[\frac{\nu^{(rs)}}{\nu}\mathfrak{P}^{(rs)}\mathfrak{E}_0 - \sum_{x,y}\Theta_{xy}^{(rs)}\mathfrak{s}_x\mathfrak{E}_{0y}\right]e^{2\pi i\nu t},$$

wobei die Summation wegen $(\mathfrak{s}\mathfrak{E}) = 0$ nur über die Wertepaare x, y mit $x \neq y$ zu erstrecken ist. Dieser Umstand beseitigt also automatisch die von der Nichtvertauschbarkeit der gleichnamigen Komponenten von $\mathfrak{p}_x$ und $\mathfrak{r}_x$ herrührende Unbestimmtheit in der Wahl der Hamiltonschen Funktion.

Dieser Anteil stellt aber nur die direkte Wirkung der Strahlung dar; wir müssen noch die Wirkung des induzierten elektrischen Moments $\overline{\mathfrak{P}}^{(1)} = \overline{\mathfrak{P}}_0^{(1)} e^{2\pi i\nu t}$ berücksichtigen: diese drücken wir in der üblichen Weise (in rationellen Einheiten) durch

$$H' = -\tfrac{1}{3}\mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}}^{(1)} = -\tfrac{1}{3}\mathfrak{P}\,\overline{\mathfrak{P}}_0^{(1)} e^{2\pi i\nu t}$$

aus.

Insgesamt haben wir also

$$A = A_P + A_{P'} + A_D, \tag{22}$$

mit

$$2\,A_P^{(rs)} = \frac{\nu^{(rs)}}{\nu}\,\mathfrak{P}^{(rs)}\mathfrak{E}_0, \tag{23}$$

$$2\,A_{P'} = -\tfrac{1}{3}\,\mathfrak{P}\,\overline{\mathfrak{P}}_0^{(1)}, \tag{24}$$

$$2\,A_D = -\sum_{x,y} \Theta_{xy}\,\mathfrak{s}_x\,\mathfrak{E}_{0y}. \tag{25}$$

Wenn wir die Ortsabhängigkeit der Phasen der Lichtwelle ganz vernachlässigen, d. h. wenn wir nur A_P und $A_{P'}$ berücksichtigen, so fallen wir auf die gewöhnliche Dispersionstheorie zurück. Für die optische Aktivität ist im wesentlichen der Anteil A_D verantwortlich*.

§ 5. Polarisierbarkeit. Wir wollen zunächst mittels (23) und (24) die wohlbekannten Formeln für die Polarisierbarkeit und die Dielektrizitätskonstante ableiten, indem wir den entsprechenden Mittelwert $\overline{\mathfrak{P}}_P^{(1)} = \overline{\mathfrak{P}}_{P'}^{(1)} + \overline{\mathfrak{P}}_{P''}^{(1)}$ des elektrischen Moments $\mathfrak{P}$ berechnen.

Da $\mathfrak{P}$ und $A_{P'}$ antisymmetrische Funktionen sind, wenden wir zur Berechnung von $\overline{\mathfrak{P}}_{P'}^{(1)}$ die Formeln (8), (9) an. Mit Hilfe der Formel (A, 4)** finden wir sofort

$$\overline{\mathfrak{P}}_{P'}^{(1)} = \alpha\,\Re\,(\mathfrak{E}_0\,e^{2\pi i\nu t}) \tag{26}$$

mit

$$\alpha = \sum_k \|\,\mathfrak{P}^{(rk)}\,\|^2\,\frac{2}{3\,g_r\,h}\cdot\frac{\nu^{(kr)}}{\nu^{(kr)2} - \nu^2}\,. \tag{27}$$

Analog ergibt sich

$$\overline{\mathfrak{P}}_{P''}^{(1)} = \alpha\,\Re\,(\tfrac{1}{3}\,\overline{\mathfrak{P}}_0^{(1)}\,e^{2\pi i\nu t}) = \frac{\alpha}{3}\,\Re\,(\overline{\mathfrak{P}}^{(1)}), \tag{28}$$

also (wenn wir vorläufig $\overline{\mathfrak{P}}_D^{(1)}$ vernachlässigen)

$$\overline{\mathfrak{P}}_P^{(1)} = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3}}\,\Re\,(\mathfrak{E}_0\,e^{2\pi i\nu t}).$$

Nun können wir wieder zur komplexen Schreibweise übergehen; wenn wir noch das Koordinatensystem beliebig verlegen, so bekommen wir unter Beachtung von (18)

$$\overline{\mathfrak{P}}_P^{(1)} = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3}}\,\mathfrak{E};$$

---

* Darauf haben zuerst M. Born, Phys. ZS. **16**, 251, 1915, und C. W. Oseen, Ann. d. Phys. **48**, 1, 1915 unabhängig voneinander hingewiesen.

** So sind die Formeln des Anhangs numeriert.

diese Formel schreiben wir schließlich

$$\overline{\mathfrak{P}}_P^{(1)} = (\varepsilon - 1)\,\mathfrak{E},$$

indem wir

$$\varepsilon = 1 + \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3}} \tag{29}$$

oder umgekehrt

$$\alpha = (\varepsilon - 1) \cdot \frac{3}{\varepsilon + 2} \tag{30}$$

setzen. Somit erkennen wir in den Größen α und ε die Polarisierbarkeit bzw. die Dielektrizitätskonstante und in (30) die Lorentz-Lorenzsche Relation. Die Dispersionsformel (27) enthält alle die von Ladenburg und anderen eingeführten Verfeinerungen; darauf wollen wir aber nicht eingehen.

§ 6. Drehungsanteil des elektrischen Moments. Wir wenden uns nun zur Berechnung des Drehungsanteils $\overline{\mathfrak{P}}_D^{(1)}$. Da die Funktion A_D symmetrisch ist (und $\mathfrak{P}$ antisymmetrisch), so ist die Formel (10) anwendbar. Daher schließen wir aber sofort*:

1. Damit ein Molekül optisch aktiv sein kann, muß es mindestens vier Kerne, ferner kein Symmetriezentrum besitzen.

2. Wenn ein Molekül zwei spiegelbildliche Konfigurationen besitzt, so geht es stetig von der einen in die andere über, mit der „Schwebungsperiode“ T; sein Drehungsvermögen ist dann eine periodische Funktion der Zeit, mit der Periode $T/2$.

3. Ein System, dessen Energie „scharf“ ist (symmetrischer oder antisymmetrischer Zustand), ist nicht optisch aktiv.

Unter Benutzung der Formeln (A, 5), (A, 6), (A, 7) und (20) findet man leicht

$$\overline{\mathfrak{P}}_D^{(1)} = -\frac{\cos 2\pi\nu^{(rr')}t}{3\,g_r\,h} \sum_k \left\{ \frac{\Re\,[Sp\,(\mathfrak{M}^{(rk)}\mathfrak{P}^{(kr')})\,\mathfrak{B}_0\,e^{2\pi i\nu t}]}{\nu^{(rk)} + \nu} + \frac{\Re\,[Sp\,(\mathfrak{P}^{(r'k)}\mathfrak{M}^{(kr)})\,\mathfrak{B}_0\,e^{2\pi i\nu t}]}{\nu^{(rk)} - \nu} \right\}$$

oder, indem wir

$$\left.\begin{aligned} R^{(rk)} &= \Re\,Sp\,(\mathfrak{M}^{(rk)}\mathfrak{P}^{(kr')}), \\ J^{(rk)} &= 3\,Sp\,(\mathfrak{M}^{(rk)}\mathfrak{P}^{(kr')}) \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

setzen,

$$\overline{\mathfrak{P}}_D^{(1)} = \sigma'\,\Re\,(\mathfrak{B}_0\,e^{2\pi i\nu t}) + \varrho'\,\Re\,(2\pi i\nu\,\mathfrak{B}_0\,e^{2\pi i\nu t}), \tag{32}$$

* Man vergleiche die Trivialität dieser Schlüsse mit den mühsamen Rechnungen der klassischen Theorie, die zu analogen Resultaten führen. Vgl. M. Born, Ann. d. Phys. **55**, 177, 1918.

mit

$$\left.\begin{aligned}\sigma' &= \frac{2\cos 2\pi\nu^{(rr')}t}{3\,g_r h}\sum_k \frac{R^{(rk)}\nu^{(kr)}}{\nu^{(kr)2}-\nu^2},\\ \varrho' &= \frac{2\cos 2\pi\nu^{(rr')}t}{3\,g_r h\,.\,2\pi}\sum_k \frac{J^{(rk)}}{\nu^{(kr)2}-\nu^2}.\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Die Formel (32) schreiben wir auch komplex [analog (29)]

$$\overline{\mathfrak{P}}_D^{(1)} = \sigma'\,\mathfrak{B} + \varrho'\,\dot{\mathfrak{B}}. \tag{34}$$

Die Formeln (26), (28) (auch komplex geschrieben) und (34) zusammen liefern

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{P}}^{(1)} &= \overline{\mathfrak{P}}_{P'}^{(1)} + \overline{\mathfrak{P}}_{P''}^{(1)} + \overline{\mathfrak{P}}_D^{(1)}\\ &= \alpha\,\mathfrak{E} + \frac{\alpha}{3}\,\overline{\mathfrak{P}}^{(1)} + \sigma'\,\mathfrak{B} + \varrho'\,\dot{\mathfrak{B}}\\ &= \frac{\alpha}{1-\frac{\alpha}{3}}\,\mathfrak{E} + \frac{\sigma'}{1-\frac{\alpha}{3}}\,\mathfrak{B} + \frac{\varrho'}{1-\frac{\alpha}{3}}\cdot\dot{\mathfrak{B}}.\end{aligned}$$

Beachten wir nun (30) und setzen

$$\sigma = \sigma'\cdot\frac{\varepsilon+2}{3} \tag{35}$$

und

$$\varrho = 2c\varrho'\cdot\frac{\varepsilon+2}{3},$$

$$\varrho = \frac{\varepsilon+2}{3}\cdot\frac{2\cos 2\pi\nu^{(rr')}t}{3\,g_r h}\sum_k \frac{\frac{c}{\pi}J^{(rk)}}{\nu^{(kr)2}-\nu^2}, \tag{36}$$

dann haben wir

$$\overline{\mathfrak{P}}^{(1)} = (\varepsilon-1)\,\mathfrak{E} + \sigma\,\mathfrak{B} + \frac{\varrho}{2c}\,\dot{\mathfrak{B}}. \tag{37}$$

§ 7. Drehungsanteil des magnetischen Moments*. Wir wollen noch die induzierte Magnetisierung $\overline{\mathfrak{M}}^{(1)}$ berechnen, indem wir uns konsequent auf

$$\overline{\mathfrak{M}}^{(1)} = \overline{\mathfrak{M}}_{P'}^{(1)} + \overline{\mathfrak{M}}_{P''}^{(1)}$$

* Auf die Existenz dieses Anteils hat R. Gans aufmerksam gemacht; vgl. J. Palumbo, Ann. d. Phys. **79**, 548, 1926 (Anhang von R. Gans).

beschränken müssen. Da $\mathfrak{M}$ symmetrisch, $A_{p''}$ und $A_{p'''}$ antisymmetrisch sind, so ist Formel (10) anzuwenden und ergibt in Verbindung mit (A, 3), (31) und (33)

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{M}}^{(1)}_{p''} &= \sigma' \Re\,(\mathfrak{E}_0 e^{2\pi i \nu t}) \\ &\quad - \frac{2\cos 2\pi \nu^{(rr')} t}{3\, g_r h \,.\, 2\pi} \Re\,(2\pi i \nu\, \mathfrak{E}_0 e^{2\pi i \nu t}) \sum_k \frac{J^{(rk)}}{\nu^{(kr)2} - \nu^2} \cdot \frac{\nu^{(kr)2}}{\nu^2} \\ &= \sigma' \Re\,(\mathfrak{E}_0 e^{2\pi i \nu t}) \\ &\quad - \Re\,(2\pi i \nu\, \mathfrak{E}_0 e^{2\pi i \nu t}) \left[\varrho' + \frac{2\cos 2\pi \nu^{(rr')} t}{3\, g_r h \,.\, 2\pi \nu^2} \sum_k J^{(rk)}\right].\end{aligned}$$

Die gleichnamigen Komponenten der Matrizen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$ sind vertauschbar, folglich ist die Matrix $\mathfrak{M}\mathfrak{P}$ hermitisch und daher (in unserer Näherung)

$$Sp\,(\mathfrak{M}\mathfrak{P})^{(rr')} = \sum_k Sp\,(\mathfrak{M}^{(rk)}\mathfrak{P}^{(kr')})$$

reell, d. h. nach (31)

$$\sum_k J^{(rk)} \sim 0.$$

Also ist in der komplexen Schreibweise

$$\overline{\mathfrak{M}}^{(1)}_{p''} = \sigma' \mathfrak{E} - \varrho' \dot{\mathfrak{E}}.$$

Analog findet man

$$\overline{\mathfrak{M}}^{(1)}_{p'''} = \tfrac{1}{3}\sigma' \overline{\mathfrak{P}}^{(1)} - \tfrac{1}{3}\varrho' \dot{\overline{\mathfrak{P}}}^{(1)},$$

d. h. nach (37), bis auf Größen höherer Ordnung in σ' und ϱ' (die wir konsequent vernachlässigen müssen),

$$\overline{\mathfrak{M}}^{(1)}_{p'''} = \sigma' \cdot \frac{\varepsilon - 1}{3} \mathfrak{E} - \varrho' \cdot \frac{\varepsilon - 1}{3} \dot{\mathfrak{E}}.$$

Insgesamt

$$\overline{\mathfrak{M}}^{(1)} = \sigma' \left(1 + \frac{\varepsilon - 1}{3}\right) \mathfrak{E} - \varrho' \left(1 + \frac{\varepsilon - 1}{3}\right) \dot{\mathfrak{E}},$$

d. h. nach (35) und (36)

$$\overline{\mathfrak{M}}^{(1)} = \sigma \mathfrak{E} - \frac{\varrho}{2c} \dot{\mathfrak{E}}. \tag{38}$$

§ 8. Drehung der Polarisationsebene. Jetzt können wir die Formeln (37) und (38) diskutieren; sie lauten, indem wir $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ statt $\overline{\mathfrak{P}}^{(1)}$ und $\overline{\mathfrak{M}}^{(1)}$ schreiben*:

$$\mathfrak{P} = (\varepsilon - 1)\mathfrak{E} + \sigma \mathfrak{B} + \frac{\varrho}{2c} \dot{\mathfrak{B}}, \tag{37}$$

$$\mathfrak{M} = \sigma \mathfrak{E} - \frac{\varrho}{2c} \dot{\mathfrak{E}} \tag{38}$$

* Wir setzen die Substanz als unmagnetisch voraus.

oder auch, indem wir neben der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ die elektrische Verschiebung

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P}$$

einführen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \varepsilon\mathfrak{E} + \sigma\mathfrak{B} + \frac{\varrho}{2c}\dot{\mathfrak{B}}, \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{H} + \sigma\mathfrak{E} - \frac{\varrho}{2c}\dot{\mathfrak{E}}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Andererseits liefern die Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{aligned} c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} &= \dot{\mathfrak{D}}, \\ -c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} &= \dot{\mathfrak{B}} \end{aligned}$$

für eine ebene Welle

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D} &= -\mathfrak{s}\times\mathfrak{H}, \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{s}\times\mathfrak{E}. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in σ und ϱ bekommen wir schließlich aus (39) und (40)

$$-\mathfrak{s}\times\mathfrak{H} = \varepsilon\mathfrak{E} + \sigma\mathfrak{H} + \frac{\varrho}{2c}\dot{\mathfrak{H}},$$

$$\mathfrak{s}\times\mathfrak{E} = \mathfrak{H} + \sigma\mathfrak{E} - \frac{\varrho}{2c}\dot{\mathfrak{E}}.$$

Daraus folgt durch Elimination von $\mathfrak{H}$

$$-\mathfrak{s}\times(\mathfrak{s}\times\mathfrak{E}) = \varepsilon\mathfrak{E} + \frac{\varrho}{c}(\mathfrak{s}\times\dot{\mathfrak{E}})$$

oder, unter Beachtung von (16), (21) und $(\mathfrak{s}\mathfrak{E}) = 0$,

$$(n^2 - \varepsilon)\mathfrak{E} - \frac{2\pi i\varrho}{\lambda}(\mathfrak{n}\times\mathfrak{E}) = 0. \tag{41}$$

Diese Gleichung ergibt aber mittels wohlbekannter Überlegungen die zirkulare Doppelbrechung

$$\Delta n = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\varrho}{n} \tag{42}$$

und die Drehung der Polarisationsebene auf die Längeneinheit:

$$\theta = \frac{2\pi\nu}{c}\cdot\frac{\Delta n}{2} = \frac{2\pi^2\varrho}{\lambda^2} \tag{43}$$

(Biotsches Gesetz).

Aus diesen Formeln folgt die Deutung von ϱ als Drehungsparameter*.

* Die Größe σ bestimmt das Amplitudenverhältnis und die relative Phase von elektrischem und magnetischem Vektor und ist der Beobachtung wohl nicht zugänglich.

Die vorliegende Untersuchung ist anläßlich meiner Teilnahme an den Vorarbeiten zum oben (Anm. ††††, S. 163) erwähnten Bornschen Buche entstanden. Herrn Prof. Born bin ich für seine ständige Hilfe sehr zu Dank verpflichtet. Herrn Dr. Wigner möchte ich auch für manche Unterhaltungen über Fragen der Quantenmechanik herzlich danken.

Göttingen, Institut für theoretische Physik, August 1928.

Anhang.

Wir wollen einige Eigenschaften der S. 163 definierten Spuren ableiten. (Wie gesagt, ist das Folgende im wesentlichen dem Bornschen Buche entnommen.)

Hauptsatz: Wenn die Matrizen A, B von den dynamischen Variablen eines frei drehbaren Systems abhängen, bleiben die Größen*

$$Sp\, A^{(rr)}, \qquad Sp\,(A^{(rs)} B^{(sr)})$$

bei Drehungen der Koordinaten invariant.

Denn die neuen Matrizen A, B entstehen aus den alten durch eine Ähnlichkeitstransformation.

Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Vektormatrizen und $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ zwei Zahlenvektoren. Setzen wir

$$A = \mathfrak{A}\mathfrak{S}, \qquad B = \mathfrak{B}\mathfrak{T},$$

so wissen wir, daß

$$Sp\,(A^{(rs)} B^{(sr)}) = \sum_{xy} Sp\,(\mathfrak{A}_x^{(rs)} \mathfrak{B}_y^{(sr)})\, \mathfrak{S}_x \mathfrak{T}_y$$

drehinvariant ist.

Wählt man nun $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ senkrecht aufeinander und dreht das Vektorenpaar um eine der Koordinatenachsen durch den Winkel π, so sieht man, daß

$$Sp\,(\mathfrak{A}_x^{(rs)} \mathfrak{B}_y^{(sr)}) = Sp\,(\mathfrak{A}_x^{(rs)} \mathfrak{B}_z^{(sr)}) = Sp\,(\mathfrak{A}_y^{(rs)} \mathfrak{B}_z^{(sr)}) = 0. \quad (A, 1)$$

Wählt man sodann $\mathfrak{S} = \mathfrak{T}$ und legt diesen Vektor der Reihe nach parallel zu einer der Achsen, so bekommt man

$$\begin{aligned} Sp\,(\mathfrak{A}_x^{(rs)} \mathfrak{B}_x^{(sr)}) &= Sp\,(\mathfrak{A}_y^{(rs)} \mathfrak{B}_y^{(sr)}) \\ &= Sp\,(\mathfrak{A}_z^{(rs)} \mathfrak{B}_z^{(sr)}) = \tfrac{1}{3} Sp\,(\mathfrak{A}^{(rs)} \mathfrak{B}^{(sr)}). \quad (A, 2) \end{aligned}$$

Aus (A, 1) und (A, 2) folgt sofort, wenn $\mathfrak{C}$ ein Zahlenvektor ist,

$$Sp\,[(\mathfrak{A}^{(rs)} \mathfrak{C})\, \mathfrak{B}^{(sr)}] = Sp\,[\mathfrak{A}^{(rs)} (\mathfrak{B}^{(sr)} \mathfrak{C})] = \tfrac{1}{3} \mathfrak{C}\, Sp\,(\mathfrak{A}^{(rs)} \mathfrak{B}^{(sr)}) \quad (A, 3)$$

und speziell

$$Sp\,[(\mathfrak{A}^{(rs)} \mathfrak{C})\, \mathfrak{A}^{(sr)}] = Sp\,[\mathfrak{A}^{(rs)} (\mathfrak{A}^{(sr)} \mathfrak{C})] = \tfrac{1}{3} \mathfrak{C} \,\|\, \mathfrak{A}^{(rs)} \|^2. \quad (A, 4)$$

* Alle abzuleitenden Resultate gelten auch, wenn man eines der r (oder beide) durch r' ersetzt.

Betrachten wir nun eine Tensormatrix Θ_{xy}, so finden wir durch eine der obigen analoge Überlegung, daß

$$\left.\begin{aligned} &Sp\,(\mathfrak{A}_x^{(rs)}\,\Theta_{xy}^{(sr)}) = \cdots = 0, \\ &Sp\,(\mathfrak{A}_x^{(rs)}\,\Theta_{xz}^{(sr)}) = \cdots = Sp\,(\mathfrak{A}_x^{(rs)}\,\Theta_{yy}^{(sr)}) = \cdots = 0, \\ &Sp\,(\mathfrak{A}_z^{(rs)}\,\Theta_{xy}^{(sr)}) \neq 0, \end{aligned}\right\} \quad \text{(A, 5)}$$

indem wir ferner eine Drehung um die z-Achse durch den Winkel $\pi/2$ benutzen, erhalten wir die Beziehung

$$Sp\,(\mathfrak{A}_z^{(rs)}\,\Theta_{xy}^{(sr)}) = -\,Sp\,(\mathfrak{A}_z^{(rs)}\,\Theta_{xy}^{(sr)}). \quad \text{(A, 6)}$$

Wenn wir die Vektormatrix $\mathfrak{M}$ durch

$$\Theta_{xy} - \Theta_{yx} = 2\,\mathfrak{M}_z \ldots$$

definieren, so ergibt die Gleichung (A, 5)

$$Sp\,(\mathfrak{A}_z^{(rs)}\,\Theta_{xy}^{(sr)}) = Sp\,(\mathfrak{A}_z^{(rs)}\,\mathfrak{M}_z^{(sr)}) = \tfrac{1}{3}\,Sp\,(\mathfrak{A}^{(rs)}\,\mathfrak{M}^{(sr)}) \quad \text{(A, 7)}$$

nach (A, 2).

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Rostock.)

Entkopplung des Elektronenbahndrehimpulses von der Molekülachse durch die Rotation bei He_2.

Von **W. Weizel** in Rostock.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 10. Oktober 1928.)

Neun neue Banden im He_2-Spektrum werden mitgeteilt. Diese sind zum Teil höhere Serienglieder schon bekannter Banden. Sie zeigen starke Anomalien, die in geringem Maße schon bei bisher bekannten Banden auftraten. Diese Anomalien können erklärt werden durch die Annahme, daß der Bahndrehimpuls der Elektronen durch die Rotation von der Achse entkoppelt wird. Diese Art von Entkopplung war bisher nicht bekannt. Gleichzeitig wird es möglich, die Elektronenterme des Heliumbandenspektrums vollständig einzuordnen.

Das Bandenspektrum des Heliums ist seit einiger Zeit der Gegenstand lebhaften Interesses. Nachdem erst Fowler* und dann Curtis und Long** eine große Reihe von Banden gefunden und für diese die Gültigkeit der Rydbergschen Serienformel sichergestellt hatten, gelang es Mulliken***, die Elektronenterme aller bis dahin bekannten Banden in ein Schema zu ordnen. Dieses entsprach ganz dem Serienschema des Heliumatoms. Leo**** bestätigte He_2 als Träger des Spektrums. Weizel und Füchtbauer† fanden eine Reihe von Schwingungsübergängen $0 \to 1$ und $1 \to 1$ und stellten so den Zusammenhang mit den Bandenspektren anderer Moleküle her. Curtis†† fand danach eine Bande $2p—3x$, deren Anfangsterm $3x$ sich nicht in das Mullikensche Schema einordnet. Dieke, Takamine und Suga††† fanden sechs Terme $3x$, $3y$ und $3z$ sowohl vom Ortho- wie vom Paraheliumtyp, die sich alle nicht in das Mullikensche Schema einordnen. Kürzlich gelang mir†††† die Aufklärung der zum He_2-Molekül führenden „Reaktion". He_2 ist nämlich die Verbindung zweier angeregter Heliumatome, wahrscheinlich im

---

* A. Fowler, Proc. Roy. Soc. **91**, 208, 1915.
** W. E. Curtis und R. G. Long, ebenda **108**, 513, 1925.
*** R. Mulliken, Phys. Rev. **28**, 481, 1202, 1925.
**** W. Leo, Ann. d. Phys. **81**, 757, 1926.
† W. Weizel und Chr. Füchtbauer, ZS. f. Phys. **44**, 431, 1927.
†† W. E. Curtis, Proc. Roy. Soc. **118**, 157, 1928.
††† G. H. Dieke, T. Takamine und T. Suga, ZS. f. Phys. **49**, 637, 1928.
†††† W. Weizel, ebenda **51**, 328, 1928.

metastabilen $2\,^3S$-Zustand. Ferner gab ich eine Erweiterung des Mullikenschen Elektronentermschemas entsprechend Hunds Theorie an.

Trotz aller dieser Bemühungen enthält das Bandenspektrum des He_2 noch eine Reihe ungelöster Probleme:

Eine große Zahl von Linien harren noch der Einordnung.

Die höheren Serienglieder der *d*-, *x*-, *y*- und *z*-Terme im Ortho- wie im Parasystem sind noch zu finden.

Die Zuordnung der Terme *x*, *y* und *z* zu den von der Theorie geforderten Termen ist noch ungeklärt.

Die Rotationsterme der *x*-, *y*-, *z*-, *p*- und *d*-Niveaus zeigen Anomalien, deren Ursachen noch unbekannt sind.

Die vorliegende Arbeit wird die beiden zuletzt genannten Probleme erledigen. Auch die beiden ersten erfahren durch Auffinden einer Reihe neuer Banden Förderung.

Versuchsanordnung.

Das Bandenspektrum des Heliums wurde mit einem Gitterspektrographen in Autokollimation in erster und dritter Ordnung photographiert. Als Lichtquelle diente ein Geisslerrohr. Die Versuchsanordnung war im wesentlichen dieselbe, wie die von Weizel und Füchtbauer beschriebene.

Bezeichnungen.

a) Bezeichnungen der Terme.

Ein Bandenterm wird bezeichnet durch folgende Angaben*:

1. Einer Hauptquantenzahl *n*.

2. Durch Zahl und Art der äußeren Elektronen, die je nach ihrem Bahndrehimpuls 0, 1, 2, ... mit *s*, *p*, *d*, ... bezeichnet werden**. Diese werden hinter *n* geschrieben, z. B. $3\,s\,d$. Beim Heliumbandenspektrum sind zwei äußere Elektronen vorhanden. Bei den bisher gefundenen Termen ist von diesen stets mindestens eines ein *s*-Elektron.

3. Durch die Komponente *i* des Gesamtelektronendrehimpulses nach der Kernverbindungslinie. Werte von $i = 0, 1, 2, \ldots$ werden als Σ-, Π-, Δ-, ... Terme unterschieden, z. B. $3\,s\,d\,\Pi$. Die Drehimpulskomponenten der einzelnen Elektronen können diesen als Index σ, π, δ, ... angefügt werden, z. B. $3\,s\,d_\pi\,\Pi$. Bei den bisher bekannten Heliumtermen ist

---

* Siehe auch Mulliken, Phys. Rev. **32**, 186, 1928.

** Diese Buchstaben werden außerdem noch in anderem Sinne als konventionelle Termbezeichnung verwendet. Siehe später.

dies nicht erforderlich, weil stets mindestens ein s-Elektron vorhanden ist, und die i-Komponente des anderen Elektrons gleich der Gesamt-i-Komponente ist.

4. Durch Angabe der Multiplizität vor dem großen griechischen Buchstaben, z. B. $3sd\,{}^3\Pi$. Bei Helium kommt ein Singulett- und ein Triplettsystem vor.

5. Durch Angabe der Schwingungsquantenzahl als Exponent, z. B. $3sd\,{}^3\Pi^1$.

6. Durch Angabe der Rotationsquantenzahl j in Klammern, z. B. $3sd\,{}^3\Pi^1(5)$.

Neben diesen der Systematik entnommenen benötigt man noch konventionelle Bezeichnungen, die sich eingebürgert hatten, bevor die Einordnung der Terme gesichert war. Es tritt an Stelle von Ziffer 2 und 3 ein kleiner lateinischer Buchstabe, während die Ziffern 1, 4, 5 und 6 ungeändert bleiben, z. B. $3^3y^1(5)$. Es kommen die Buchstaben s, p, d, x, y, z zur Verwendung.

b) Bezeichnung der Linien.

Die Linien werden nach der Rotationsquantenzahl j des Endniveaus der Emission bezeichnet. Also:

$P(j)$ entspricht dem Übergang $j-1 \to j$,
$Q(j)$ „ „ „ $j \to j$,
$R(j)$ „ „ „ $j+1 \to j$.

Für die Unterscheidung von P-, Q- und R-Zweig ist die Änderung der wahren Rotationsquantenzahl j und nicht der effektiven Quantenzahl m maßgebend. Die Bezeichnungen für die Linien sind gegenüber den älteren Bezeichnungen von Kratzer, Curtis und Weizel und Füchtbauer etwas geändert. Sie stimmen überein mit den van Dieke, Takamine und Suga angewendeten.

c) Sonstige Bezeichnungen.

Differenzen zweier Terme, deren Rotationsquantenzahl sich um 2 unterscheidet, werden als erste Differenzen $D(j)$ bezeichnet. Es ist $T(7)-T(5)=D(5)$ ($T=$ Term). Differenzen $D(j+2)-D(j)$ werden als zweite Differenzen $\Delta(j)$ bezeichnet. Anfangs- und Endterm werden, wenn nötig, als T' und T'' unterschieden, ebenso die Differenzen, z. B.

$$R(j-2)-P(j)=D''(j), \quad R(j)-P(j)=D'(j-1).$$

Tabellen der neuen Banden.

Bande $2sp\,^3\Pi^0 - 4sd\,^3\Delta^0$* bei $\lambda = 440\,\mathrm{m}\mu$. $2\,^3p^0 - 4\,^3d^0$*.

j	*P*-Zweig			*Q*-Zweig			*R*-Zweig		
	I	λ	ν	I	λ	ν	I	λ	ν
1	—	—	—	—	—	—	10	4396,82	22 737,35
2	—	—	—	10	4402,49	22 708,04	6	92,80	758,14
3	5	4411,08	22 663,85	10	01,34	714,00	5	89,18	776,77
4	5 *u*	12,62	655,95	8	00,42	718,62	2[1])	84,66	800,4
5	7	14,82	644,65	5	4399,06	725,74	6	81,18	818,48
6	2	15,70	640,11	9	97,80	732,26	—	—	—
7	7	17,89	628,90	—	—	—	5	73,09	860,72
8	—	—	—	8	95,00	746,75	—	—	—
9	7	20,84	613,82	—	—	—	4[1])	65,20	902,0
10	—	—	—	6	92,30	760,73	—	—	—
11	6	23,78	598,76	—	—	—	2[1])	57,60	941,8
12	—	—	—	5	89,81	773,63	—	—	—
13	5	26,81	583,31	—	—	—	—	—	—
14	—	—	—	3	87,27	786,91	—	—	—

Bande $2sp\,^3\Pi^0 - 5sd\,^3\Delta^0$ bei $\lambda = 398\,\mathrm{m}\mu$. $2\,^3p^0 - 5\,^3d^0$.

j	*P*-Zweig			*Q*-Zweig			*R*-Zweig		
	I	λ	ν	I	λ	ν	I	λ	ν
1	—	—	—	—	—	—	8	3968,75	25 189,13
2	—	—	—	7	3973,43	25 160,12	—	—	—
3	5	3980,43	25 115,80	—	—	—	8	61,06	238,62
4	—	—	—	7	70,24	180,32	—	—	—
5	5	81,88	106,67	—	—	—	5	53,40	287,54
6	—	—	—	7	66,93	201,32	—	—	—
7	4	83,24	098,11	—	—	—	4	45,93	335,40
8	—	—	—	6	63,87	220,79	—	—	—
9	4	84,78	088,40	—	—	—	—	—	—

Bande $2sp\,^3\Pi^0 - 5sd\,^3\Sigma^0$ bei $\lambda = 399\,\mathrm{m}\mu$. $2\,^3p^0 - 5\,^3z^0$.

j	*P*-Zweig			*Q*-Zweig			*R*-Zweig		
	I	λ	ν	I	λ	ν	I	λ	ν
2	—	—	—	7 [3])	3997,85	25 006,42	Nicht vorhanden		
3	3	4004,92	24 962,26	—	—	—			
4	—	—	—	7	4002,56	24 976,94			
5	5	14,37	903,45	—	—	—			
6	—	—	—	7	07,64	945,30			
7	[2])	—	—	—	—	—			
8	—	—	—	8 [4])	13,56	908,52			
9	2	34,86	777,05	—	—	—			
10	—	—	—	7	18,96	875,06			
12	—	—	—	5 [5])	24,87	838,56			
14	—	—	—	5	31,34	799,67			
16	—	—	—	6 [7])	37,59	760,29			
18	—	—	—	6 [7])	44,16	720,07			

* Es ist sowohl die systematische wie die konventionelle Bezeichnung angegeben.

Bande $2\,s\,p\,{}^3\Pi^0 - 6\,s\,d\,{}^3\Sigma^0$ bei $\lambda = 378{,}5\ \mathrm{m}\mu$. $2\,{}^3p^0 - 6\,{}^3x^0$.

j	P-Zweig			Q-Zweig			R-Zweig		
	I	λ	ν	I	λ	ν	I	λ	ν
2	—	—	—	6	3787,48	26 395,30	Nicht vorhanden		
3	3	3793,84	26 351,04	—	—	—			
4	—	—	—	6	91,87	364,72			
5	3 u	3802,50	291 08	—	—	—			
6	—	—	—	6	96,78	330,68			
7	4	11,77	227,11	—	—	—			
8	—	—	—	7	3801,72	296,46			
9	3	20,92	164,32	—	—	—			
10	—	—	—	7	06,84	261,10			
11	5 [6])	30,26	100,51	—	—	—			
12	—	—	—	6	12,22	224,02			
14	—	—	—	3	17,78	185,81			
16	—	—	—	4 [6])	23,56	146,22			

Bande $2\,s\,p\,{}^3\Pi^0 - 4\,s\,d\,{}^3\Pi^0$ bei $\lambda = 443\ \mathrm{m}\mu$. $2\,{}^3p^0 - 4\,{}^3x^0$.

j	P-Zweig			Q-Zweig			R-Zweig		
	I	λ	ν	I	λ	ν	I	λ	ν
1	—	—	—	—	—	—	7 u	4434,21	22 545,60
2	—	—	—	5	4439,97	22 516,36	—	—	—
3	8	4448,68	22 472,28	—	—	—	10 u [7])	31,80	557,86
4	—	—	—	5	43,12	500,39	—	—	—
5	7 u	57,91	425,74	—	—	—	10 [8])	30,94	562,27
6	—	—	—	6	47,98	475,80	—	—	—
7	6	68,44	372,92	—	—	—	10 [8])	30,94	562,27
8	—	—	—	5	53,54	447,75	—	—	—
9	6	79,95	315,41	—	—	—	10 u [7])	31,80	557,86
10	—	—	—	7	59,80	416,24	—	—	—
11	5	92,15	254,83	—	—	—	6	33,22	550,66
12	—	—	—	5	66,61	382,10	—	—	—
13	4	4504,85	192,07	—	—	—	6	35,23	540,41
15	6	17,95	127,74	—	—	—	5	37,74	527,67
17	5	31,50	061,58	—	—	—	—	—	—

Bande $2sp\,^3\Pi^0 - 5s\,s\,^3\Sigma^0$ bei $\lambda = 403\,\mathrm{m}\mu$. $2\,^3p^0 - 5\,^3s^0$.

j	P-Zweig			Q-Zweig			R-Zweig		
	I	λ	ν	I	λ	ν	I	λ	ν
1	—	—	—	3	4030,38	24 804,58	—	—	—
2	4	4035,15	24 775,22	—	—	—	—	verdeckt	
3	—	—	—	4	30,77	802,17	—	—	—
4	2 [9])	40,26	743,94	—	—	—	3 u	4019,47	24 871,92
5	—	—	—	3	31,38	798,40	—	—	—
6	6	45,48	711,99	—	—	—	5	15,80	894,62
7	—	—	—	6	32,32	792,64	—	—	—
8	5	51,02	678,19	—	—	—	5	11,64	920,42
9	—	—	—	6	33,05	788,12	—	—	—
10	4	56,26	646,32	—	—	—	2	08,69	938,78
11	—	—	—	4	34,79	777,49	—	—	—
12	4	62,42	608,96	—	—	—	0	05,78	956,93
13	—	—	—	4	36,48	767,04	—	—	—
14	3	68,45	572,45	—	—	—	—	—	—
15	—	—	—	2 [10])	38,46	754,97	—	—	—
16	1	74,60	535,40	—	—	—	—	—	—

Bande $2sp\,^3\Pi^1 - 5s\,s\,^3\Sigma^1$ bei $\lambda = 404\,\mathrm{m}\mu$. $2\,^3p^1 - 5\,^3s^1$.

j	P-Zweig			Q-Zweig			R-Zweig		
	I	λ	ν	I	λ	ν	I	λ	ν
1	—	—	—	3	4040,80	24 740,64	—	—	—
2	[11])	—	—	—	—	—	0	4034,28	24 780,61
3	—	—	—	3	41,18	738,29	—	—	—
4	1	4050,45	24 681,77	—	—	—	3	30,38	804,58
5	—	—	—	3	41,87	734,07	—	—	—
6	2	55,63	650,12	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	3	42,88	727,90	—	—	—
8	2	61,13	616,74	—	—	—	—	—	—
9	—	—	—	3	43,57	723,63	—	—	—
10	2	66,22	585,98	—	—	—	—	—	—
11	—	—	—	1	45,25	713,35	—	—	—
12	1 u	71,98	550,11	—	—	—	—	—	—

Bande $2\,s\,p\,{}^3\Pi^1 - 4\,s\,d\,{}^3\Sigma^1$ bei $\lambda = 447\,\mathrm{m}\mu$. $2\,{}^3p^1 - 4\,{}^3\tau^1$.

j	*P*-Zweig			*Q*-Zweig			*R*-Zweig		
	I	λ	ν	I	λ	ν	I	λ	ν
2	—	—	—	3	4479,30	22 318,66	Nicht vorhanden		
3	4	4487,89	22 275,94	—	—	—			
4	—	—	—	7	83,83	296,10			
5	5	93,25	224,65	—	—	—			
6	—	—	—	6	89,39	268,50			
7	10 [12])	4509,73	168,07	—	—	—			
8	—	—	—	7	95,65	237,40			
9	4	21,77	109,04	—	—	—			
10	—	—	—	7	4502,50	203,64			
11	4 *u*	34,43	047,34	—	—	—			
12	—	—	—	10 [12])	09,73	168,07			
13	2	47,43	21 984,32	—	—	—			
14	—	—	—	7	17,08	132,02			
16	—	—	—	6	24,57	095,38			
18	—	—	—	5	32,57	056,39			

Bande $2\,s\,s\,{}^1\Sigma^1 - 4\,s\,p\,{}^1\Pi^0$ bei $\lambda = 389\,\mathrm{m}\mu$. $2\,{}^1s^1 - 4\,{}^1p^0$.

j	*P*-Zweig			*Q*-Zweig			*R*-Zweig		
	I	λ	ν	I	λ	ν	I	λ	ν
1	—	—	—	verdeckt durch He 388 mμ			1	3883,32	25 743,88
3	1	3894,58	25 669,48				2	79,92	766,46
5	1	3900,16	632,75				2	77,19	784,59
7	—	—	—	0	3890,15	25 698,67	1	75,09	798,57
9	—	—	—	1	91,85	687,45	1	73,57	808,70
11	—	—	—	1	93,93	673,79	0	72,73	814,29
13	—	—	—	2 *u*	96,37	657,70	—	—	—

[1]) In erster Ordnung gemessen. [2]) Ist neben der Serienlinie bei 402,6 mμ nicht festzustellen. [3]) Zusammen mit $2\,{}^1s^0 - 4\,{}^1p^0\,R_1$. [4]) Zusammen mit $2\,{}^1s^0 - 4\,{}^1p^0\,Q_1$. [5]) Intensität wegen der Nähe der Linie He 4026 nicht zu schätzen. [6]) Unsicher. [7]) Die Linien R_3 und R_9 fallen zusammen. [8]) Die Linien R_5 und R_7 fallen zusammen. [9]) Dicht neben $2\,{}^1s^0 - 4\,{}^1p^0\,P_{11}$. [10]) Zusammen mit $2\,{}^3p^0 - 5\,{}^3s^0\,P_3$. [11]) Verdeckt durch $2\,{}^3p^0 - 5\,{}^3s^0\,P_6$. [12]) P_7 und Q_{12} fallen zusammen.

Die Endterme der Banden.

Die sechs Banden bei $\lambda = 440\,\mathrm{m}\mu$, $\lambda = 398\,\mathrm{m}\mu$, $\lambda = 399\,\mathrm{m}\mu$, $\lambda = 378{,}5\,\mathrm{m}\mu$, $\lambda = 443\,\mathrm{m}\mu$ und $\lambda = 403\,\mathrm{m}\mu$ haben das Endniveau $2\,{}^3p^0$. Dies geht aus den Werten der Liniendifferenzen $Q(j) - P(j+1)$ und $R(j) - Q(j+1)$ hervor. Diese stellen Termdifferenzen des Endniveaus $2\,{}^3p^0(j+1) - 2\,{}^3p^0(j)$ dar. In der folgenden Tabelle sind die Liniendifferenzen obiger sechs Banden mit denen der schon früher eingeordneten Banden $2\,{}^3p^0 - 4\,{}^3s^0$ bei $\lambda = 454\,\mathrm{m}\mu$ zusammengestellt. Wo Abweichungen stattfinden, rühren diese daher, daß die betreffenden Linien mit anderen zusammenfallen und deshalb die Zahlen weniger genau sind.

Werte $2\,{}^3p^0(j+1) - 2\,{}^3p^0(j)$.

j	$\lambda = 440$ $2\,{}^3p^0 - 4\,{}^3d^0$	$\lambda = 440$ $2\,{}^3p^0 - 4\,{}^3d^0$	$\lambda = 398$ $2\,{}^3p^0 - 5\,{}^3d^0$	$\lambda = 399$ $2\,{}^3p^0 - 5\,{}^3z^0$	$\lambda = 378{,}5$ $2\,{}^3p^0 - 6\,{}^3z^0$	$\lambda = 443$ $2\,{}^3p^0 - 4\,{}^3z^0$	$\lambda = 403$ $2\,{}^3p^0 - 5\,{}^3s^0$	$\lambda = 454$ $2\,{}^3p^0 - 4\,{}^3s^0$
1	29,31	—	29,01	—	—	29,24	29,36	29,01
2	44,19	44,14	44,32	44,16	44,26	44,08	—	43,95
3	58,15	58,05	58,30	—	—	57,47	58,23	57,85
4	73,97	74,7	73,65	73,49	73,64	74,65	73,52	73,79
5	86,22	85,63	86,22	—	—	86,47	86,41	86,19
6	103,36	—	103,21	—	103,57	102,88	101,98	103,15
7	113,97	—	114,61	—	—	114,52	114,45	114,37
8	132,93	—	132,39	131,47	132,14	132,34	132,30	132,44
9	141,3	—	—	—	—	141,62	141,80	141,98
10	161,97	—	—	—	160,59	161,41	161.29	161,42
11	168,2	—	—	—	—	168,56	168,53	168,41
12	190,32	—	—	—	—	190,03	189,89	189,99
13	—	—	—	—	—	—	194,59	194,76
14	218,30	—	—	—	—	—	—	218,11
15	—	—	—	—	—	—	219,57	219,77

Die Bande bei $\lambda = 440\,\mathrm{m}\mu$ ist zweimal vertreten, da sie sechs Zweige hat.

Werte $2\,{}^3p^1(j+1) - 2\,{}^3p^1(j)$.

j	$\lambda = 404$ $2\,{}^3p^1 - 5\,{}^3s^1$	$\lambda = 447$ $2\,{}^3p^1 - 5\,{}^3z^1$	$\lambda = 456$ $2\,{}^3p^1 - 4\,{}^3s^1$
2	42,32	42,72	42,86
3	56,52	—	56,18
4	70,51	71,45	71,73
5	83,95	—	83,89
6	—	100,43	99,90
7	111,16	—	110,94
8	—	128,36	128,26
9	137,65	—	137,44
10	—	154,30	156,29
11	163,24	—	162,76
12	—	183,75	183,94

Die beiden Banden bei $\lambda = 404\,\mathrm{m}\mu$ und $\lambda = 447\,\mathrm{m}\mu$ haben das Endniveau $2\,{}^3p^1$, was sich aus der Zusammenstellung obiger Liniendifferenzen mit denen der Bande $2\,{}^3p^1 - 4\,{}^3s^1$ bei $\lambda = 456\,\mathrm{m}\mu$ ergibt (s. nebenstehende Tabelle). Die Bande bei $\lambda = 389\,\mathrm{m}\mu$ ist $2\,{}^1s^1 - 4\,{}^1p^0$, wie sich aus Kombinationsbeziehungen mit den Banden bei $\lambda = 363\,\mathrm{m}\mu$, $\lambda = 431\,\mathrm{m}\mu$ und $\lambda = 400\,\mathrm{m}\mu$ ergibt.

Die Entkopplung von Elektronendrehimpuls und Molekülachse durch die Rotation.

Um die Einzelheiten des Heliumbandenspektrums verstehen zu können, sind einige klassisch modellmäßig Überlegungen nötig. Für diese ist der Elektronenspin nicht von Bedeutung, deshalb sehe ich von ihm ab.

Die Bewegung eines Atoms läßt sich durch die Hauptquantenzahl n und die Quantenzahl des Elektronendrehimpulses l beschreiben. Beim He_2-Molekül tritt an Stelle des Atomrumpfes ein Molekelrumpf mit zwei Kernen, deren Verbindungslinie eine ausgezeichnete Achse ist. Ist der Einfluß der Anfspaltung des Rumpfes in zwei Kerne nur klein, was im klassischen Modell bei hochangeregten Zuständen zutrifft, so beschreibt l eine langsame Präzession um die Molekelachse. Die Komponente i nach der Achse wird dabei ganzzahlig und eine Quantenzahl. Jeder Atomterm mit der Quantenzahl l spaltet in die Molekelterme mit den Quantenzahlen $i = l$, $l-1$, ..., 0 auf. Wie man beim Atom $l = 0, 1, 2, \ldots$ als S-, P-, D-, ... Terme unterscheidet, so bezeichnet man die Molekelterme mit $i = 0, 1, 2, \ldots$ als Σ-, Π-, Δ-, ... Terme. Wie leicht einzusehen, liefert ein s-Elektron stets nur einen Σ-Term, ein p-Elektron einen Σ- und einen Π-Term, ein d-Elektron einen Σ-, einen Π- und einen Δ-Term. Hinzukommen weiterer s-Elektronen verursacht keine Komplikation. (Sind mehrere von s verschiedene Elektronen vorhanden, so treten Komplikationen auf, die im folgenden aber nicht von Interesse sind.) Diese Terme werden bei Helium mit $ss\,\Sigma$, $sp\,\Sigma$, $sp\,\Pi$; $sd\,\Sigma$, $sd\,\Pi$ und $sd\,\Delta$ bezeichnet. Die Fig. 1 stellt diese Terme symbolisch dar.

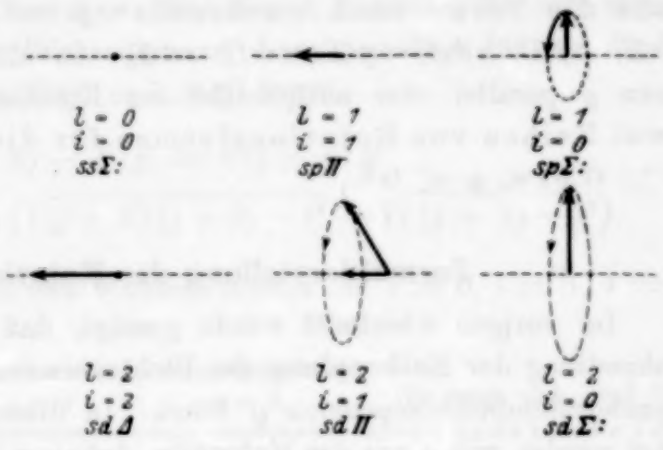


Fig. 1.

Tritt die Rotation hinzu, deren Wirkung klein gegen die der Kernverbindung sein soll, so wird die obige Bewegung etwas gestört. i ist streng genommen keine gequantelte Größe mehr. Während bei der regulären Präzession im Mittel über eine Präzessionsperiode die Komponente von l nach jeder zur Achse senkrechten Richtung Null ist, bildet sich

mit der Rotation eine mittlere Komponente von l nach der Rotationsachse aus. Sie soll ϱ genannt werden.

Bei $ss\Sigma$-Termen, wo $l = 0$ ist, ist eine solche Komponente nicht möglich. Die Komponente ϱ wächst mit der Rotation j. Sie wächst ferner mit l, dessen Komponente ja ϱ ist. Sie wächst auch mit der Hauptquantenzahl, weil die Wirkung der Kernaufspaltung sich für entferntere Elektronen verringert. Einen weiteren Unterschied zeigen die $sp\Pi$- und $sd\Delta$-Terme einerseits, und die $sp\Sigma$-, $sd\Pi$- und $sd\Sigma$-Terme andererseits. Bei ersteren muß durch die Rotation der Vektor l selbst aus seiner Lage herausgedreht werden, bei letzteren ist es nur nötig, die bereits zur Molekelachse vorhandene präzessierende Komponente an die Rotation zu binden. Letzteres ist leichter als das erstere, da die Präzession eines Kreisels leichter zu ändern ist, als der Drehimpuls selbst. Ordnet man also bei gleicher Hauptquantenzahl die Terme nach wachsenden ϱ, so erhält man ungefähr: $ss\Sigma$, $sp\Pi$, $sd\Delta$, $sp\Sigma$, $sd\Pi$, $sd\Sigma$. In allen Fällen, wo $i \neq 0$ ist, kann ϱ parallel oder antiparallel zur Rotation sein. Dies führt zu zwei Reihen von Rotationstermen für die Π- und Δ-Terme mit $\varrho > 0$ bzw. $\varrho < 0$*.

Formeldarstellung der Rotationsterme.

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, daß die korrespondenzmäßige Behandlung der Entkopplung des Elektronendrehimpulses, zu einer Elektronendrehimpulskomponente ϱ führt. In diesem Abschnitt soll nun gezeigt werden, wie ϱ aus den Meßgrößen definiert wird, und welchen Einfluß es auf die Formeldarstellung der Rotationsterme ausübt.

Für den Fall, daß keine Entkopplung vorhanden ist, ist der Rotationsterm bekanntlich:

$$T(j) = B\,(j\,(j+1) - i^2).$$

[Es sei darauf hingewiesen, daß j nicht den Gesamtdrehimpuls bezeichnet, sondern daß dessen Quadrat sich wie $j\,(j+1)$ verhält.] Tritt Entkopplung ein, so definiert die Gleichung:

$$T(j) = B\,(\sqrt{j\,(j+1) - i^2} - \varrho')^2,$$

die für $\varrho' = 0$ in obige übergeht, eine Funktion ϱ' von j. Da auch der so definierten Funktion ϱ' korrespondenzmäßig eine Komponente des Elektronendrehimpulses nach der Rotation entspricht, werden wir versuchen,

* F. Hund, ZS. f. Phys. **36**, 657, 666, 673, 1926.

$\varrho' \equiv \varrho$ zu setzen. Es muß dann noch gezeigt werden, daß, wenn man die im vorigen Abschnitt erschlossene Abhängigkeit des ϱ von j, l, u usw. in Ansatz bringt, die Termformel mit dem empirischen Material in Einklang bleibt. Die korrespondenzmäßige Deutung läßt allerdings erwarten, daß auch die Drehimpulskomponente i bei der Entkopplung sich ändert. Da es aber nicht möglich ist, aus der Formel zwei Funktionen von j, i und ϱ gleichzeitig zu definieren, muß für i der Wert für $j = 0$ beibehalten werden. Dies wird keine großen Fehler verursachen können, denn für die $sp\,\Pi$- und $sd\,\Delta$-Terme ist die Änderung von i von der Größenordnung ϱ^2, also gegen den Einfluß von ϱ klein. Bei den $sp\,\Sigma$-, $sd\,\Pi$- und $sd\,\Sigma$-Termen wird aber i nur wenig geändert, da das ϱ hauptsächlich durch Beeinflussung der Präzession entsteht. Also wieder ist $\Delta i \lessdot \varrho$.

Setzt man in die angegebene Formel einen konstanten Wert ϱ ein, so hat man die einfache Kramers-Paulische Formel. Es soll untersucht werden, zu welchen Konsequenzen diese Annahme für die direkt meßbaren Termdifferenzen $D(j)$ und $\Delta(j)$ führt.

$$D(j) = T(j+2) - T(j) = (4j+6)B - 2B\varrho\left(\sqrt{(j+2)(j+3) - i^2} - \sqrt{j(j+1) - i^2}\right).$$

Der Klammerausdruck mit den Wurzeln nimmt für $i = 0$, $i = 1$, $i = 2$ folgende Werte an:

j	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$
0	2,43	—	—
1	2,05	2,32	—
2	2,03	2,11	2,59
3	2,00	2,06	2,27
4	2,00	2,05	2,16
5	2,00	2,02	2,10
6	2,00	2,02	2,08
7	2,00	2,02	2,05
8	2,00	2,01	2,05
9	2,00	2,01	2,04

Es zeigt sich, daß für nicht ganz kleine j die $D(j)$ stets um $4B\varrho$ vermindert werden. Für ganz niedrige j kann ϱ nicht konstant sein, da es nach Null geht, und die Kramers-Paulische Formel muß entsprechend ergänzt werden.

Die zweiten Differenzen $\Delta(j)$ stellen sich dar:

$$\Delta(j) = 8B - 2B\varrho\left[\sqrt{(j+4)(j+5) - i^2} - 2\sqrt{(j+2)(j+3) - i^2} + \sqrt{j(j+1) - i^2}\right].$$

Die Klammerausdrücke mit den Wurzeln haben für $i = 0$, $i = 1$, $i = 2$ folgende Werte:

j	$i=0$	$i=1$	$i=2$
0	— 0,42	—	—
1	— 0,03	— 0,26	—
2	— 0,01	— 0,06	— 0,43
3	— 0,01	— 0,04	— 0,17
4	— 0,01	— 0,03	— 0,08
5	— 0,00	— 0,02	— 0,04
6	— 0,00	— 0,01	— 0,03
7	— 0,00	— 0,00	— 0,02

Für größere j werden die zweiten Differenzen von einem konstanten ϱ nicht beeinflußt.

Der korrespondenzmäßigen Betrachtung entsprechend muß ϱ für große j sich einer Grenze nähern und konstant werden. Diese wird um so schneller erreicht, je stärker die Entkopplung ist. Für große j müssen die $D(j)$ eine Verminderung $4B\varrho$ erfahren, die $\Delta(j)$ erfahren keine Beeinflussung. Für kleine j muß die Abhängigkeit der ϱ von j berücksichtigt werden. Wir ersetzen die $D(j)$ und $\Delta(j)$ durch die ersten und zweiten Differentiale von T.

$$dT = (2j+1)B.dj - \frac{2j+1}{\sqrt{j(j+1)-i^2}} B\varrho.dj$$
$$- 2B.dj\,\frac{d\varrho}{dj}\,(\sqrt{j(j+1)-i^2} - \varrho).$$

Das zweite Glied proportional ϱ gibt die oben bereits berechnete Verkleinerung ungefähr $4B\varrho$ wieder. Dazu kommt noch das dritte Glied, welches ebenfalls eine Verminderung der $D(j)$ darstellt, weil $\varrho < \sqrt{j(j+1)-i^2}$.

$$d^2T = 2Bdj^2 + \frac{1+4i^2}{2.[j(j+1)-i^2]^{3/2}} B\varrho\,dj^2$$
$$- 2\,\frac{d\varrho}{dj}\,Bdj^2\left(\frac{2j+1}{\sqrt{j(j+1)-i^2}} - \frac{d\varrho}{dj}\right)$$
$$+ 2\,\frac{d^2\varrho}{dj^2}\,(\varrho - \sqrt{j(j+1)-i^2})\,Bdj^2.$$

Das zweite Glied proportional ϱ stellt die oben schon berechneten kleinen Beeinflussungen durch konstantes ϱ dar. Das mit $\frac{d\varrho}{dj}$ gehende Glied ist das Hauptglied. $\frac{2j+1}{\sqrt{j(j+1)-i^2}}$ ist angenähert 2. $\frac{d\varrho}{dj} < 2$. Durch dieses Glied werden also die $\Delta(j)$ um etwa $16B\frac{d\varrho}{dj}$ verkleinert, wenn man $dj = 2$ setzt. Das letzte Glied ist wegen des kleinen $\frac{d^2\varrho}{dj^2}$ klein. Während sich ein konstantes ϱ nur in den ersten, nicht

aber in zweiten Differenzen zeigt, verursacht das Anwachsen des ϱ für kleine j Anomalien der zweiten Differenzen. Die $\Delta(j)$ sind für kleine j zu klein. Mit wachsendem j werden sie normal, d. h. sie steigen an.

Wenn das Vorzeichen von ϱ sich umkehrt, kehren sich auch die Vorzeichen von $\frac{d\varrho}{dj}$ und $\frac{d^2\varrho}{dj^2}$ um und es müssen obige Aussagen sinngemäß abgeändert werden.

Zu der aufgestellten Formel für die Rotationsterme kommt noch ein Glied, welches die Wechselwirkung von Rotation und Schwingung berücksichtigt. Man schreibt für dieses Glied*:

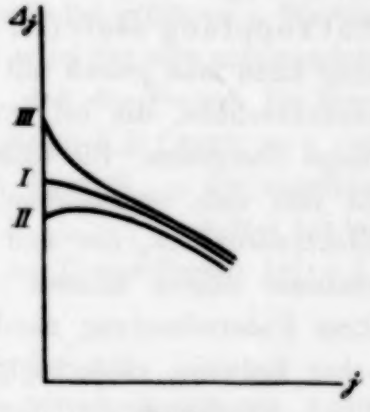


Fig. 2.

$$-\beta\left(\sqrt{j(j+1)-i^2}-\varrho\right)^4.$$

Es verursacht eine mit j wachsende Verkleinerung der Terme, der ersten und zweiten Differenzen.

Das obige Diagramm (Fig. 2) zeigt den zu erwartenden Verlauf der Δ_j für folgende Fälle:

I. $\varrho = 0$	(oder konstant)	$\beta > 0$.
II. $\varrho > 0$	$\lvert\varrho\rvert$ wächst	$\beta > 0$.
III. $\varrho < 0$	$\lvert\varrho\rvert$ wächst	$\beta > 0$.

Die Untersuchung der $\Delta(j)$ empfiehlt sich vor allem deshalb, weil diese sich ohne weitere Rechnung den Meßdaten entnehmen lassen, während eine numerische Berechnung von $\varrho_{(j)}$ sehr mühsam ist.

Alle $ss\,\Sigma$-Terme sollen den Fall I darstellen, die $sp\,\Pi$-, $sd\,\Delta$- und $sd\,\Pi$-Terme je ein Niveau vom Typ II und III und die $sp\,\Sigma$- und $sd\,\Sigma$-Terme ein Niveau vom Typ II oder III besitzen. Die Größe der Abweichungen soll wachsen in der Reihe $sp\,\Pi$, $sd\,\Delta$, $sp\,\Sigma$, $sd\,\Pi$, $sd\,\Sigma$. Erhöhung der Hauptquantenzahl soll die Anomalie der $D(j)$ dauernd vergrößern, die der $\Delta(j)$ erst vergrößern und dann wieder verkleinern.

---

* A. Kratzer, Ann. de Phys. **71**, 72, 1923. Es sei bemerkt, daß für die nicht entkoppelnden s-Terme die aus $\beta = 4\frac{B^3}{\omega^2}$ berechneten Werte für das Schwingungsquant ω richtig waren, für den stark entkoppelnden z-Term sich jedoch ganz falsche Werte ergeben würden, wenn man ϱ nicht berücksichtigen würde.

Die Elektronenterme.

Während bei strenger Kopplung des Elektronendrehimpulses an die Molekülachse die Zerlegung der Gesamtterme in Elektronen- und Rotationsanteil möglich ist, verliert diese Trennung in dem Maße, wie die Entkopplung eintritt, ihren strengen Sinn. Bei kleiner Entkopplung kann man jedoch mit Hilfe der oben diskutierten Formel auf Größen zurückrechnen, die bei verschwindender Entkopplung in die Elektronenterme übergehen. Sie sollen weiterhin Elektronenterme genannt werden. Es läßt sich voraussehen, daß durch zunehmende Entkopplung solche Elektronenterme, die sich nur in i, nicht aber in l unterscheiden, sich einander nähern müssen. Durch die Entkopplung wird ja die Ursache ihrer Unterscheidung, nämlich die verschiedene Einstellung zur Molekülachse teilweise rückgängig gemacht. Geht die wachsende Entkopplung durch Erhöhung der Hauptquantenzahl vor sich, so müssen derartige Elektronenterme stärker zusammenrücken, als nichtentkoppelnde Terme. Die Differenz ihrer effektiven Quantenzahlen muß sich verringern.

Numerische Berechnung der Terme.

Empirisch lassen sich die Termdifferenzen $D(j)$ als Liniendifferenzen bestimmen. Die Aufgabe besteht nun darin, aus der Reihe der zu ganzzahligen j gehörigen $D(j)$ die Koeffizienten B und β, sowie die Funktion $\delta_{(j)}$ in der Formel

$$T(j) = B\left(\sqrt{j(j+1) - i^2} - \varrho\right)^2 - \beta\left(\sqrt{j(j+1) - i^2} - \varrho\right)^4$$

zu berechnen.

Wenn ϱ große Werte annimmt und stark variabel ist, so ist diese Aufgabe bei einer kleinen Anzahl von zur Verfügung stehenden $D(j)$-Werten nicht lösbar. Vor allem läßt sich der Verlauf von ϱ für kleine j nicht bestimmen. Hinzu kommt noch, daß bei starker Entkopplung die Formel ungenau ist. Dies trifft für eine große Anzahl Heliumterme zu. Ich verzichte deshalb auf eine genaue Berechnung der Rotationsterme, wie auch der Konstanten. Auf die genaue Berechnung der Nullinien und Elektronenterme muß damit natürlich ebenfalls verzichtet werden. Eine ungefähre Berechnung läßt sich dagegen durchführen. Nebenbei sei bemerkt, daß der Versuch, genaue Berechnungen mit der nicht zutreffenden Kramers-Paulischen Formel mit konstantem ϱ durchzuführen, zu unrichtigen Resultaten führen kann. So findet man nach Curtis*

* W. E. Curtis, l. c.

z. B. für das $3\,{}^3d^0$- und die höheren ${}^3p^0$-Niveaus verschiedene Nullinien für die Rotationsniveaus a und b, d. i. für $\varrho < 0$ und $\varrho > 0$. Dies rührt wohl daher, daß die Abhängigkeit der ϱ von j nicht berücksichtigt wird.

Bei der Berechnung der Rotationsterme wurde bei größeren ϱ-Werten folgendes Näherungsverfahren eingeschlagen: ϱ wird für vier aufeinanderfolgende Termwerte so konstant angenommen, daß die Formel für konstantes ϱ brauchbar ist. Dann sind die $\Delta(j)$ gleich $8\,B$ (wenn man von β absieht). Aus jedem $\Delta(j)$ berechnet sich ein Wert B_{j+2}, der ungefähr zu $j+2$ gehört. Aus $\Delta(j+2)$ erhält man B_{j+4}. Das Mittel beider ist etwa B_{j+3}. Mit diesem Werte geht man in die Termdifferenz $D(j+2)$ ein. Diese ist näherungsweise:

$$D(j+2) = B_{j+3}(4j+6-4\varrho_{j+3}).$$

Daraus erhält man einen Wert ϱ_{j+3}. Ebenso berechnet man ϱ_{j+5} und erhält das Mittel ϱ_{j+4}. Mit Hilfe von ϱ_{j+4} und B_{j+4} läßt sich der Term $T(j+4)$ berechnen. Die übrigen Terme erhält man aus diesem durch Addition bzw. Subtraktion der $D(j)$. Die B wurden mit Index versehen, da sie nicht der Formelkonstanten B gleich, sondern Näherungswerte für diese sind.

Diskussion der empirischen Heliumterme.

Die Rotationsterme.

Wir haben nun an den bekannten Heliumtermen die bisher entwickelten Gesetzmäßigkeiten nachzuweisen und sie dann den entsprechenden systematischen Termen zuzuordnen. Dabei werde ich mich im folgenden auf die Terme des Triplettsystems beschränken, da vom Singulettsystem noch zu wenig höhere Terme bekannt sind.

1. Die s-Terme. Es sind bekannt: $2\,s$, $3\,s$, $4\,s$, $5\,s$. Sämtliche s-Rotationsterme lassen sich durch die Formel $T(j) = Bj(j+1)$ hinreichend darstellen. Sie zeigen alle die durch die Entkopplung hervorgerufenen Anomalien nicht. Sie besitzen auch nur eine Folge von Rotationsniveaus. Die $\Delta(j)$ variieren nur so weit, als es durch das β-Glied gefordert wird, d. h. aus β berechnet man die richtigen Werte für das Schwingungsquant. Es findet keine Entkopplung statt, die s-Terme sind die $s\,s\,\Sigma$-Terme.

2. Die p-, d-, x-, y- und z-Terme. Von diesen sind bekannt: $2\,p$, $3\,p$, $4\,p$, $5\,p$, $6\,p$, $7\,p$, $8\,p$, $9\,p$, $10\,p$, $3\,d$, $3\,x$, $3\,y$, $3\,z$, $4\,z$. Dazu kommen neu die Anfangsterme der Banden bei $\lambda = 440\,\mathrm{m}\mu$ und $\lambda = 398\,\mathrm{m}\mu$, nämlich $4\,d$ und $5\,d$, die der Banden bei $\lambda = 399\,\mathrm{m}\mu$ und $\lambda = 378{,}5\,\mathrm{m}\mu$,

nämlich $5z$ und $6z$, und der der Bande bei $\lambda = 443\,\mathrm{m}\mu$, nämlich $4x$. Für die Betrachtung eignen sich nicht $5p$ wegen zu vieler Störungen, ferner $7p$, $8p$, $9p$ und $10p$, von denen nur wenig Rotationsniveaus bekannt sind.

In den folgenden Tabellen sind die $D(j)$- und $\Delta(j)$-Werte der Terme $2p$, $6p$, $3d$, $4d$, $5d$, $3z$, $4z$, $5z$, $6z$, $3x$, $4x$ und $3y$ zusammengestellt.

j	$2p_a$ $D(j-1)$	$2p_a$ $\Delta(j-1)$	$2p_b$ $D(j)$	$2p_b$ $\Delta(j)$	$6p_a$ $D(j-1)$	$6p_a$ $\Delta(j-1)$	$6p_b$ $D(j)$	$6p_b$ $\Delta(j)$	$3d_a$ $D(j)$	$3d_a$ $\Delta(j)$
2	73,34		102,09		71,04		92,83		105,42	
		58,30		58,08		56,58		53,36		59,38
4	131,64		160,17		127,62		146,19		164,70	
		57,89		57,33		56,09		52,80		58,31
6	189,53		217,50		183,81		199,09		223,01	
		57,16		56,70		55,51		53,00		56,96
8	246,69		274,20		239,22		—		279,97	
		56,51		55,71		54,60		Mittel		55,62
10	303,20		329,91		293,82		305,09		335,59	
		55,41		54,74		53,56		52,22		54,01
12	358,61		384,65		347,38		357,31		389,60	
		54,25		53,23		52,31		51,29		52,06
14	412,86		437,88		399,69		408,50		441,66	
		53,71								
16	465,57									
18										

Fortsetzung.

j	$3d_b$ $D(j-1)$	$3d_b$ $\Delta(j-1)$	$4d_a$ $D(j)$	$4d_a$ $\Delta(j)$	$5d_a$ $D(j)$	$5d_a$ $\Delta(j)$	$3z$ $D(j)$	$3z$ $\Delta(j)$	$4z$ $D(j)$	$4z$ $\Delta(j)$
2	—		112,92		122,82		79,53		77,60	
		59,93		60,91		58,05		53,04		53,40
4	135,65		173,83		180,87		132,57		131,10	
		58,15		57,99		56,42		53,93		53,60*
6	195,58		231,82		237,29		186,40		184,70*	
		58,08		56,36				54,04		54,83*
8	254,73		288,18				240,44		239,53*	
		56,63		54,86				53,90*		53,77*
10	312,81		343,04				294,34*		293,30	
		54,63						54,26*		53,39
12	369,44						348,60*		346,69	
								52,64*		56,68
14	424,07						401,24		403,37	
16										
18										

Fortsetzung.

j	$5z$ $D(j)$	$5z$ $\Delta(j)$	$6z$ $D(j)$	$6z$ $\Delta(j)$	$3x$ $D(j)$	$3x$ $\Delta(j)$	$4x$ $D(j)$	$4x$ $\Delta(j)$	$3y$ $D(j-1)$	$3y$ $\Delta(j-1)$
2	72,61		71,51		92,07		85,58		89,52	
		55,92		54,64*		51,66		50,95		63,64
4	128,53		126,13*		144,73		136,53		153,16	
		52,19*		57,15*		52,81		52,82		57,26
6	180,72*		183,28*		197,54		189,35		210,42	
		60,02*		55,66*		52,13		53,10		53,48
8	240,74*		238,94		249,67		242,45		263,90	
		52,67*		53,99		52,03		53,38		51,36
10	293,41		292,83		301,70		295,83		315,26	
		52,35		53,61		51,25		52,61		49,25
12	345,76		346,44		352,95		348,44		365,21	
		52,74		51,85		50,46		51,49		48,39
14	398,50		398,29		403,41		399,93		413,60	
						49,26				47,55
16					452,67				461,15	
18					500,56	47,89				

* Gestört.

Nachfolgend sind $\Delta(j)/j$-Diagramme für einige Terme aufgezeichnet. Fig. 3 zeigt die beiden p-Niveaus $2p$ und $6p$, Fig. 4 die drei vorhandenen d_a-Niveaus $3d$, $4d$, $5d$. Fig. 5 zeigt die z-Niveaus $3z$,

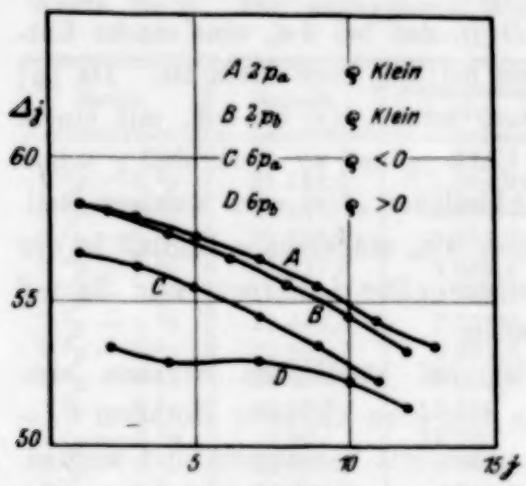


Fig. 3.

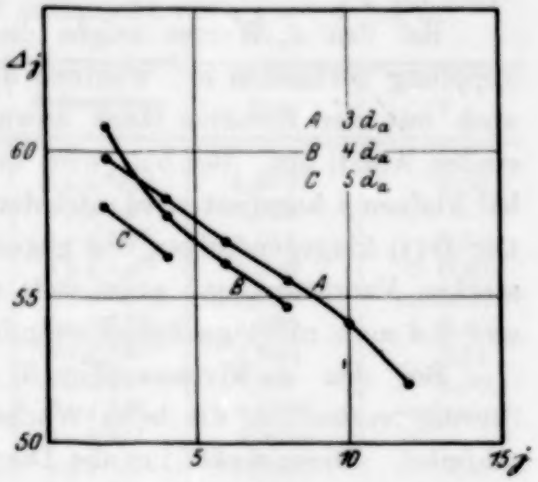


Fig. 4.

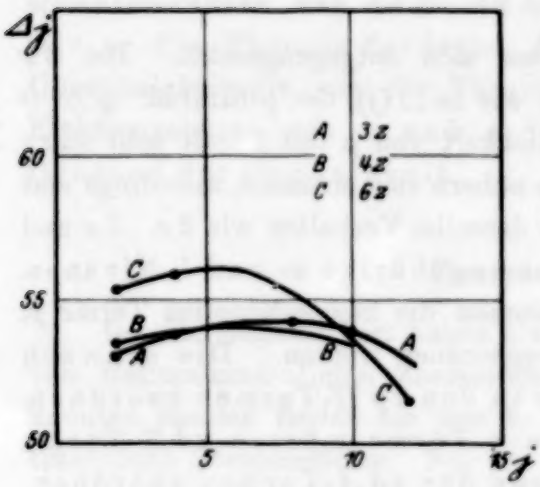


Fig. 5.

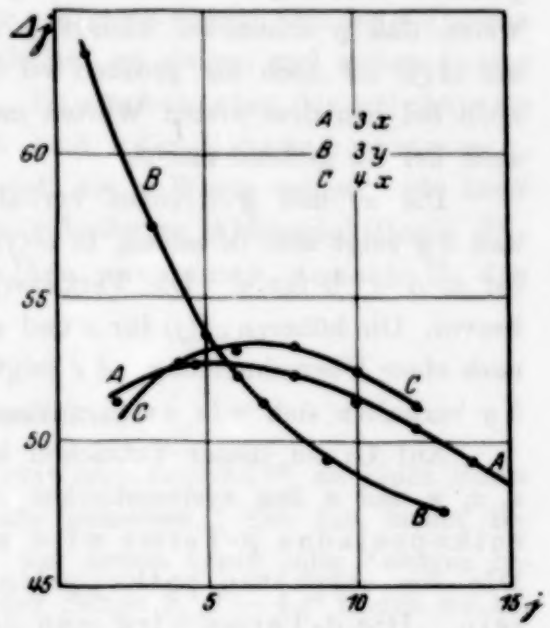


Fig. 6.

$4z$, $6z$. $5z$ enthält eine starke Störung, die das Bild verwischt. Fig. 6 zeigt $3x$, $3y$ und $4x$.

Aus Tabellen und Diagrammen geht folgendes hervor:

Bei $2p$ ist die Entkopplung gering, ϱ ist sehr klein. Nur das Vorhandensein von Rotationsniveaus a und b beweist, daß überhaupt Entkopplung vorhanden ist. Bei $6p$ ist die Entkopplung deutlich. $|\varrho|$ wächst

mit der Rotation, weshalb die $\Delta(j)$-Werte von $6p_a$ und $6p_b$ für kleine j auseinander laufen. Für $6p_a$ ist $\varrho < 0$, für $6p_b$ ist $\varrho > 0$. Auch Curtis Berechnung für diesen Term lieferte einen von Null verschiedenen Wert für ϱ.

Bei den d_a-Werten zeigen die $D(j)$, daß bei $4d_a$ eine starke Entkopplung vorhanden ist, während diese bei $3d_a$ noch klein ist. Da $|\varrho|$ noch mit der Rotation stark anwächst, setzt $\Delta(j)$ bei $4d_a$ mit einem steilen Abfall ein. Bei $5d_a$ wird die Entkopplung so stark, daß ϱ schon bei kleinen j konstant wird und der Abfall der $\Delta(j)$ wird weniger steil. Die $D(j)$ hingegen zeigen den gegenüber $4d_a$ stärkeren ϱ-Einfluß in der starken Vergrößerung. . ϱ ist stets negativ. Die d_b-Niveaus sind für $4d$ und $5d$ noch nicht genügend aufgefunden.

Bei den z-Niveaus (Fig. 5) ist bei sämtlichen Niveaus eine Störung vorhanden, die beim Wachsen von n zu kleinerer Rotation fortschreitet. Diese mußte für die Diagramme erst herausgerechnet werden. Die sehr niedrigen $D(j)$-Werte zeigen die starke Entkopplung. ϱ ist positiv. Die $\Delta(j)$-Werte sind lange nicht so stark beeinflußt. Dies beweist, daß ϱ schon bei kleinen j relativ konstant wird. Der Einfluß auf $\Delta(j)$ ist noch am größten bei $3z$, kleiner bei $4z$ und bei $6z$ nur noch bei den drei ersten Werten merklich, während in den $D(j)$ sich ϱ auch bei $6z$ geltend macht.

Die x- und y-Niveaus verhalten sich entgegengesetzt. Bei $3x$ und $3y$ zeigt sich in beiden, in $D(j)$ wie in $\Delta(j)$, der ϱ-Einfluß. $\varrho > 0$ für x, $\varrho < 0$ für y. Die Veränderlichkeit von ϱ mit j tritt sehr stark hervor. Die höheren $\Delta(j)$ für x und y nähern sich einander, allerdings erst nach einer Überschneidung. $4x$ zeigt dasselbe Verhalten wie $3x$. $3x$ und $3y$ verhalten sich wie zwei zusammengehörige a- und b-Niveaus.

Auf Grund dieser Tatsachen können die konventionellen Terme p, d, x, y und z den systematischen zugeordnet werden. Die schwach entkoppelnden p-Terme wird man den $sp\,\Pi$-Termen zuordnen. Die am stärksten entkoppelten z-Terme müssen $sd\,\Sigma$-Terme sein. Die d-Terme wird man dann den $sd\,\Delta$-Termen zuordnen, da ja bereits bekannt ist, daß den d Δ-Terme entsprechen. Die x- und y-Terme werden dann als a- und b-Niveau von $sd\,\Pi$ zusammengefaßt. Das $sp\,\Sigma$-Niveau kombiniert nicht mit $sp\,\Pi$ und darf deshalb unter den genannten empirischen Termen nicht vertreten sein, da diese alle mit $2p \equiv 2sp\,^3\Pi^0$ kombinieren. Damit entfallen alle Schwierigkeiten, die die x-, y- und z-Terme der Einordnung gemacht haben.

Die Elektronenterme.

Die folgende Tabelle zeigt die durch Rechnung ermittelten Nullinien, Anfangselektronenterme und deren effektive Quantenzahlen, ferner die Werte für ϱ. Der angegebene Wert entspricht etwa $j = 4$ bis 5.

Bande	Nullinie	Anfangstermwert	Anfangsterm	$n_{eff.}$	ϱ
$2\,^3p - 6\,^3p$	31 181,5	2 284,94	$6s\,^3\Pi^0$	5,9273	0,02
$2\,^3p - 3\,^3d$	17 437	12 080,6	$3s\,^3\Delta^0$	3,013	—
$2\,^3p - 4\,^3d$	22 695,7	6 821,5	$4s\,^3\Delta^0$	4,011	— 0,31
$2\,^3p - 5\,^3d$	25 127,8	4 389,4	$5s\,^3\Delta^0$	5,000	— 0,80
$2\,^3p - 3\,^3z$	16 804	12 713	$3s\,^3\Sigma^0$	2,938	variabel *
$2\,^3p - 4\,^3z$	22 444,3	7 072,9	$4s\,^3\Sigma^0$	3,939	0,60
$2\,^3p - 5\,^3z$	25 035,7	4 481,5	$5s\,^3\Sigma^0$	4,948	0,81
$2\,^3p - 6\,^3x$	26 424,6	3 092,6	$6s\,^3\Sigma^0$	5,957	1,00
$2\,^3p - 3\,^3x$	16 987	12 530	$3s\,^3\Pi$	2,9596	variabel *
$2\,^3p - 3\,^3y$	16 987	12 530	$3s\,^3\Pi$	2,9596	" *
$2\,^3p - 4\,^3x$	22 528,6	6 988,6	$4s\,^3\Pi$	3,9631	0,21
$2\,^3p - 5\,^3s$	24 804,7	4 712,5	$5s\,^3\Sigma$	4,826	0

Die effektiven Quantenzahlen der z-Niveaus steigen, die der d-Niveaus sinken. Auch die der x-Niveaus scheinen zu steigen und stehen in der Mitte zwischen denen von z und d. Es rücken also die effektiven Quantenzahlen der $sd\Sigma$-, $sd\Pi$- und $sd\Delta$-Niveaus zusammen, wie es die Theorie fordert. Auch die ϱ-Werte zeigen trotz ihrer Ungenauigkeit die von der Theorie geforderten Abhängigkeiten. Die Elektronenterme von x und y fallen zusammen, innerhalb der Grenzen der Genauigkeit.

Zeemaneffekte.

In allerjüngster Zeit haben Curtis und Jevons** an einer Reihe von Heliumbandenlinien Zeemaneffekte gemessen. Bei den bisher bekannten Banden finden sie nur bei der ersten Linie jedes Zweiges beträchtliche Zeemaneffekte. Nur bei der Bande $2\,^3p^0 - 4\,z^0$ finden sie bei allen Linien große Zeemaneffekte. Eine Reihe weiterer, nicht eingeordneter Linien zeigt ebenfalls große Zeemaneffekte. Es sind dies gerade solche, deren Zugehörigkeit zu $p - z$-Banden in dieser Arbeit nachgewiesen wird, nämlich der Banden $2\,^3p^0 - 6\,^3z^0$ und der Bande $2\,^3p^1 - 4\,^3z^1$,

* Daß diese ϱ-Werte stark mit j variieren und sich deshalb nicht berechnen lassen, ist von der Theorie ebenfalls gefordert.

** W. E. Curtis und W. Jevons, Proc. Roy. Soc. **120**, 110, 1928.

die im folgenden Abschnittt behandelt wird. Auch diese Erscheinung stimmt mit der hier entwickelten Theorie überein. Zeemaneffekte nicht entkoppelnder Terme sind proportional $1/j^2$, während bei völliger Entkopplung die Zeemaneffekte von j unabhängig sein müssen *. Dies ist der Fall bei den stark entkoppelnden z-Termen.

Die Banden bei $\lambda = 403$, 404, 447 und 389 mμ.

Diese Banden stellen nichts wesentlich Neues dar. Einige Linien der Bande bei $\lambda = 403$ mμ wurden schon von Weizel und Füchtbauer angegeben. Das Anfangsniveau ist $5\,^3s^0$. Die Bande bei $\lambda = 404$ mμ entspricht dem hierzugehörigen Schwingungsübergang $1 \to 1$. Die Bande bei $\lambda = 447$ mμ gehört zur Reihe der $p - z$-Banden. Dies geht aus der Art ihres Anfangsterms hervor. $\varrho = 0{,}55$. Es ist wie bei den anderen Banden dieser Reihe nur ein Q- und ein P-Zweig auffindbar. Die großen Zeemaneffekte dieser Bande stimmen auch mit der Einordnung des Anfangsterms als z-Term überein **. Da ihr Endniveau $2\,^3p^1$ ist und sie überdies in der Nachbarschaft von $2\,^3p^0 - 4\,^3z^0$ liegt, muß sie $2\,^3p^1 - 4\,^3z^1$ sein. Die Bande bei $\lambda = 389$ mμ ist $2\,^1s^1 - 5\,^1p^0$.

Die folgende Tabelle gibt die $D(j)$ und $\Delta(j)$ für die Terme $5\,^3s^0$, $5\,^3s^1$ und $4\,^3z^1$.

j	$5\,^3s^0$ $D(j)$	$5\,^3s^0$ Δj	$5\,^3s^1$ $D(j)$	$5\,^3s^1$ $\Delta(j)$	$4\,^3z^1$ $D(j+1)$	$4\,^3z^1$ $\Delta(j+1)$
1	70,93	56,94	69,54	54,15	76,48	51,54
3	127,87	55,90	123,69	53,93	128,02	51,72
5	183,77	58,40	177,62	57,31	179,74	52,10
7	242,17	50,40	234,93	46,53	231,84	50,13
9	292,57	55,59	281,46		281,97	
11	348,16	52,63				
13	400,79					

Man sieht, daß $4\,^3z^1$ sich ganz analog $4\,^3z^0$ verhält. $\varrho = 0{,}55$.

Die Werte der Nullinien sind:

$$2\,^3p^0 - 5\,^3s^0 = 24\,840{,}7\ \text{cm}^{-1},$$
$$2\,^3p^1 - 5\,^3s^1 = 24\,740{,}9\ \text{„}$$
$$2\,^3p^1 - 4\,^3z^1 = 22\,340\ \text{„}$$

* F. Hund, ZS. f. Phys. **36**, 657, 673, 1926.

** Curtis und Jevons geben einen Teil der zu dieser Bande gehörigen Linien als nicht eingeordnete Linien mit großem Zeemaneffekt an.

Setzt man für $2\,^3p^0 - 2\,^3p^1 = 1696\,\mathrm{cm}^{-1}$, welchen Wert man aus dem β für $2\,^3p^0$ erhält, wenn man dieselbe Korrektion anbringt, die für $2\,^3s^0$ nötig ist, so erhält man:

$$5\,^3s^0 = 4712{,}5\,\mathrm{cm}^{-1},$$
$$5\,^3s^1 = 3081 \quad ,$$
$$4\,^3z^1 = 5481 \quad ,$$

Die Schwingungsquanten für $5\,^3s$ und $4\,^3z$ sind also:

$$5\,^3s^0 - 5\,^3s^1 = 1631\,\mathrm{cm}^{-1},$$
$$4\,^3z^0 - 4\,^3z^1 = 1612 \quad ,$$

Der Wert für z stimmt überein mit denen für s- und p-Terme:

$$4\,^3s^0 - 4\,^3s^1 = 1634\,\mathrm{cm}^{-1},$$
$$4\,^3p^0 - 4\,^3p^1 = 1628 \quad ,$$
$$4\,^3z^0 - 4\,^3z^1 = 1612 \quad ,$$

Ohne Annahme von $\varrho = \varrho_{(J)}$ würde sich aus β ein ganz falscher Wert für das Schwingungsquant errechnen.

Ergebnis.

Im folgenden sind die theoretischen Erwartungen, die sich aus dem Molekelmodell für He_2 und der Annahme der Entkopplung des Elektronendrehimpulses ergeben, dem empirischen Befund gegenübergestellt. Man sieht daraus, daß gute Übereinstimmung besteht, wenn man die konventionellen Terme den systematischen wie geschehen zuordnet:

$$s \equiv s\,s\,\Sigma, \quad p \equiv s\,p\,\Pi, \quad d \equiv s\,d\,\Delta, \quad \binom{x}{y} \equiv s\,d\,\Pi, \quad z \equiv s\,d\,\Sigma.$$

Theoretisch.	Empirisch.
1. Es gibt ein Triplett- und ein Singulettsystem.	1. Es gibt ein Ortho- und ein Paraheliumbandenspektrum.
2. Es gibt sechs Serien von Termen in jedem System: $s\,s\,\Sigma$, $s\,p\,\Pi$, $s\,p\,\Sigma$, $s\,d\,\Delta$, $s\,d\,\Pi$ und $s\,d\,\Sigma$. Von diesen kombinieren vier, nämlich $s\,s\,\Sigma$, $s\,d\,\Delta$, $s\,d\,\Pi$ und $s\,d\,\Sigma$ mit $s\,p\,\Pi$.	2. Es gibt fünf Serien von Termen in jedem System: s, p, d, $\binom{x}{y}$ und z. Der $s\,p\,\Sigma$ entsprechende Term ist noch nicht gefunden. Von diesen kombinieren vier, nämlich s, d, $\binom{x}{y}$ und z mit p.
3. Die $s\,p\,\Pi$-, $s\,d\,\Pi$- und $s\,d\,\Delta$-Terme spalten wegen der Entkopplung des Bahndrehimpulses in zwei Rotationstermfolgen auf. Für eine ist $\varrho > 0$, für die andere $\varrho < 0$.	3. Die p-, $\binom{x}{y}$- und d-Terme besitzen zwei Folgen von Rotationsniveaus. Die eine läßt sich durch $\varrho > 0$, die andere durch $\varrho < 0$ darstellen.

Theoretisch.	Empirisch.
4. $ss\,\Sigma$-Terme spalten nicht auf. $\varrho = 0$.	4. s-Terme spalten nicht auf. $\varrho = 0$.
5. $sd\,\Sigma$ spalten nicht auf. $\lvert\varrho\rvert$ ist sehr groß.	5. z-Terme spalten nicht auf. ϱ ist sehr groß.
6. ϱ wächst mit n.	6. ϱ wächst mit n.
7. ϱ wächst mit j.	7. ϱ wächst mit j.
8. Bei gleichem n und j sinkt ϱ in der Reihe $sd\,\Sigma$, $sd\,\Pi$, $sd\,\Delta$, $sp\,\Pi$, $ss\,\Sigma$.	8. Bei gleichem n und j sinkt ϱ in der Reihe z, $\binom{x}{y}$, d, p, s.
9. Die effektiven Quantenzahlen von $sd\,\Delta$, $sd\,\Pi$ nnd $sd\,\Sigma$, wie von $sp\,\Sigma$ und $sp\,\Pi$ rücken mit wachsendem n zusammen.	9. Die effektiven Quantenzahlen von d, $\binom{x}{y}$ und z rücken mit wachsendem n zusammen.

Das Bandenspektrum des Heliums zeigt diejenigen Elektronenterme, die von Hunds Theorie* der Molekelspektren gefordert werden. Die Verdopplung der Rotationsterme der Π- und Δ-Niveaus ist durch die Entkopplung des Elektronendrehimpulses von der Achse, welche durch die Rotation erfolgt, zu erklären. Die Entkopplung erklärt auch eine Reihe anderer starker Anomalien vieler Terme. He_2 ist bisher das einzige Beispiel, wo diese Art der Entkopplung beobachtet ist, und das einzige Bandenspektrum, bei dem alle Terme des theoretischen Schemas gefunden sind.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden im Physikalischen Institut der Universität Rostock ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Füchtbauer und Herrn Prof. Hund, die mich durch wertvolle Ratschläge unterstützten, auch an dieser Stelle meinen besonderen Dank auszusprechen. Ferner danke ich der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft, die mir die Durchführung dieser Arbeit ermöglichte.

* F. Hund, ZS. f. Phys. **40**, 742, 1927; **42**, 93, 1927 und eine demnächst erscheinende Arbeit in der ZS. f. Phys.

Über die Ionisation durch Elektronen in einem homogenen elektrischen Felde.

Von **M. J. Druyvesteyn** in Eindhoven (Holland).

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 6. Oktober 1928.)

Die Wahrscheinlichkeit einer Ionisierung in einem Edelgase in einem homogenen elektrischen Felde wird berechnet. Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Dichte der Elektronen wird aufgestellt, welche unter Umständen mit guter Näherung durch eine Hankelsche Funktion gelöst wird. Für Neon werden einige Kurven für die Ionisierungswahrscheinlichkeit gegeben.

Penning hat in einer Arbeit* unter obenstehendem Titel die folgende Frage, die für die Theorie der Zündspannung wichtig ist, beantwortet: Wenn ein Elektronenstrom in einem Edelgase in einem homogenen elektrischen Felde ohne Geschwindigkeit eine Platte (senkrecht zum Felde) verläßt, wo werden diese Elektronen dann zum ersten Male das Gas ionisieren, oder wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer erstmaligen Ionisierung auf eine bestimmte Entfernung von der Platte? In dieser Arbeit wird dieselbe Frage nochmals beantwortet, die Methode ist aber eine ganz andere.

Gegen die Methode von Penning kann man nämlich ein Bedenken haben. In dem Beispiel, das Penning numerisch durchgerechnet hat, ist die Breite, auf welche die Mehrzahl der Ionisierungen stattfindet, nur einige Male größer als die freie Weglänge der Elektronen, während bei der Ableitung der Gleichungen implizit vorausgesetzt ist, daß die freie Weglänge sehr klein ist im Verhältnis zu dieser Breite**. Es ist wahrscheinlich, daß nach der hier gegebenen Methode aus dieser Ursache kleinere Fehler vorkommen als bei Penning.

Im nahen Anschluß an Hertz*** werden wir erst den Zusammenhang aufstellen, der zwischen der Anzahl der Elektronen besteht, die sich

---

* F. M. Penning, ZS. f. Phys. **40**, 4, 1926.

** Da die Formel von Hertz für die Elektronendichte nicht exakt richtig ist in der Nähe des Randes, ist die Ableitung der Gleichung (3) von Penning gewiß nicht mehr richtig, wenn $da < \lambda$ ist, was einfach einzusehen ist, wenn man bedenkt, daß die Elektronen, die zurückdiffundieren zwischen a und $a + da$, wenigstens einmal auf da, auf ein Gasatom gestoßen sind und nach Hertz*** die Anzahl Stöße zwischen a und $a + da$ proportional $(da)^2$ ist. Wenn man die Gleichung von Hertz als richtig voraussetzt, kann, wenn $da < \lambda$ ist, die Anzahl Elektronen, die zwischen a und $a + da$ zurückdiffundiert, nicht proportional da sein, wie man es aus Gleichung (3) von Penning ablesen kann. (Siehe auch die Note ** auf Seite 201.)

*** G. Hertz, ZS. f. Phys. **32**, 298, 1925.

durch einen Querschnitt senkrecht zum Felde von der Platte fortbewegen (N) und der Dichte der Elektronen (ϱ).

Die Wahrscheinlichkeit einer Ionisierung bei einem Zusammenstoß eines Elektrons mit einem Gasatom sei k, sie ist nur eine Funktion der Geschwindigkeit des Elektrons, und da wir die Energieverluste des Elektrons beim Zusammenstoß mit einem Gasatom (wenn keine Ionisierung auftritt) vernachlässigen, ist k also nur abhängig von dem Abstand des Elektrons von der Platte. Diesen Abstand nennen wir x, die Einheit dieser Länge wird so gewählt, daß für $x = 1$ die Elektronen eine Energie haben, die in Volt ausgedrückt, gleich der Ionisierungsspannung des Gases ist. Für $x < 1$ ist also $k = 0$, und es gilt die Gleichung von Hertz:

$$N = -\frac{v\lambda}{3}\frac{d\varrho}{dx} + \frac{\varrho\gamma\lambda}{3v}, \tag{1}$$

λ ist die freie Weglänge der Elektronen, und wir nehmen an, daß sie unabhängig von der Geschwindigkeit der Elektronen v ist. Ferner ist $\gamma = \frac{e}{m}E$, wo e und m Ladung und Masse des Elektrons und E die elektrische Feldstärke sind. Für $x > 1$ kann ein Elektron ein Gasatom ionisieren. Wir lassen ein Elektron außer Betracht, sobald es ein Gasatom ionisiert hat, da es bei einer Ionisierung einen großen Energieverlust erleidet. Für $x > 1$ ist (1) nicht mehr gültig, man kann dann aber eine Gleichung aufstellen, die ganz analog (1) ist. Wir leiten diese Gleichung auf ähnliche Weise ab, wie Hertz die Gleichung (1) abgeleitet hat.

Wir nehmen eine Fläche df senkrecht zur x-Richtung. Die Anzahl der Elektronen, die in der Zeiteinheit in der Richtung der positiven x-Achse durch df geht, vermindert um die Anzahl, die in der Richtung der negativen x-Achse df durchläuft, ist $N\,df$. Vor der Durchquerung von df sind die Elektronen zuletzt in dem Volumenelement $d\sigma$ auf ein Gasatom gestoßen.

Die Anzahl der Zusammenstöße in der Zeiteinheit in $d\sigma$ sei $n\,d\sigma$. In $d\sigma$ verlieren wir $n\,k\,d\sigma$ Elektronen, da diese Elektronen ein Gasatom ionisiert haben. Wenn s der von den Elektronen zurückgelegte Weg von $d\sigma$ bis df und $d\omega$ der körperliche Winkel ist, worunter die Elektronen, die auf df treffen, $d\sigma$ verlassen, so ist

$$N\,df = \int n(1-k)\,d\sigma\, e^{-\frac{s}{\lambda}}\frac{d\omega}{4\pi}. \tag{2}$$

Compton und van Voorhis* haben k für eine Anzahl von Gasen bestimmt; bei nicht zu großen Geschwindigkeiten zeigt sich, daß (für $x > 1$) $k = q(x-1)$, wo q eine Konstante ist, die vom Gase abhängt.

Das Integral (2) ist auf ähnliche Weise zu berechnen wie bei Hertz, und man bekommt:

$$N = -\frac{v\lambda}{3}\{1-q(x-1)\}\frac{d\varrho}{dx} + \frac{\lambda\gamma}{3v}\{1-q(x-1)\}\varrho + \frac{v\lambda}{3}q\varrho. \quad (3)$$

Diese Gleichung geht für $q = 0$ in (1) über. In dieser Gleichung sind sowohl N wie ϱ unbekannte Größen.

Man kann nun aber eine zweite Gleichung zwischen N und ϱ aufstellen. Für $x < 1$ ist diese Gleichung $\frac{dN}{dx} = 0$, da keine Elektronen verlorengehen. Für $x > 1$ nimmt N mit zunehmendem x ab, da wir ein Elektron außer Betracht lassen, sobald es ein Atom ionisiert hat.

Die Anzahl der Stöße in der Volumen- und Zeiteinheit ist $n = \frac{\varrho v}{\lambda}$. also ist

$$\frac{dN}{dx} = -\frac{\varrho v}{\lambda}k = -\frac{\varrho v}{\lambda}q(x-1). \quad (4)$$

Durch Elimination von N aus (3) und (4) bekommt man die Gleichung zweiter Ordnung für ϱ:

$$\frac{d^2\varrho}{dx^2} - \frac{2q}{1-q(x-1)}\frac{d\varrho}{dx} + \left\{-\frac{3q}{\lambda^2}\frac{x-1}{1-q(x-1)} + \frac{1}{4x^2}\right\}\varrho = 0. \quad (5)$$

Für $x < 1$ gilt (5), wenn man $q = 0$ setzt. Ihre Lösung ist

$$\varrho = \frac{3N_0}{\lambda}\sqrt{\frac{x}{2\gamma}}\ln\frac{a}{x},$$

wo N_0 die Anzahl Elektronen, die in der Zeiteinheit die Platte verlassen, und a eine Integrationskonstante ist.

Für $x > 1$ ist die Lösung nicht so einfach. Setzen wir

$$w = \varrho\frac{1-q(x-1)}{1+q},$$

so wird

$$\frac{d^2w}{dx^2} + w\left\{-\frac{3q}{\lambda^2}\frac{x-1}{1-q(x-1)} + \frac{1}{4x^2}\right\} = 0. \quad (6)$$

* K. T. Compton und C. C. van Voorhis, Phys. Rev. **26**, 436, 1925, und **27**, 724, 1926; F. M. Penning, Physica **6**, 290, 1926.

Es ist mir nicht gelungen, diese Gleichung zu lösen. In manchen Fällen kann man aber Gleichung (6) mit großer Näherung ersetzen durch

$$\frac{d^2 w}{d x^2} - p(x-b) = 0, \tag{7}$$

wo p und b positive Konstanten sind.

Die Lösung dieser Gleichung ist*

$$w = \sqrt{x-b}\left[A J_{1/3}\left\{\frac{2i\sqrt{p}}{3}\sqrt{(x-b)^3}\right\} + B N_{1/3}\left\{\frac{2i\sqrt{p}}{3}\sqrt{(x-b)^3}\right\}\right],$$

wo $J_{1/3}$ und $N_{1/3}$ die beiden Besselschen Funktionen $\frac{1}{3}$ Ordnung und A und B Konstanten sind (im allgemeinen werden A und B komplex).

Ein wichtiger Fall ist, wenn das Feld bis ins Unendliche geht, dann ist für $x = +\infty$, $w = 0$ und es wird*

$$w = i^{4/3} C \sqrt{x-b}\, H^{(1)}_{1/3}\left\{\frac{2i\sqrt{p}}{3}\sqrt{(x-b)^3}\right\}.$$

$H^{(1)}_{1/3}$ ist die Hankelsche Funktion erster Art der Ordnung $\frac{1}{3}$, und C ist eine reelle Konstante. Die Lösung für ϱ ist

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \frac{3 N_0}{\lambda}\sqrt{\frac{x}{2\gamma}}\ln\frac{a}{x} \quad \text{für } x<1, \\ \varrho &= i^{4/3} C \frac{1+q}{1-q(x-1)}\sqrt{x-b}\, H^{(1)}_{1/3}\left\{\frac{2i\sqrt{p}}{3}\sqrt{(x-b)^3}\right\} \quad \text{für } x>1, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

die Konstanten a und C findet man aus der Kontinuität von ϱ und $\frac{d\varrho}{dx}$ für $x = 1$. Wenn wir ϱ kennen, ist das Problem gelöst, da die Anzahl der Ionisierungen in der Zeit- und Volumeneinheit

$$J = -\frac{dN}{dx} = \frac{\varrho v}{\lambda} q(x-1)$$

ist.

Für Neon wurde die Wahrscheinlichkeit einer Ionisierung für ein Elektron, also J/N_0, numerisch berechnet, q ist hier 0,065**, für λ wurde 0,05, 0,103 und 0,4 genommen (man bedenke, daß die Längeneinheit für λ dieselbe ist wie für x). Die Resultate sind in Fig. 1, Kurven I

---

* E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln, S. 94 und 167, 1909.

** F. M. Penning, ZS. f. Phys. **40**, 4, 1926.

bis III gezeichnet*. Der Fall $\lambda = 0{,}103$ ist auch schon von Penning** berechnet, seine Kurve ist gestrichelt gegeben; die Übereinstimmung ist also nicht sehr gut.

Aus der Figur sieht man, daß bei großem Gasdruck, also kleinem λ, die Ionisierung auf einen schmalen Bereich in der Nähe von $x = 1$ beschränkt bleibt.

Für $x > 2$ finden wieder neue Ionisierungen statt von Elektronen, die schon einmal ionisiert waren; diese Ionisierungen sind hier nicht

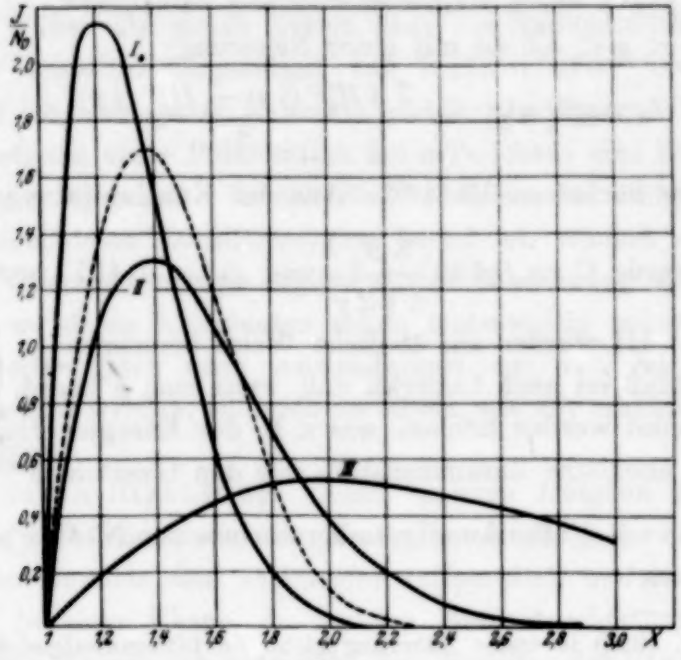


Fig. 1.
Die Kurven geben die Ionisierungswahrscheinlichkeit an. Kurve I gilt für $\lambda = 0{,}05$, Kurve II für $\lambda = 0{,}103$, Kurve III für $\lambda = 0{,}4$. Die gestrichelte Kurve ist nach Penning für $\lambda = 0{,}103$ gezeichnet.

berücksichtigt. Hierdurch haben die Kurven für $x > 2$ praktisch direkt keine Bedeutung.

Um die numerische Rechnung etwas zu verdeutlichen, wählen wir den Fall $\lambda = 0{,}103$, Kurve II der Figur.

---

* Bei den Kurven hat man immer die Kontrolle, daß $\int_1^\infty \frac{J}{N_0}\,dx = 1$ sein soll.

** Der Unterschied zwischen den Resultaten von Penning und mir, den man auch schon daran erkennen kann, daß die Kurve von Penning nicht mit meiner Gleichung (3) im Einklang ist, ist, wie bereits bemerkt wurde, wahrscheinlich dem Umstand zuzuschreiben, daß λ nicht sehr klein ist in bezug auf die Länge, auf welche die Mehrzahl der Ionisierungen stattfindet. Hierdurch wird nach de Groot

Der Unterschied zwischen den zweiten Faktoren der Gleichungen (6) und (7) ist für $p = 19{,}1$ und $b = 1{,}013$ zwischen $x = 1$ und $x = 2{,}5$ maximal 3,5 %.

Die Dichte der Elektronen für $x > 1$ wird

$$\varrho = \frac{1{,}065}{1 - 0{,}065\,(x-1)}\, C \sqrt{x - 1{,}013}\; i^{4/3} H_{1/3}^{(1)} \left\{ \frac{2\,i\sqrt{19{,}1}}{3} \sqrt{(x-1{,}013)^3} \right\}.$$

Leider ist, soweit mir bekannt, die Hankelsche Funktion $\frac{1}{3}$ Grades und mit rein imaginärem Argument nicht tabelliert. $i^{4/3} H_{1/3}^{(1)}(i\,y)$ wurde darum für $y < 0{,}5$ durch Reihenentwicklung berechnet*.

Für $0{,}5 < y < 3{,}5$ ist mit guter Näherung

$$i^{4/3} H_{1/3}^{(1)}(i\,y) = \frac{7\,i\,H_0^{(1)}(i\,y) - H_1^{(1)}(i\,y)}{8}.$$

Der Fehler ist höchstens 3,5 %**. Aus der Kontinuität von ϱ und $\frac{d\varrho}{dx}$ für $x = 1$ wurde $C = 0{,}495 \frac{3\,N_0}{\lambda\sqrt{2\gamma}}$ und $a = 1{,}497$ bestimmt. Die Kurven I und III wurden auf ähnliche Weise berechnet.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß, wenn man ϱ kennt, auch andere Größen bestimmt werden können, wie z. B. der Energieverlust der Elektronen durch elastische Zusammenstöße mit den Gasatomen***.

Eindhoven, Natuurkundig Laboratorium der N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken.

(Physica 8, 23, 1928) in erster Näherung nicht die Differentialgleichung, sondern der Randwert geändert. Dadurch ist die Lösung von Hertz, wie Penning sie gebraucht, nicht ohne Gefahr; bei der hier angewandten Methode wird man darum wahrscheinlich viel kleinere Fehler machen als nach Pennings Methode. Es muß aber betont werden, daß die Schlüsse, die Penning am Ende seiner Arbeit aus seinen Kurven zieht, auch bei den Resultaten dieser Arbeit richtig bleiben.

* E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln, S. 92, 95 und 135.

** Für einige Werte von y bis $y = 3{,}5$ wurde nämlich $i^{4/3} H_{1/3}^{(1)}(i\,y)$ durch Reihenentwicklung berechnet.

*** Penning, l. c.

Magnetismus und Kernbau.

Von **D. Enskog** in Gävle (Schweden).

(Eingegangen am 7. Oktober 1928.)

Ein kleiner Fehler in meiner Arbeit „Das Bohrsche Magneton und die Radioaktivität" wird berichtigt, ebenso auch mit Anwendung eines neubestimmten Basiswertes die beobachteten Zerfallsenergien der α-Strahler. Hierdurch wird die Übereinstimmung in auffallender Weise verbessert. Es werden ferner Berechnungen über den Kernaufbau durch Protonenbindung gemacht. Die erhaltenen Packungsdefekte haben, soweit man aus den jetzt vorliegenden Daten beurteilen kann, die richtige Größe.

Etwas früher als meine Arbeit über die Radioaktivität* war eine Arbeit über denselben Gegenstand von Rutherford** erschienen, von deren Inhalt ich erst später Kenntnis erhielt. In dieser Arbeit wird aus der Voraussetzung einer Polarisation des α-Teilchens eine Berechnung der Zerfallsenergien gegeben. In der Endformel werden einige Konstanten aus den beobachteten Zerfallsenergien berechnet, wonach sich eine ausgezeichnete Übereinstimmung ergibt. Meine Berechnung hat den Vorzug, daß die verwendeten Konstanten schon anderweitig bekannt sind. Im folgenden sollen jetzt neue Anwendungen der von mir abgeleiteten Formeln gemacht werden, wodurch dieselben, wie mir scheint, eine weitere Stütze erhalten.

Über die α-Strahlung. Nach unseren früheren Annahmen ist sowohl das α-Teilchen wie der Restkern ein Magnet. Die Momente dieser beiden Magnete sind zueinander antiparallel, und es bewegen sich die Körper in einer Ebene, die zu den Momentenrichtungen senkrecht ist***. Diese Anordnung entspricht dem Resultat des Stern-Gerlachschen Versuchs über die Einstellung eines Atommagnets in einem Magnetfeld. Die ebenen Polarkoordinaten der relativen Bahnbewegung des α-Teilchens seien r und φ, und einem positiven $\dot{\varphi}$ entspreche eine Rechtsdrehung um das Kernmoment. Ist z die Kernladung des Restkerns und $2y$ das Produkt der Magnetonzahlen des α-Teilchens und des Restkerns, so ist die elektrostatische und magnetische Energie bzw. gleich

$$\frac{2ze^2}{r} \quad \text{und} \quad -\frac{2y\mu^2}{r^3}, \tag{1}$$

* ZS. f. Phys. **45**, 852—868, 1927.

** E. Rutherford, Structure of the radioactive Atom and origin of the α-rays. Phil. Mag. (7) **4**, 580—605, 1927.

*** Diese Annahme kann wohl nur die durchschnittlichen Verhältnisse während der Bewegung darstellen. Im allgemeinen hat man auch mit präzessierenden Bewegungen zu rechnen, wo die verschiedenen Impulsmomente sich zu einer konstanten Resultanten zusammensetzen.

wenn e die positive Elementarladung und μ das Bohrsche Magneton bedeutet. Es seien ferner M_1 und M_2 die Massen und mithin

$$M = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \tag{2}$$

die reduzierte Masse der beiden Körper. Bei der langsamen Bewegung gehorchen alle Kräfte dem dritten Newtonschen Gesetz. Man bekommt daher die richtige relative Bewegung, wenn man annimmt, daß der Restkern fest ist, das α-Teilchen die Masse M hat und die auf das α-Teilchen wirkenden Kräfte die wirklich vorhandenen sind. Die elektrodynamischen Kräfte kann man wiederum so berechnen, als wenn die relative Bewegung eine absolute wäre. Sind a und b die Magnetonenzahlen bzw. des α-Teilchens und des Restkerns, so erhält man diese Kräfte richtig aus der Annahme, daß das α-Teilchen unmagnetisch ist, der Restkern aber ein magnetisches Moment der Magnetonenzahl

$$\frac{x}{2} = \frac{a}{2} \cdot z - b \tag{3}$$

hat. Die Richtung dieses Moments stimmt mit derjenigen des Moments des α-Teilchens überein. Sind p_r und $p_\varphi = p$ die Impulse, so erhält man nach bekannten Regeln die Hamiltonsche Energiefunktion

$$H = \frac{p_r^2}{2 M r^2} + \frac{1}{2 M r^2}\left(p + \frac{x e \mu}{c r}\right)^2 + \frac{2 z e^2}{r} - \frac{2 y \mu^2}{r^3}, \tag{4}$$

woraus hervorgeht, daß p konstant ist. Durch Fortlassen des ersten positiven Gliedes erhält man eine Funktion von der einzigen Variabeln r:

$$W(r) = \frac{1}{2 M r^2}\left(p + \frac{x e \mu}{c r}\right)^2 + \frac{2 z e^2}{r} - \frac{2 y \mu^2}{r^3}, \tag{5}$$

deren Maximum die Zerfallsenergie ergibt. Durch Nullsetzen der ersten Ableitung dieser Funktion bekommt man die Gleichung

$$\frac{1}{M r}\left(p + \frac{x e \mu}{c r}\right)\left(p + \frac{2 x e \mu}{c r}\right) + 2 z e^2 - \frac{6 y \mu^2}{r^2} = 0, \tag{6}$$

aus welcher der entsprechende r-Wert zu berechnen ist. Das erste Glied von (5) ist verglichen mit den übrigen ziemlich klein. Läßt man dieses Glied fort, so erhält man die Funktion $V(r)$, die für

$$r = r_0 = \frac{\mu}{e}\sqrt{\frac{3y}{z}} \tag{7}$$

ihren größten Wert annimmt. Es wird

$$V(r_0) = \frac{4 z e^3}{3 \mu}\sqrt{\frac{z}{3 y}} = \frac{4 z e^2}{3 r_0}. \tag{8}$$

Führt man eine azimutale Quantenzahl k, die Feinstrukturkonstante α und den Wert von μ durch die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} p &= k \cdot \frac{h}{2\pi}, \\ \alpha &= \frac{2\pi e^2}{ch}, \\ \mu &= \frac{eh}{4\pi mc} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ein, wo m die Ruhmasse eines Elektrons, c die Lichtgeschwindigkeit und h die Plancksche Konstante ist, so kann man (5) und (6) folgendermaßen schreiben:

$$\frac{W(r)}{V(r_0)} = \frac{3m}{4\alpha M\sqrt{3yz}} \cdot \frac{r_0^2}{r^2}\left(k + \alpha x\sqrt{\frac{z}{3y}} \cdot \frac{r_0}{r}\right)^2 + \frac{r_0}{2r}\left(3 - \frac{r_0^2}{r^2}\right), \tag{10}$$

$$\frac{r_0^2}{r^2} = 1 + \frac{m}{\alpha M\sqrt{3yz}} \cdot \frac{r_0}{r}\left(k + \alpha x\sqrt{\frac{z}{3y}} \cdot \frac{r_0}{r}\right)\left(k + 2\alpha x\sqrt{\frac{z}{3y}} \cdot \frac{r_0}{r}\right). \tag{11}$$

Durch Iteration kann man den gesuchten Wert von $\frac{r_0}{r}$ bestimmen, der (11) genügt, und dann ergibt sich nach (10) und (8) die Zerfallsenergie. Für die meisten α-Strahler erhält man aus (11) einen hinreichend genauen Wert von $\frac{r_0}{r}$, wenn man in die rechte Seite einfach $\frac{r_0}{r} = 1$ einsetzt. Wenn y klein, oder wenn $k > +1$ ist, muß man allerdings die Lösung von (11) genauer ermitteln.

Die so berechnete Zerfallsenergie findet sich nach dem Zerfall zum größten Teile als relative Bewegungsenergie des α-Teilchens und des Restkerns wieder. Um diese Energie richtig zu erhalten, muß man eine Korrektion für die Anziehung der äußeren Elektronen auf das α-Teilchen anbringen. Die Korrektion beträgt für $z = 90$ (Uran) $- 0{,}062 \cdot 10^{-6}$ Erg und für $z = 81$ (RaC usw.) $- 0{,}049 \cdot 10^{-6}$ Erg. Für die übrigen α-Strahler kann man sie daraus durch Interpolation ermitteln.

Um aus der bekannten Geschwindigkeit der α-Strahlen die Bewegungsenergie der Teilchen mit ausreichender Genauigkeit zu erhalten, muß man bekanntlich eine übrigens kleine Relativitätskorrektion anbringen. In den durch (5) und (6) bestimmten kritischen Bahnen ist die Geschwindigkeit der Teilchen, verglichen mit deren Geschwindigkeit nach dem Zerfall, ziemlich klein, was schon daraus hervorgeht, daß die relative Bewegungsenergie in den genannten Bahnen durch das erste, vergleichsweise kleine

Glied von (5) oder (10) dargestellt wird. Ist v die relative Geschwindigkeit des α-Teilchens, so findet man durch eine leichte Berechnung für ThC' ($k = -1$, $x = 81$)

$$\frac{v^2}{c^2} = 0{,}000\,33.$$

Bei der hier angestrebten Genauigkeit kann daher von der Relativitätskorrektion zu (10) und (11) abgesehen werden.

In meiner früheren Arbeit erhielt ich eine gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen aus der Annahme, daß die Magnetonenzahl des α-Teilchens gleich 1 und die des Restkerns folglich gleich $2y$ sei. Es folgt aus dieser Annahme nach (3)

$$x = z - 4y. \tag{12}$$

In meiner früheren Arbeit findet sich leider hier ein Vorzeichenfehler (vgl. Gleichung (14), S. 859). Das Glied $4y$ ist aber, verglichen mit z, ziemlich klein, und da x auf den Wert von $W(r)$ keinen bedeutenden Einfluß hat, so weichen die dort berechneten Werte von den richtigen nur wenig ab. Das S. 860 von der Beziehung zwischen dem Vorzeichen von k und der Bewegungsrichtung des α-Teilchens Gesagte bezieht sich auf das fiktive Moment, dessen Richtung nicht mit der wirklichen Momentenrichtung des Restkerns, sondern mit der des α-Teilchens übereinstimmt. Überhaupt ist es ja das α-Moment, das die elektrodynamischen Wechselwirkungen hauptsächlich bestimmt.

Es hat ferner kürzlich Briggs eine neue Absolutbestimmung der Geschwindigkeit der α-Strahlen von RaC ausgeführt* und erhielt dabei den von Rutherfords und Robinsons Wert wenig abweichenden $1{,}923 \cdot 10^9$ cm/sec. Hierdurch werden die übrigen α-Geschwindigkeiten um entsprechende Beträge geändert.

In der folgenden Tabelle gebe ich die neuen Geschwindigkeiten und die daraus berechneten Zerfallsenergien wieder. Die Geschwindigkeiten sind aus den von Geiger gemessenen Reichweiten** und aus dem obigen Basiswert gemäß der Geigerschen Relation $v^3 = kR$ zwischen Geschwindigkeit und Reichweite berechnet. Für Uran I und Uran II benutze ich jedoch die kürzlich von Laurence*** bestimmten Reichweiten und für ThC' die Absolutbestimmung von Briggs*. — In der Tabelle finden sich ferner die aus (10), (11) und (12) folgenden theoretischen Zerfalls-

* G. H. Briggs, Proc. Roy. Soc. (A) **118**, 549—557, 1928.
** H. Geiger, ZS. f. Phys. **8**, 45—57, 1922.
*** G. C. Laurence, Phil. Mag. (7) **5**, 1027—1038, 1928.

Tabelle 1.

α-Strahler	$v \cdot 10^{-9}$ (beob.) in cm/sec	Zerfallsenergie (beob.) in 10^{-6} Erg	y	k	$\frac{r_0}{r}$	Zerfallsenergie (ber.) in 10^{-6} Erg
U I	1,407	6,66	$^4/_3$	—	—	6,67
U II	1,496	7,53	1	—	—	7,71
Io	1,483	7,40	1	—	—	7,46
Ra	1,512	7,69	1	5	1,060	7,68
Ra Em . . .	1,614	8,77	$^2/_3$	1	1,031	8,77
Ra A	1,689	9,61	$^1/_2$	— 1	1,022	9,65
Ra C'	1,923	12,48	$^1/_3$	1	1,095	12,52
Ra F	1,588	8,50	$^2/_3$	(2)	1,043	8,55
Pa	1,553	8,11	1	5	1,062	8,09
Rd Ac . . .	1,684	9,55	$^2/_3$	2	1,050	9,55
Ac X	1,646	9,12	$^2/_3$	1	1,035	9,09
Ac Em . . .	1,808	11,02	$^2/_5$	—	—	11,03
Ac A	1,887	12,01	$^1/_3$	— 1	1,050	12,04
Ac C	1,778	10,66	$^2/_5$	— 1	1,034	10,67
Th	1,436	6,94	$^6/_5$	(2)	1,022	6,94
Rd Th . . .	1,601	8,62	$^4/_5$	2	1,038	8,63
Th X	1,644	9,10	$^2/_3$	1	1,036	9,09
Th Em . . .	1,729	10,07	$^1/_2$	— 1	1,025	10,02
Th A	1,797	10,88	$^2/_5$	— 1	1,035	10,88
Th C	1,697	9,70	$^1/_2$	1	1,047	9,70
Th C'	2,053	14,23	$^1/_4$	— 1	1,090	14,26

energien und die benutzten Werte von k und y. Der leichteren Kontrolle wegen gebe ich auch die angenäherten Werte von $\frac{r_0}{r}$. Die Werte von r_0 und $V(r_0)$ findet man in meiner früheren Arbeit.

Für vier Substanzen ist kein k-Wert angegeben. Die in der letzten Spalte stehenden Zahlen sind in diesen Fällen lediglich das für die Anziehung der äußeren Elektronen korrigierte $V(r_0)$. Da schon diese Größe größer als die beobachtete Zerfallsenergie ist, muß man für k einen negativen Wert von solcher Größe wählen, daß das erste Glied von (10) [und das zweite von (11)] praktisch genommen gleich Null wird. Dies ist immer möglich, aber der Wert von k wird unsicher. — Übrigens sind drei k-Werte (für RaF, Th und RdTh) abgeändert worden. Für U II kann ich den Wert von Laurence nicht aus wahrscheinlichen Annahmen über y und k erhalten.

Durch die Umrechnung wird die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werten entschieden verbessert, und es ist besonders befriedigend, daß für die Basissubstanz Radium C' die Abweichung auf ein Drittel ihres früheren Wertes herabgesetzt wird. Für die meisten der mit Sicherheit bekannten Zerfallsenergien gibt unsere

Formel die Beobachtungen mit wirklicher Präzision wieder. In dieser Übereinstimmung einen Zufall sehen zu können, scheint mir völlig ausgeschlossen.

Für große Zerfallsenergien kann man vielleicht eine systematische Abweichung in solcher Richtung finden, daß die beobachteten Werte kleiner als die berechneten sind. Diese Abweichung könnte als die Wirkung einer elektrischen Polarisation gedeutet werden, und aus der Größe der Abweichung könnte die Größe der letzteren berechnet werden. Eine solche Polarisation würde vorzugsweise auf die großen Zerfallsenergien einwirken, da der kritische Abstand r hier am kleinsten wird*.

Es soll jedoch nicht das größte Gewicht auf die genaue absolute Übereinstimmung gelegt werden. Eine kleinere systematische Abweichung könnte etwa aus der Unsicherheit der benutzten Atomkonstanten, oder aus in unserer Theorie nicht berücksichtigten Nebenumständen erklärt werden. Auch bei Vorhandensein solcher Abweichungen würde man aber den Schluß ziehen können, daß unsere Anwendung von Quantenzahlen in der Hauptsache berechtigt ist. Denn anderenfalls würden sich Abweichungen von ganz anderer Art und Größe zeigen.

Für einige Substanzen liegen Absolutbestimmungen vor, die jedoch miteinander nicht sehr nahe übereinstimmen. Für Ra F ergibt die Bestimmung von I. Curie nach Anbringung der Relativitätskorrektion $v = 1{,}591 \cdot 10^9$ cm/sec**, was einer Zerfallsenergie von $8{,}53 \cdot 10^{-6}$ Erg entspricht. Hierdurch reduziert sich eine der größeren Abweichungen in unserer Tabelle. Briggs gibt in seiner Arbeit auch Geschwindigkeiten, die nach einer von ihm ermittelten empirischen Relation zwischen Reichweite und Geschwindigkeit berechnet sind. Diese Berechnung scheint mit einiger Unsicherheit behaftet zu sein***, und ich habe daher die aus der Geigerschen Relation ermittelten Geschwindigkeiten benutzt.

Die Werte von k weichen bei Radium und Protactinium in auffälliger Weise von den übrigen ab. Es mag erwähnt werden, daß man den beobachteten Werten der Zerfallsenergie ziemlich nahe kommt, wenn man annimmt, daß das magnetische Moment des α-Teilchens hier zwei Magnetonen ist, und $k = 1$ setzt. Dann ist das Kernmoment gleich y Magnetonen, und daher nach (3)

$$x = 2z - 2y \tag{13}$$

* Man könnte auch einen partiellen „Paschen-Backeffekt“ vermuten.
** Siehe G. H. Briggs, l. c. S. 556.
*** Derselbe, l. c. S. 555.

anzunehmen. Für Radium ergibt sich aus diesen Annahmen die Zerfallsenergie $7{,}63 \cdot 10^{-6}$ Erg und für Protactinium $8{,}08 \cdot 10^{-6}$ Erg.

Eine Änderung von k hat bei verschiedenen Substanzen sehr verschiedenen Einfluß auf den berechneten Wert der Zerfallsenergie. Bei Ra F ergibt sich mit $k = 1$ die Zahl 8,44 statt der in der Tabelle gegebenen 8,55. Für Thor würde die entsprechende Änderung nur eine Erniedrigung der Zahl 6,94 auf 6,89 mit sich führen. Da der für Thor gegebene empirische Wert unsicher ist, sind für diese Substanzen die k-Werte eingeklammert.

Vertauscht man aber für Th C' $k = -1$ mit $k = 1$, so ergibt sich eine Zerfallsenergie von $15{,}13 \cdot 10^{-6}$ Erg. Nun sendet Th C + C' bekanntlich auch zwei Arten von weitreichenden α-Strahlen aus, deren Reichweiten bei 15° bzw. 9,5 cm und 11,5 cm sind. Diesen Reichweiten entsprechen die Zerfallsenergien $15{,}3 \cdot 10^{-6}$ Erg und $17{,}4 \cdot 10^{-6}$ Erg. Der erstere Wert liegt nahe dem eben für Th C' berechneten. Für Th C erhält man aus der Annahme $y = \frac{1}{5}$, $k = 1$ die Zerfallsenergie $17{,}57 \cdot 10^{-6}$ Erg. Es wäre zu wünschen, daß man über die absoluten Geschwindigkeiten und die Herkunft dieser Strahlen bald möglichst genaue und zuverlässige Angaben erhielte, da eine Abweichung von unseren Formeln hier am ehesten zu erwarten ist. Für die weitestreichenden dieser Strahlen berechnet sich der kritische Radius r zu $1{,}3 \cdot 10^{-12}$ cm $\left(r_0 = 1{,}66 \cdot 10^{-12} \text{ cm}; \frac{r_0}{r} = 1{,}27\right)$.

Die Umlaufzahl in der kritischen Bahn wird für die normalen α-Teilchen des Th C' $5 \cdot 10^{19}$ pro Sekunde.

Der kritische Radius r nimmt nach unseren Formeln im ganzen mit wachsender Geschwindigkeit ab. Man kann aber daraus nicht den Schluß ziehen, daß die schnelleren Strahlen aus den inneren Teilen des Kernes kommen. Im Gegenteil geht aus den allgemeinen Überlegungen auf S. 866 in meiner früheren Arbeit hervor, daß die stabilen kreisförmigen Bahnen, die den schnelleren Strahlen entsprechen, die größeren Radien haben. Wäre unser Energieausdruck für so kleine r noch anwendbar, so würde aus unseren auf S. 867 gegebenen Zahlen hervorgehen, daß für Substanzen mit der Atomnummer 84 (z. B. Th C') die Radien aller stabilen kreisförmigen Bahnen kleiner als $8{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm wären. In so kleinen Abständen wird sich wohl aber die Struktur des Kernes bemerkbar machen und Abweichungen hervorrufen. In Anbetracht der guten Übereinstimmung der berechneten Werte mit den gemessenen auch

für RaC′ und ThC′, kann man aber vermuten, daß die Abweichung nicht sehr bedeutend wird. In nicht kreisförmigen Bahnen können allerdings größere Abstände vorkommen.

Durch unsere Theorie löst sich von selbst ein Widerspruch bezüglich der Dimensionen des Urankerns, auf den Rutherford hingewiesen hat. Aus der Geschwindigkeit der α-Strahlen von Uran I kann man nach dem Coulombschen Gesetz berechnen, daß das α-Teilchen, wenn es seine ganze Geschwindigkeit in dem Coulombschen Felde gewinnt, von einem Punkte kommt, der dem Kernmittelpunkt nicht näher als $7 \cdot 10^{-12}$ cm liegen kann. Dies wäre demgemäß eine untere Grenze des Kernradius. Bei Ablenkungsversuchen konnte aber auch in dem Abstand $3 \cdot 10^{-12}$ cm keine Abweichung von dem Coulombschen Gesetz sicher konstatiert werden. — Nach unserer Theorie wirkt auch die negative magnetische Energie auf die Endgeschwindigkeit des α-Teilchens ein, und es wird daher die auf das Coulombsche Gesetz fußende Berechnung unterer Grenzen der Kernradien ungültig. Das Magnetfeld des normalen Urankerns ist wahrscheinlich viel schwächer als das von uns berechnete um den Restkern*.

Es sei endlich darauf hingewiesen, daß bei der Zuverlässigkeit unserer Formeln (10), (11) ein neuer Weg einer genauen Absolutbestimmung der Größe $\frac{m c e^2}{h}$ gangbar erscheint. Sind die Größen $\frac{m}{M}$ und α mit mäßiger Genauigkeit bekannt, so kann man aus der empirisch bestimmten Zerfallsenergie und aus (10) und (11) die Größe $V(r_0)$ berechnen. Daraus ergibt sich nach (8) $\frac{e^2}{\mu}$ oder $\frac{m c e^2}{h}$.

Über die Bindung von Protonen. Für die weiteren Rechnungen wird es bequem sein, einige Vergleichslängen einzuführen. Ist $\varrho^{(0)}$ der Halbmesser der Grundbahn des Bohrschen Wasserstoffatoms, so wird

$$\varrho^{(0)} = \frac{h^2}{4 \pi^2 m e^2} = 0{,}529 \cdot 10^{-8} \text{cm}.$$

* Zusatz bei der Korrektur. Es sei darauf hingewiesen, daß man aus dem Energieprinzip keine prinzipielle Einwendung gegen die Möglichkeit des Zerfalls ableiten kann. Der Kern besteht nicht aus zwei einfachen Körpern, sondern hat eine komplizierte Zusammensetzung. Daß im Phasenraume dieses Systems die Energiefläche auch solche Gebiete hat, wo die gegenseitige Energie eines α-Teilchens und des Restkerns die Höhe der Energieschwelle übertrifft, ist beinahe selbstverständlich. Das bedeutet aber, daß ein Zerfall prinzipiell möglich ist.

Wir definieren ferner die kürzeren Strecken $\varrho^{(1)}$ und $\varrho^{(2)}$ durch die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho^{(1)} &= \alpha\,\varrho^{(0)} = \frac{h}{2\pi m c} = \frac{2\mu}{e}, \\ \varrho^{(2)} &= \alpha\,\varrho^{(1)} = \frac{e^2}{m c^2}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Es wird dann

$$\varrho^{(1)} = 3{,}85 \cdot 10^{-11}\,\text{cm}, \quad \varrho^{(2)} = 2{,}81 \cdot 10^{-13}\,\text{cm}. \tag{15}$$

Für unser früheres r_0 (7) gilt der Ausdruck

$$r_0 = \frac{\varrho^{(1)}}{2}\sqrt{\frac{3y}{z}}. \tag{16}$$

Es sei ferner M_0 gleich $^1/_{16}$ der Masse des Sauerstoffatoms und M_1 die Masse des Protons. Da nach Aston das Atomgewicht des Wasserstoffs 1,007 78 beträgt, so bekommt man, wenn man die Masse des Elektrons berücksichtigt,

$$M_1 = 1{,}00724\,M_0. \tag{17}$$

Es soll das Proton einen magnetischen Kern der Ladungszahl z umkreisen. Die reduzierte Masse des Protons und des Kernes sei M und das Produkt der Magnetonenzahlen y. Ist das Proton unmagnetisch, so ist $y = 0$ anzunehmen, im anderen Falle wird die Größenordnung von y etwa $\frac{m}{M_1}$. Wählen wir die Rechtsdrehung um das Kernmoment als die positive Drehungsrichtung, so erhält unsere Funktion $W(r)$ die Form

$$W(r) = \frac{1}{2Mr^2}\left(p - \frac{x e \mu}{c r}\right)^2 + \frac{z e^2}{r} - \frac{y \mu^2}{r^3}. \tag{18}$$

Da das Produkt von z und die Magnetonenzahl des Protons jedenfalls als klein zu betrachten ist, so können wir x einfach gleich der Magnetonenzahl des Kernes setzen. Aus (18) ergibt sich nach (9) und (14)

$$\begin{aligned} \frac{W(r)}{m c^2} &= \frac{h^2}{8\pi^2 M m c^2 r^2}\left(k - \frac{2\pi x e \mu}{h c r}\right)^2 + \frac{z e^2}{m c^2 r} - \frac{y \mu^2}{m c^2 r^3} \\ &= \frac{m \varrho^{(1)2}}{2 M r^2}\left(k - \frac{x}{2}\cdot\frac{\varrho^{(2)}}{r}\right)^2 + \frac{z\,\varrho^{(2)}}{r} - \frac{y\,\varrho^{(2)}\,\varrho^{(1)2}}{4 r^3}. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$t = \frac{x}{2}\cdot\frac{\varrho^{(2)}}{r}, \tag{19}$$

so erhalten wir

$$\frac{M}{2m}\alpha^2 x^2 \cdot \frac{W(r)}{m c^2} = t^2(k-t)^2 + \frac{M}{m}\alpha^2 x z \cdot t - \frac{M y}{m x}\cdot t^3. \tag{20}$$

Die Funktion auf der rechten Seite von (20) nennen wir $\varphi(t)$. Schreiben wir ferner

$$a = 2k + \frac{My}{mx}, \tag{21}$$

so wird

$$\varphi(t) = t^4 - at^3 + k^2t^2 + \frac{M}{m}\alpha^2 xz\,.\,t \tag{22}$$

und

$$W(r) = \frac{2m^2c^2}{M\alpha^2x^2}\cdot\varphi(t). \tag{23}$$

Wir wollen in der auf S. 866 unserer früheren Arbeit erklärten Weise die Bedingung dafür suchen, daß die vorausgesetzte Bindung möglich sei. Wir suchen zu diesem Zwecke diejenigen Lösungen t und xz der Gleichungen

$$\varphi'(t) \equiv 4t^3 - 3at^2 + 2k^2t + \frac{M}{m}\alpha^2 xz = 0, \tag{24a}$$

$$\varphi''(t) \equiv 12t^2 - 6at + 2k^2 = 0, \tag{24b}$$

die auch der Ungleichung

$$\varphi'''(t) > 0 \tag{24c}$$

genügen. Aus (24b) und (24c) ergibt sich

$$t = \frac{1}{4}\left(a + \sqrt{a^2 - \frac{8}{3}k^2}\right). \tag{25}$$

Setzt man diesen Wert in (24a) und (22) ein, so erhält man

$$\frac{M}{m}\alpha^2 xz = \frac{1}{8}\left[a(a^2 - 4k^2) + \left(a^2 - \frac{8}{3}k^2\right)^{\frac{3}{2}}\right], \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{\max} &= \frac{1}{32}\left[a^2(a^2 - 4k^2) + \frac{8}{3}k^4 + a\left(a^2 - \frac{8}{3}k^2\right)^{\frac{3}{2}}\right] \\ &= \frac{a}{4}\cdot\frac{M}{m}\alpha^2 xz + \frac{k^4}{12}.\end{aligned} \tag{27}$$

Der entsprechende Wert von r ergibt sich aus (19) und (25), $W_{\max}$ aus (23) und (27).

Nehmen wir speziell an, daß das Proton unmagnetisch ist, so ist $y = 0$ und daher nach (21) $a = 2k$ zu setzen. Man erhält

$$xz = \frac{mk^3}{3\sqrt{3}\,\alpha^2 M} = 1{,}96\cdot\frac{M_1}{M}\cdot k^3,$$

$$r = \frac{3x}{2k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\varrho^{(2)} = 0{,}634\cdot\frac{x\varrho^{(2)}}{k} = \frac{x}{k}\cdot 1{,}78\,.\,10^{-13}\,\text{cm},$$

$$W_{\max} = \frac{2\sqrt{3}+3}{18}\cdot\frac{m^2c^2k^4}{M\alpha^2x^2} = 2{,}97\cdot 10^{-6}\cdot\frac{M_1k^4}{Mx^2}\ \text{Erg}.$$

Nehmen wir $x \geqq 1$, $k = 1$ an, so erhalten wir daher als obere Grenze von z

$$z_{max} \leqq 1{,}96 \cdot \frac{M_1}{M}.$$

Wenn der Kern 1, 2, 3 usw. Protonen enthält, so ist $\frac{M_1}{M}$ bzw. etwa gleich 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, usw. Der größte ganzzahlige Wert von z_{max} wird daher, wie man findet, 2. Die höchste Ladungszahl des zusammengesetzten Kernes wäre 3, und zwar wäre anzunehmen, daß ein Kern mit dieser höchsten Ladung relativ unbeständig wäre. (Für $x = 2$ würde sich ergeben, daß die höchste Ladungszahl gleich 2 wäre.) In dieser Weise würde man in sehr direkter Weise zu dem Resultat kommen, daß die größeren Kerne aus Heliumkernen und kleineren Bausteinen bestehen müssen (wobei es noch unsicher wäre, wie viele Heliumisotope vorhanden sein können).

Man begegnet indessen auch einer Schwierigkeit. Bei der Bindung eines unmagnetischen Protons wird nach (18) die Bindungsenergie immer positiv, während nach den von Aston erhaltenen Atomgewichten der Isotope ein großer Energieverlust anzunehmen ist. Nun führt wohl die Anlagerung des Protons eine innigere Bindung der Elektronen mit sich. Ob der entsprechende Energieverlust hinreichend groß sein kann, erscheint jedoch wenigstens problematisch.

In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, daß die Dimensionen der freien Elektronen mit denjenigen unserer Protonenbahnen vergleichbar sind oder sie sogar übertreffen. Nach älterer Auffassung ist der Radius des Elektrons nämlich etwa gleich $\frac{2}{3}\varrho^{(2)} - \varrho^{(2)}$.

Wir wenden ferner unsere Formeln auf den Fall an, daß das Proton magnetisch ist, und nehmen an, daß $\frac{My}{mx} = 1$ ist. Es hätte dann das magnetische Moment des Protons etwa die Größe $\frac{m}{M_1}$ Bohrsche Magnetonen. Nehmen wir ferner $k = 1$ an, so wird $a = 3$, und wir erhalten

$$r = x \cdot 1{,}02 \cdot 10^{-13}\ \text{cm},$$

$$xz = 39{,}4 \cdot \frac{M_1}{M},$$

$$W_{max} = 49{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{M_1}{M x^2}\ \text{Erg}.$$

Hier werden die möglichen Kernladungszahlen bedeutend größer. Der kleine kritische Radius wird wohl aber verhindern, daß sich viele Protonen zusammenschließen.

Wir wollen im folgenden annehmen, daß z gleich Null ist oder doch so klein, daß wir in erster Näherung das letzte Glied von (22) vernachlässigen können. Es wird dann

$$\varphi(t) = t^4 - a t^3 + k^2 t^2. \tag{28}$$

Man findet leicht, daß diese Funktion für die t-Werte

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{8}\left(3a + \sqrt{9a^2 - 32k^2}\right) \\ t_2 &= \frac{1}{8}\left(3a - \sqrt{9a^2 - 32k^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

bzw. ihren Minimum- und ihren Maximumwert annimmt. Es werden nach (19) die entsprechenden Werte von r:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= t_2 \cdot \frac{x\,\varrho^{(2)}}{k^2}, \\ r_2 &= t_1 \cdot \frac{x\,\varrho^{(2)}}{k^2} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

und die von $\varphi(t)$:

$$\varphi_{\text{extr.}} = -\frac{1}{512}\left[27a^4 - 144a^2k^2 + 128k^4 \pm a\,(9a^2 - 32k^2)^{\frac{3}{2}}\right]. \tag{31}$$

Hieraus kann nach (21) insbesondere das Minimum von $W(r)$ berechnet werden. Wir wollen jedoch diese Größe nicht in gewöhnlichen Energieeinheiten ausdrücken, sondern nach dem entsprechenden Massenverlust fragen, in M_0 als Einheit ausgedrückt. Um diese Größe zu erhalten, muß man $W_{\min}$ durch $M_0 c^2$ dividieren. Es ist nach (21)

$$\frac{W(r)}{M_0 c^2} = \frac{2m^2}{M_0 M \alpha^2 x^2} \cdot \varphi(t) = \frac{M_1}{M x^2} \cdot \frac{2m^2}{M_0 M_1 \alpha^2} \cdot \varphi(t), \tag{32}$$

und es ergibt sich mit bekannten Konstanten

$$\frac{2m^2}{M_0 M_1 \alpha^2} = 0{,}011\,12. \tag{33}$$

Für $k = 1$ geben wir in der folgenden Tabelle $\varphi_{\min}$ und $\varphi_{\max}$ für einige Werte von a. Außerdem sind die entsprechenden Werte von t angegeben, aus welchen nach (30) r_1 und r_2 folgen, und ferner für diejenigen Werte von $\frac{M_1}{M x^2}$, die in der sechsten Spalte angeführt sind, die Massenverluste $-\frac{W_{\min}}{M_0 c^2}$.

Tabelle 2.

a	t_1	t_2	φ_{min}	φ_{max}	$\frac{M_1}{M x^2}$	$-\frac{W_{min}}{M_0 c^2}$	
$2^1/_4$	1,304	0,3834	— 0,3972	0,0418	2	0,00884	$x = 1$;
$2^1/_3$	1,390	0,3596	— 0,6013	0,0375	$^3/_2$	0,01003	$^1/_2$ Prot. Magneton
$2^3/_8$	1,432	0,3491	— 0,7185	0,0357	$^4/_3$	0,01066	
$2^1/_2$	1,553	0,3219	— 1,135	0,0309	$^1/_2$	0,00631	$x = 2$;
$2^2/_3$	1,707	0,2929	— 1,860	0,0261	$^3/_8$	0,00776	1 Prot. Magneton
$2^3/_4$	1,782	0,2806	— 2,302	0,0240	$^1/_3$	0,00853	
3	2,000	0,2500	— 4,000	0,0195	$^1/_4$	0,01112	

Wir machen erstens die Annahme, daß das magnetische Moment des Protons $\frac{m}{2 M_1}$ Bohrsche Magnetonen ist. Es wird dann

$$y = \frac{m x}{2 M_1}. \tag{34}$$

Nach (21) ist folglich

$$a = 2k + \frac{M}{2 M_1}, \tag{35}$$

wo wir immer $k = 1$ annehmen. k muß, wie man leicht einsieht, positiv gewählt werden, damit man ein negatives φ_{min} erhalten soll. Ist auch die Masse des Kernes gleich M_1, so wird $\frac{M}{M_1} = {}^1/_2$ und $a = 2^1/_4$. In den Fällen, wo die Masse des Kernes $2M_1$ und $3M_1$ ist, ergibt sich $a = 2^1/_3$ bzw. $a = 2^3/_8$. Auf diese Fälle beziehen sich die drei ersten Zeilen in der Tabelle. Bei der Berechnung des Massenverlustes haben wir außerdem angenommen, daß $x = 1$ ist.

Wir machen zweitens die Annahme, daß das Protonenmoment $= \frac{m}{M_1}$ Bohrsche Magnetonen, oder, wie wir sagen können, ein Protonenmagneton ist. x ist auch hier gleich der Magnetonenzahl des Kernes und mithin

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{m x}{M_1}, \\ a &= 2k + \frac{M}{M_1}. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Für die drei eben genannten Kerne nimmt a bzw. die Werte $2^1/_2$, $2^2/_3$, $2^3/_4$ an. Auf diese Fälle beziehen sich die drei nächsten Zeilen in der Tabelle.

Nach den Resultaten von Aston* wäre ein durchschnittlicher Massenverlust von etwa 0,0078 zu erwarten. Es ist bemerkenswert, daß wir mit unserer zweiten Annahme und $x = 2$ nicht nur die richtige Größenordnung, sondern sogar die richtige Größe der Massenverluste erhalten haben. Im Mittel ergibt sich ja 0,0075. Mit $x = 1$ würden sich viermal so große Werte ergeben.

Wir müssen aber die Verhältnisse etwas genauer betrachten. Nach (30) ist $r_1 = 2 t_2 \varrho^{(2)}$. Mit wachsendem a nimmt, wie man sieht, t_2 ab. Das angelagerte Proton würde sich daher in einer kleineren Bahn als die im Kern schon vorhandenen bewegen. Man ist folglich nicht immer berechtigt, den Kern als punktförmig zu betrachten.

Nehmen wir an, daß dies jedoch erlaubt sei, wenn der Kern aus zwei Protonen und zwei Elektronen besteht. Dieser ungeladene Kern würde unseren Annahmen auch darin entsprechen, daß die Magnetonenzahl 2 eine naheliegende wäre. Der Massenverlust bei der Anlagerung eines dritten Protons wäre gleich dem in der Tabelle gegebenen 0,007 76.

Lagert sich ein viertes Proton an, so wird das Gebilde komplizierter. Es liegt aber nahe anzunehmen, daß die beiden Protonen sich immer in diametral entgegengesetzten Punkten derselben kreisförmigen Bahn um den neutralen Kern befinden. Für jedes Proton gilt dann ein Energieausdruck ähnlich dem früheren und eine Funktion $W(r)$, die durch

$$W(r) = \frac{1}{2 M_1 r^2}\left(p - \frac{x e \mu}{c r}\right)^2 + \frac{e^2}{4 r} - \frac{x m \mu^2}{M_1 r^3} \tag{37}$$

gegeben ist, wenn die elektrostatische Energie auf beide Protonen verteilt wird. Diese Funktion ist ein spezieller Fall (18) mit $M = M_1$, $z = \frac{1}{4}$ und $y = \frac{x m}{M_1}$ und kann in derselben Weise wie (18) zur Bestimmung des Bahnradius und der Energie der Bahnbewegung verwendet werden. Folglich ist nach (21), (22) und (23)

$$\frac{W(r)}{M_0 c^2} = \frac{2 m^2}{M_0 M_1 \alpha^2 x^2} \cdot \varphi(t), \tag{38}$$

wo

$$\varphi(t) = t^4 - a t^3 + k^2 t^2 + \frac{M_1}{4 m} \alpha^2 x t,$$

$$a = 3; \quad x = 2; \quad k = 1$$

---

* F. W. Aston, Atoms and their packing fractions. Nature **120**, 956—959, 1927, Nr. 3035.

ist. Die drei ersten Glieder von $\varphi(t)$ bilden das durch (28) gegebene φ, dessen Extrema aus der letzten Zeile von Tabelle 2 zu entnehmen sind. Es wird daher in zweiter Näherung, da das letzte Glied als klein erster Ordnung anzusehen ist,

$$\begin{aligned}\frac{W_{\min}}{M_0 c^2} &= -\frac{m^2}{2 M_0 M_1 \alpha^2}\cdot 4 + \frac{m}{2 M_0}\\ &= -0{,}01112 + 0{,}00027\\ &= -0{,}01085.\end{aligned}$$

Auf beide Protonen bezogen, wird folglich der Massenverlust 0,02170.

Wird daher erst das dritte und dann das vierte Proton angelagert, so wird im ersten Falle der Massenverlust 0,00776 und im zweiten $0{,}02170 - 0{,}00776 = 0{,}01394$. Die Stabilität des letzten Gebildes ist daher besonders groß.

Um zu sehen, wie großen Einfluß die Relativitätskorrektion haben kann, berechnen wir aus unserem Energieausdruck die Größe $\frac{v^2}{c^2}$, wo v die Geschwindigkeit des Protons in der stabilen Bahn ist. Da das erste Glied von (18) die Bewegungsenergie des Protons darstellt, so erhalten wir die gesuchte Größe durch Multiplikation dieses Gliedes mit $\frac{2}{M c^2}$. Es ergibt sich

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{4 m^2}{M^2 \alpha^2 x^2}\cdot t^2 (k-t)^2. \tag{39}$$

In dem zuletzt betrachteten Falle wird

$$\frac{v^2}{c^2} = 0{,}022.$$

In den anderen Fällen erhalten wir kleinere Werte. Die abgeleiteten Resultate sind daher für unsere Zwecke hinreichend genau.

Wenn unser Gebilde der Trabant eines anderen Kernes ist, so sind noch zwei andere Energieumsetzungen in Betracht zu ziehen. Bei der Anlagerung von z. B. zwei Protonen wächst die Masse des Trabanten von $2 M_0$ auf $4 M_0$. Nach (16) nimmt daher seine Bewegungsenergie ab. Andererseits erhält er durch die Anlagerung von zwei positiven Ladungen eine elektrostatische Energie. Die entsprechende Massenzunahme wird, wenn von der Einwirkung einer Abstandsänderung abgesehen wird,

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{8 M_0^2 c^2 r^2}\left(p - \frac{x e \mu}{c r}\right)^2 + \frac{2 z^* c^2}{M_0 c^2 r}\\ &\qquad = -\frac{m^2}{8 M_0^2 \alpha^2}\left(\frac{\varrho^{(2)}}{r}\right)^2\left(k - \frac{x}{2}\cdot\frac{\varrho^{(2)}}{r}\right)^2 + 2 z^*\cdot\frac{m}{M_0}\cdot\frac{\varrho^{(2)}}{r},\end{aligned}$$

wo sich die Größen r, k, x und z^* jetzt auf das System Trabant-Zentralkörper beziehen. Es ist insbesondere z^* die Ladungszahl des Zentralkörpers, und x ist nach der Formel (13) zu berechnen. Nimmt man für $z^* = 80$ an, daß r gleich 10^{-12} cm ist, so heben sich die beiden Glieder beinahe auf. Man bekommt nämlich für $k = 1$, $\varphi = 1$:

$$-0{,}0249 + 0{,}0245 = -0{,}0004.$$

Ist r etwas größer, so überwiegt das positive Glied, weil das negative mit wachsendem r schnell abnimmt. Nimmt man in erster Näherung an, daß $\frac{z^*}{r^3}$ konstant ist, so gilt ähnliches auch für die übrigen Kerne. Besteht der Zentralkörper aus einem oder zwei Heliumkernen, so wird sich jedoch das negative Glied nur wenig von Null unterscheiden. Andererseits ist hier wegen des kleinen z^* auch das positive Glied ziemlich klein.

Den erwähnten Umstand hat man bei der Erklärung des Verlaufs der Astonschen Kurve über „packing fractions“ in Betracht zu ziehen. Unsere Resultate erklären die Tatsache, daß Atome, deren Massenzahlen die Form $4n$ haben, besonders große Packungsdefekte zeigen. Auch die von Aston gefundenen numerischen Werte scheinen im ganzen mit unseren Resultaten im Einklang zu sein. Wenn die genauen Astonschen Isotopengewichte vollständiger vorliegen, wird man daraus wahrscheinlich mehrere interessante Einzelheiten des Kernbaues ablesen können.

Die Dimensionen unseres Heliumkerns sind unerwartet klein. Die Ablenkungsmessungen von Rutherford und Chadwick† schienen jedoch anzudeuten, daß die äußeren Teile dieses Kernes in einem Abstand von etwa $7 \cdot 10^{-13}$ cm von dem Mittelpunkt liegen. Man braucht aber in diesem Resultat keinen Widerspruch gegen das unsrige zu sehen. Die von Rutherford und Chadwick gefundenen Zahlen geben, wie von ihnen hervorgehoben ist, nur die Entfernungen an, wo andere Kräfte als die elektrostatischen sich stärker bemerkbar machen. Sind die größeren Kerne hauptsächlich aus Heliumkernen aufgebaut, und sind unsere früheren Schätzungen ihrer Größe richtig, so können andererseits die Heliumkerne nicht viel größere Dimensionen als die von uns berechneten haben.

Es ist ferner auffallend, daß wir für unseren Heliumkern die Magnetonenzahl 2 annehmen mußten, während die Geschwindigkeiten der α-Strahlen — diejenigen von Radium und Protactinium vielleicht ausgenommen — sich nur aus der Magnetonenzahl 1 in natürlicher Weise berechnen ließen. Auch für diese Tatsache kann man aber eine einfache

† E. Rutherford und J. Chadwick, Phil. Mag. (7) **4**, 605—620, 1927.

Erklärung finden. Je kleiner die Magnetonenzahl des α-Teilchens ist, desto unstabiler ist die Bindung. Eine Anregung des α-Teilchens, wodurch die Magnetonenzahl desselben sich von 2 auf 1 verringerte, würde in der Tat, wie aus den Gesetzmäßigkeiten des Zerfalls hervorgeht, außerordentlich stark auf die Stabilität einwirken. Man könnte z. B. annehmen, daß sich das α-Teilchen beim Zerfall sozusagen in einem ^1P-Zustand befindet, während der Grundzustand ein ^3S-Zustand wäre.

Die Prüfungsmöglichkeiten unserer Resultate werden hoffentlich bald recht günstig sein. Aus einer Isotopentabelle geht hervor, daß bei ungeradzahligen Kernladungen Atomgewichte der Form $4n + 2$ nur für Li^6, B^{10} und N^{14} vorkommen, wenn von den radioaktiven Isotopen abgesehen wird. Für die Zusammensetzung der drei entsprechenden Kerne ist die nächstliegende Annahme diejenige, daß ein aus zwei Protonen und einem Elektron bestehendes Gebilde mit bzw. 1, 2 und 3 Heliumkernen vereinigt ist. Man wird so zu der Vorstellung geführt, daß dieses Gebilde in der Nähe von stärkeren Ladungen als $z^* = 6$ instabil wird entweder dadurch, daß es ein Proton abzugeben (vgl. den Übergang $B^{10} \rightarrow Be^9$) oder dadurch, daß es 1 Elektron + 1 Proton ($Li^6 \rightarrow Li^7$; $B^{10} \rightarrow B^{11}$) oder ein Elektron einzufangen sucht. Im letzteren Falle wird die Kombination 2 Protonen + 2 Elektronen gebildet, die nur bei höheren Kernladungen (von Ne^{22} an) stabil zu sein scheint. Vereinigen sich mit diesem Gebilde nacheinander zwei Protonen, so entsteht ein Heliumkern. Einem solchen Prozeß entsprechen wahrscheinlich die folgenden Übergänge.

$$Ne^{22} \rightarrow Na^{23} \rightarrow Mg^{24},$$
$$Mg^{26} \rightarrow Al^{27} \rightarrow Si^{28},$$
$$Si^{30} \rightarrow P^{31} \rightarrow S^{32},$$
$$S^{34} \rightarrow Cl^{35} \rightarrow A^{36}.$$

Aus den vorliegenden Astonschen Isotopengewichten kann man die Massenverluste bei den folgenden Übergängen finden:

$B^{11} \rightarrow C^{12}$	Massenverlust	0,0152,
$F^{19} \rightarrow Ne^{20}$	„	0,0074,
$Cl^{35} \rightarrow A^{36}$	„	0,015,
$Br^{79} \rightarrow Kr^{80}$	„	0,011.

Der dem Übergang $F^{19} \rightarrow Ne^{20}$ entsprechende Massenverlust ist besonders klein, was damit zusammenhängt, daß in dem Astonschen Diagramm die Punkte von Ne^{20} und Ne^{22} besonders hoch liegen. Aston bezweifelt daher die Zuverlässigkeit seiner „Packing fraction“ von Ne^{22}.

Bildet man für die Massenverluste der drei übrigen Übergänge das Mittel, so erhält man 0,014, was mit unserem Werte 0,0139 vollkommen übereinstimmt*.

Unsere Überlegungen sind noch insofern unvollständig, als wir auf die Bindung von Elektronen und auf die Bindung der größeren Kernbestandteile nicht eingegangen sind. Ich hoffe jedoch, auf diese Fragen zurückkommen zu können.

Die erhaltenen Resultate geben einen Eindruck des Erstaunens darüber, daß ein hauptsächlicher Teil der klassischen elektrodynamischen Gesetze seine Geltung so weit in das Kerninnere zu behalten scheint.

Auf die große Bedeutung der magnetischen Kräfte für den Atombau wurde meine Aufmerksamkeit vor einigen Jahren während eines Studienaufenthaltes in Göttingen und München gelenkt. Diese Studienreise wurde durch eine freigebige Unterstützung von Kungl. Svenska Vetenskapsakademien ermöglicht.

September 1928.

---

* Bei der Vervollständigung eines Heliumkernes durch Anlagerung des vierten Protons wird der Massenverlust um den Betrag 0,0062 größer als der durchschnittliche. Es ist ein interessantes Zusammentreffen, daß in dem Astonschen Diagramm die Punkte von C und O so viel unterhalb der Kurve liegen, als einem Überschuß von etwa dieser Größe entspricht.

Die Brechung der Materiewellen vom Standpunkte der speziellen Relativitätstheorie.

Von **Hans Bauer** in Wien.

(Eingegangen am 22. September 1928.)

Unter Zugrundelegung der relativistischen Formel (2) für die Gesamtenergie eines Massenteilchens wird die Brechung der mit demselben verbundenen de Broglie-Welle beim Übergange vom Vakuum in ein Medium untersucht und für den Brechungsquotienten desselben die Formel (17) ermittelt, die in Newtonscher Näherung mit der anderweitig bekannten Formel (17') übereinstimmt. Die nach dem Eintritt in das Medium geänderte Masse und Geschwindigkeit des Teilchens erscheinen durch die Gleichungen (14) und (15) im Verein mit (17) festgelegt.

Nach den Ideen L. de Broglies ist, wie bekannt, mit jedem Massenteilchen, dessen Gesamtenergie wir mit W bezeichnen wollen, ein Schwingungsvorgang verknüpft, dessen Frequenz ν durch die Gleichung bestimmt wird:

$$W = h\nu, \tag{1}$$

wobei die Konstante h das Planck'sche Wirkungsquantum bedeutet. Die Gesamtenergie W setzt sich im allgemeinen aus zwei Bestandteilen zusammen: der relativistischen Energie mc^2 (Ruhenergie + kinetische Energie) und der potentiellen Energie V:

$$W = mc^2 + V. \tag{2}$$

Für die Masse m des Teilchens gilt dabei die relativistische Beziehung

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{3}$$

die die Veränderlichkeit von m mit der Geschwindigkeit v des Teilchens zum Ausdruck bringt.

Die Wellenmechanik bestimmt ferner die Fortpflanzungsgeschwindigkeit u der mit dem Massenteilchen verbundenen Materiewelle durch die Invariante

$$Gu = W = h\nu, \tag{4}$$

in der

$$G = mv \tag{5}$$

die Bewegungsgröße des Teilchens darstellt. Im Hinblick auf (2) und (5) können wir (4) auch in der Form schreiben:

$$mvu = mc^2 + V = W. \tag{6}$$

Wir wollen nun im folgenden den Übertritt von Materiewellen aus dem Vakuum in ein Medium, z. B. einen Kristall, verfolgen, in

dem sie gleich Lichtwellen eine Brechung erfahren. Kennzeichnen wir wie in der Optik das Medium durch einen Brechungsquotienten n, so wird die Wellengeschwindigkeit in demselben durch die Gleichung festgelegt:

$$\bar{u} = \frac{u}{n}, \tag{7}$$

wobei u die Wellengeschwindigkeit im Vakuum bedeutet. Daselbst soll auch die potentielle Energie

$$V = 0$$

sein, wie dies im Falle der Elektronenwellen zutrifft, so daß für das Vakuum Gleichung (6) die einfache Gestalt annimmt:

$$m v u = m c^2 = W, \quad v u = c^2. \tag{8}$$

Bezeichnen wir die auf das Medium bezüglichen Größen durch Querstriche, so gilt in demselben zufolge (6):

$$\bar{m}\,\bar{v}\,\bar{u} = \bar{m} c^2 + \bar{V} = W. \tag{9}$$

Durch die Einführung der Masse $\bar{m}$ tragen wir dem speziellen Relativitätsprinzip Rechnung, das bei der geänderten Geschwindigkeit $\bar{v}$ auch eine Massenänderung im Sinne von (3) verlangt:

$$\bar{m} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2}}}. \tag{10}$$

Die Geschwindigkeitsänderung selbst erklärt sich aus dem Umstande, daß das Massenteilchen beim Eintritt in das Medium der Einwirkung von dessen Atomfeldern unterliegt. Wir bringen diesen Einfluß dadurch zum Ausdruck, daß wir dem Teilchen im Medium die potentielle Energie $\bar{V}$ zuschreiben.

Der invariante Charakter von (4) bzw. (6) beinhaltet die Unveränderlichkeit der Gesamtenergie W des Teilchens und damit auch zufolge (1) der Frequenz ν der Materiewellen. Bekanntlich bleibt auch bei der Brechung von Lichtwellen, die ja den Grenzfall von Materiewellen mit verschwindender Ruhmasse m_0 darstellen, die Frequenz ungeändert. Demgemäß folgt aus (8) und (9) einerseits

$$\bar{m}\,\bar{v}\,\bar{u} = m v u, \tag{11}$$

was in Hinsicht auf (7) und (5) mit

$$\bar{m}\,\bar{v} = n m v \quad \text{oder} \quad \bar{G} = n G \tag{12}$$

gleichbedeutend ist. Die Bewegungsgröße des Teilchens erscheint somit proportional dem Brechungsquotienten n des Mediums. Andererseits ergibt sich aus (8) und (9)

$$W = m c^2 = \bar{m} c^2 + \bar{V}, \tag{13}$$

woraus

$$\boxed{\frac{\overline{m}}{m} = 1 - \frac{\overline{V}}{W}} \tag{14}$$

und mit Rücksicht auf (12)

$$\boxed{\frac{\overline{v}}{v} = n\frac{m}{\overline{m}} = \frac{n}{1 - \dfrac{\overline{V}}{W}}} \tag{15}$$

folgt.

Zur Berechnung von $\overline{v}$ aus der Geschwindigkeit v im Vakuum, der Gesamtenergie W und der potentiellen Energie $\overline{V}$ liefert (14) im Verein mit (3) und (10) die Gleichung

$$\sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2 - \overline{v}^2}} = 1 - \frac{\overline{V}}{W}. \tag{16}$$

Diese ermöglicht es, mit Hinzuziehung von (15) den Brechungsquotienten n als Funktion derselben Größen v, W und $\overline{V}$ zu bestimmen. Die Rechnung gestaltet sich folgendermaßen:

$$c^2 - v^2 = (c^2 - \overline{v}^2)\left(1 - \frac{\overline{V}}{W}\right)^2,$$

$$c^2 - v^2 = \left[c^2 - \frac{n^2 v^2}{\left(1 - \dfrac{\overline{V}}{W}\right)^2}\right]\left(1 - \frac{\overline{V}}{W}\right)^2,$$

$$c^2 - v^2 = c^2\left(1 - \frac{\overline{V}}{W}\right)^2 - n^2 v^2,$$

$$n^2 v^2 = v^2 - c^2\left(\frac{2\overline{V}}{W} - \frac{\overline{V}^2}{W^2}\right),$$

$$n^2 = 1 - \frac{2c^2\overline{V}}{v^2 W}\left(1 - \frac{\overline{V}}{2W}\right);$$

die Beachtung des Umstandes, daß gemäß (8)

$$mc^2 = W$$

ist, führt schließlich zu der Formel

$$\boxed{n = \sqrt{1 - \frac{\overline{V}}{\dfrac{mv^2}{2}}\left(1 - \frac{\overline{V}}{2W}\right)}} \tag{17}$$

Rechnen wir in Newtonscher Näherung, so haben wir einerseits

$$\overline{V} \ll W \quad \text{oder} \quad \frac{\overline{V}}{W} \ll 1$$

anzunehmen; andererseits stellt dann der Nenner $\frac{m v^2}{2}$ die kinetische Energie des Massenteilchens im Vakuum dar, welcher Ausdruck übrigens wegen des Verschwindens der potentiellen Energie V daselbst mit der klassischen Gesamtenergie E des Teilchens identisch ist. Wir erhalten so für den Brechungsquotienten an Stelle von (17) die Näherungsformel

$$n \sim \sqrt{1 - \frac{\overline{V}}{E}}. \tag{17'}$$

Bekanntlich ist diese auf nicht-relativistischer Grundlage aus der Schrödingerschen Wellengleichung gewonnene Formel erstmals von H. Bethe* zur Erklärung der Elektronenstreuungsversuche von Davisson und Germer herangezogen worden.

Im Rahmen der betrachteten Näherung ergeben sich noch aus (14) und (15) die Beziehungen

$$\bar{m} \sim m \tag{14'}$$

und

$$\bar{v} \sim n v, \tag{15'}$$

von denen die erste die Unveränderlichkeit der Masse im Sinne der klassischen Mechanik zum Ausdruck bringt. Die zweite zeigt, daß die Geschwindigkeit des Teilchens im Medium dem Brechungsquotienten desselben proportional ist, daß sie also bei einer Brechung zum Lote ($n > 1$, $\overline{V} < 0$) mit dem Brechungsquotienten wächst, welcher Fall in den Versuchen von Davisson und Germer verwirklicht erscheint**.

Wien, II. Physikalisches Institut der Technischen Hochschule,
im September 1928.

---

* Über die Streuung von Elektronen an Kristallen. Naturwissenschaften **15**, 786 ff., 1927, und **16**, 333 f., 1928.

** H. Bethe, l. c., 2. Mitteilung. Vgl. auch L. Rosenfeld und E. E. Witmer, Über den Brechungsindex der Elektronenwellen, ZS. f. Phys. **49**, 536 f., 1928.

[Aus dem Zentral-Röntgeninstitut der Universität Innsbruck (Vorstand Prof. Dr. Stannig)].

Intensitätsproblem und Lichtquantentheorie. (Der Comptonsche Streuprozeß.)

Von **Fritz Sauter** in Innsbruck.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 26. September 1928.)

Es wird versucht, eine Formel für die Intensitätsverteilung beim Comptonschen Streuprozeß rein quantenmäßig abzuleiten. Durch Einführung geeigneter Zusatzannahmen gelangt man zu einer mit dem Experiment befriedigend übereinstimmenden Intensitätsformel.

Die Lichtquantentheorie Einsteins baut sich auf der fundamentalen Annahme der atomistischen Struktur des Lichtes auf; Träger eines Lichteindruckes, dem man nach der klassischen Theorie die Wellenlänge λ, die Schwingungszahl ν zuschreibt, sind extrem schnell bewegte Teilchen von verschwindend kleiner Ruhemasse, deren Energie durch $h\nu$ gegeben ist.

Eine Veränderung im Bewegungszustand bzw. Energieinhalt der Quanten erfolgt nur bei einem Zusammenstoß mit anderen Quanten, mit Elektronen oder Atomkernen. Für diese Stoßprozesse wird die Gültigkeit der Gesetze des elastischen Stoßes, die Erhaltungssätze der Energie und des Impulses angenommen; mit dieser Annahme vermag man z. B. den Comptoneffekt qualitativ zu erfassen, d. h. man kann die experimentell gefundene Abhängigkeit der Wellenlänge des an freien Elektronen gestreuten Lichtes vom Streuwinkel theoretisch erklären.

Die beiden Grundgesetze reichen jedoch nicht hin, den Stoßprozeß vollständig zu beherrschen, in der Schlußformel tritt ein willkürlicher Parameter (der Streuwinkel ϑ) auf. Es ist daher unmöglich, mit den gemachten Annahmen Gesetze über die Häufigkeit bzw. Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines bestimmten Stoßprozesses aufzustellen; das Intensitätsproblem kann lichtquantentheoretisch mit den beiden Grundgesetzen allein nicht gelöst werden.

Von dieser Erkenntnis ausgehend, haben mehrere Forscher versucht, Intensitätsverteilungsformeln durch Heranziehung halbklassischer Vorstellungsweisen aufzustellen. Eine Zusammenstellung dieser Versuche findet sich bei G. Wentzel* und bei W. Bothe**. Der Grundgedanke bei diesen Theorien besteht durchweg darin, daß für extrem langwelliges

* G. Wentzel, Phys. ZS. **26**, 436, 1925.

** W. Bothe, Handb. d. Phys., Bd. XXIII, Kap. 3.

Licht die von Thomson aus der elektromagnetischen Lichttheorie abgeleitete Streuungsformel gelten muß.

Es soll im folgenden gezeigt werden, daß es unter Verwendung geeigneter Zusatzannahmen möglich ist, eine mit der Erfahrung befriedigend übereinstimmende Intensitätsformel rein lichtquantentheoretisch abzuleiten.

Als Zusatzhypothese soll angenommen werden, daß sich die Elektronen und Lichtquanten beim Stoßprozeß wie vollkommen elastische Körper verhalten. Die einfachste Annahme über die Gestalt dieser Partikeln besteht darin, sie als ideal glatte Kugeln aufzufassen; die Annahme besitzt neben dem Vorteil großer Anschaulichkeit noch den einer wesentlichen Erleichterung der Rechnung, da in diesem Falle beim Stoßprozeß keine Eigenrotation der Partikel auftreten kann.

Die Streuung soll somit als Resultat vollkommen elastischer Stöße zwischen ideal glatten Kugeln, nämlich den einfallenden Lichtquanten und den als frei angenommenen Elektronen aufgefaßt werden. Befindet sich das streuende Elektron vor dem Stoßprozeß in Ruhe (anderenfalls tritt zum Compton- noch ein Dopplereffekt hinzu), so ergeben die beiden Erhaltungssätze für Energie und Impuls in bekannter Weise als Schwingungszahl des gestreuten Lichtes den Ausdruck

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + 2\alpha \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}, \tag{1}$$

wo ϑ den Streuwinkel und α das Verhältnis Λ/λ der universellen Konstanten $\Lambda = \frac{h}{mc} = 0{,}0242$ Å zur Wellenlänge λ des einfallenden Lichtes bedeutet. Für den Winkel η zwischen der Richtung des einfallenden Lichtquants und der Bewegungsrichtung des Rückstoßelektrons erhält man die Gleichung

$$\operatorname{ctg} \eta = (1 + \alpha) \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}. \tag{2}$$

In den aus den beiden Grundgesetzen resultierenden Formeln tritt somit, wie erwähnt, der Streuwinkel als willkürlicher Parameter auf.

Es ist klar, daß der Streuwinkel eine Funktion der gegenseitigen Stellung Elektron–Quant vor dem Stoße ist; so ergibt sich ohne Rechnung, daß ein auf das kugelförmige Elektron zentral auftreffendes Lichtquant in seiner Einfallsrichtung zurückgeworfen wird, also den Streuwinkel $\vartheta = 180^0$ besitzt, während im Falle, daß sich die beiden Kugeln gerade noch berühren, das Quant nicht aus seiner Bewegungsrichtung abgelenkt wird.

Zur Nomenklatur sei folgendes erwähnt: Die Gerade durch den Mittelpunkt des Elektrons in der Richtung des einfallenden Strahlenbündels sei Zentralstrahl genannt; der Abstand einer parallelen Geraden von ihm heiße Zentralabstand z. Ist für die Bahngerade des Mittelpunktes eines einfallenden Lichtquants z größer als die Summe R der beiden Radien des Elektrons und des Lichtquants, so tritt überhaupt keine Berührung ein; ist z kleiner als R, so treffen sich die beiden Kugeln im Stoßpunkt; seine Verbindungsgerade mit dem Mittelpunkt des Elektrons heiße Stoßnormale (innere Elektronnormale im Stoßpunkt), der Winkel zwischen dem Zentralstrahl und der Stoßnormalen sei der Stoßwinkel ζ.

Wegen der Annahmen über den Stoßprozeß kann der vom Quant an das Elektron abgegebene Impuls nur die Richtung der Stoßnormalen haben, das Rückstoßelektron muß sich also in dieser Richtung bewegen. Dies besagt die Gleichheit der beiden Winkel ζ und η, woraus unter Berücksichtigung von (2) die Gleichung

$$\operatorname{ctg} \zeta = (1 + \alpha) \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \tag{3}$$

als Beziehung zwischen dem Stoß- und dem Streuwinkel folgt.

Mit Hilfe der Gleichung (3) ist der Stoßprozeß vollkommen bestimmt. Durch die Angabe des Stoßwinkels, der mit dem Zentralabstand der Bahn des einfallenden Lichtquants offenbar durch die Beziehung $\sin \zeta = \frac{z}{R}$ zusammenhängt, sind die Bestimmungsstücke für die Bewegungszustände von Quant und Elektron vollständig ermittelbar. Damit sind die Vorarbeiten zur Aufstellung von Wahrscheinlichkeitsbeziehungen geleistet, die Aufstellung der gesuchten Intensitätsformel bietet nunmehr keine Schwierigkeiten.

Fällt auf den Radiator in der Richtung des Zentralstrahles ein homogenes, unpolarisiertes Lichtbündel von der Schwingungszahl ν und der Intensität J, so gehen in der Sekunde im Durchschnitt $\frac{J}{h \cdot \nu}$ Quanten durch die Flächeneinheit einer zum Zentralstrahl senkrecht stehenden Ebene, somit $\frac{J}{h \cdot \nu} \cdot 2 \pi z \, dz$ Quanten durch einen in dieser Ebene liegenden Kreisring mit den Radien z und $z + dz$; aus der früher angegebenen Beziehung zwischen z und ζ folgt somit, daß in der Sekunde durchschnittlich $\frac{J}{h \nu} \cdot 2 \pi R^2 \sin \zeta \cos \zeta \, d\zeta$ Lichtpartikel einen Stoßwinkel zwischen ζ und $\zeta + d\zeta$ besitzen.

Aus der Beziehung (3) zwischen ζ und dem Streuwinkel ϑ läßt sich leicht die Gleichung

$$\sin\zeta\cos\zeta\,d\zeta = -\frac{(1+\alpha)^2\sin\vartheta\,d\vartheta}{4\left(1+[2\alpha+\alpha^2]\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^2} \tag{4}$$

ableiten, aus der unmittelbar hervorgeht, daß sekundlich im Mittel $\frac{J R^2\pi}{2h\nu}\cdot\frac{(1+\alpha)^2\sin\vartheta\,d\vartheta}{\left(1+[2\alpha+\alpha^2]\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^2}$ Quanten einen Streuwinkel zwischen ϑ und $\vartheta+d\vartheta$ besitzen.

Um aus diesem Werte die Intensität der in der Richtung ϑ gestreuten Strahlung zu erhalten, muß man erstens ihn mit dem aus (1) resultierenden Energiebetrag $h\bar{\nu}$ eines in diese Richtung gestreuten Quants multiplizieren, andererseits ihn durch die dem Streuwinkelintervall $d\vartheta$ entsprechende Fläche $2\pi\varrho^2\sin\vartheta\,d\vartheta$ in der Entfernung ϱ vom streuenden Elektron dividieren. Die gesuchte Intensität des gestreuten Lichtes ergibt sich somit im Betrage von

$$J_\vartheta = \frac{J\,.\,R^2(1+\alpha)^2}{4\varrho^2}\cdot\frac{1}{\left(1+[2\alpha+\alpha^2]\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^2\left(1+2\alpha\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)}\,. \tag{5}$$

Bevor die Formel (5) auf den Grad ihrer Übereinstimmung mit dem Experiment geprüft werden soll, muß die Frage nach der Größe des in (5) auftretenden Faktors R, der Summe der Radien von Quant und Elektron, beantwortet werden.

Was den Halbmesser des Elektrons betrifft, so deuten die Versuche darauf hin, daß ihm eine Größenordnung von ungefähr 10^{-13} cm zugeschrieben werden muß. Zur gleichen Größenordnung gelangt man auf theoretischem Wege aus einer speziellen Vorstellung über die Natur des Elektrons (vgl. W. Gerlach, Handb. d. Phys., Bd. XXII, Kap. 1, S. 81). Denkt man sich das Elektron als homogene Ladungskugel vom Radius r und der Ladung e, so schreibt ihm die Elektrostatik eine Energie von $\frac{e^2}{r}$ erg zu; andererseits folgt aus dem Satze von der Trägheit der Energie ein Betrag von $E = mc^2$ erg. Ein Vergleich dieser beiden Werte führt zur Beziehung

$$r = \frac{e^2}{mc^2} = 2{,}82\,.\,10^{-13}\,\text{cm} \tag{6}$$

zwischen dem Radius des Elektrons und seiner Ladung und Masse.

Im Gegensatz zu diesem wenigstens in der Größenordnung verläßlichen Werte fehlen über die Größe eines Quants jegliche Daten. Ornstein und Burger* leiten zwar aus ihrer Lichtquantentheorie des Strahlungsgleichgewichts einen der Wellenlänge des betreffenden Lichtes proportinalen Quantenradius von der Größe $\frac{\lambda}{2\pi}$ cm ab, doch dürfte dieser damit wesentlich überschätzt sein, was unter anderem auch daraus hervorgeht, daß ein Quantenradius von 10^{-4} bis 10^{-5} cm für sichtbares Licht ein Durchtreten desselben durch einen Kristall, bei dem bekanntlich der Abstand zweier benachbarter Atome von der Größenordnung 10^{-7} bis 10^{-8} cm ist, verhindern würde.

Wahrscheinlich dürfte der Radius eines Quants kleiner, ja sogar verschwindend klein sein gegenüber dem eines Elektrons. Jedenfalls ist in diesem Falle die Theorie noch durch das Experiment zu ergänzen, die Quantengröße durch Versuche zu bestimmen.

Was das Experiment betrifft, so liegen gegenwärtig nur sehr wenige Versuchsergebnisse vor**. Die Messungen sind jedoch zur Bestimmung der Quantengröße nicht zu verwenden, da sie sich durchweg nur auf die Streuung der γ-Strahlung des RaC ($\lambda = 0{,}0204$ Å) beziehen und wegen der großen Schwierigkeiten bei Intensitätsmessungen nur einen relativ geringen Grad von Genauigkeit aufweisen.

Aus der Intensitätsformel (5) geht hervor, daß die besprochene Unkenntnis der Größe des Quantenradius nur im Faktor R^2 des Bruches auftritt; sie fällt somit bei der Berechnung der relativen Verteilung der Intensität in der Abhängigkeit vom Streuwinkel, also bei Bildung des Verhältnisses

$$V_\vartheta = \frac{J_\vartheta}{J_0} = \frac{1}{\left(1 + 2\alpha \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)\left(1 + [2\alpha + \alpha^2] \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)^2} \tag{7}$$

heraus. Dieser Wert ist durch Angabe der Wellenlänge für jeden Streuwinkel eindeutig bestimmt, er gestattet mithin eine Prüfung der Theorie auf ihre Übereinstimmung mit der Erfahrung hinsichtlich der relativen Streuintensitäten.

Wegen der Unsicherheit der Versuchsergebnisse ist es angezeigt, (5) bzw. (7) mit einer von Compton*** aufgestellten, mit seinen und

* L. S. Ornstein und H. C. Burger, ZS. f. Phys. **20**, 351, 1924.

** D. C. H. Florance, Phil. Mag. **20**, 921, 1910; **27**, 225, 1914; K. W. F. Kohlrausch; Wiener Ber. **126** [2a], 705, 1917; **128** [2a], 853, 1919; Phys. ZS. **21**, 193, 1920; A. H. Compton, Phil. Mag. **41**, 794, 1921.

*** A. H. Compton, Phys. Rev. **21**, 483, 1923.

Kohlrauschs Meßresultaten befriedigend übereinstimmenden Intensitätsformel zu vergleichen. Compton leitete aus der Auffassung des Comptoneffekts als Dopplereffekt mit Hilfe der klassischen Theorie der Ausstrahlung eines bewegten Elektrons die Formel

$$\bar{J}_\vartheta = \frac{J e^4}{m^2 c^4 \varrho^2} \cdot \frac{\frac{1+\cos^2\vartheta}{2} + 4\alpha(1+\alpha)\sin^4\frac{\vartheta}{2}}{\left\{1+2\alpha\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right\}^5} \tag{8}$$

ab, aus der sich das Verhältnis $\bar{V}_\vartheta$ bestimmt zu

$$\bar{V}_\vartheta = \frac{\bar{J}_\vartheta}{\bar{J}_0} = \frac{\frac{1+\cos^2\vartheta}{2} + 4\alpha(1+\alpha)\sin^4\frac{\vartheta}{2}}{\left\{1+2\alpha\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right\}^5}. \tag{9}$$

Der Vergleich der beiden Werte (7) und (9) geschieht am besten an Hand einer Zeichnung. Fig. 1 gibt Aufschluß über die Abhängigkeit des Verhältnisses V_ϑ (Ordinate) vom streuenden Winkel ϑ (Abszisse) für verschiedene Wellenlängen des einfallenden Lichtes, und zwar für

I. extrem langwelliges Licht	$\lambda = \infty$	$\alpha = 0$,
II. K_β-Linie des Wolframs . .	$\lambda = 0{,}184$ Å	$\alpha = 0{,}131$,
III. γ-Strahlung des RaC . . .	$\lambda = 0{,}0204$ Å	$\alpha = 1{,}19$.

Die Kurve für V_ϑ ist für jeden der drei α-Werte ausgezogen, die für den entsprechenden $\bar{V}_\vartheta$-Wert ist unterbrochen gezeichnet.

Aus der Zeichnung läßt sich unmittelbar folgende wichtige Tatsache ableiten: Während für langwelliges Licht, ja sogar auch noch für Röntgenstrahlen von einer Übereinstimmung der beiden Kurven überhaupt nicht die Rede sein kann, decken sie sich ungefähr für die kurzwelligen, radioaktiven Strahlungen. Die Thomsonsche Intensitätsverteilung, die sich aus (9) für extrem langwelliges Licht ($\alpha = 0$) ergibt, läßt sich lichtquantentheoretisch nicht erklären; Gleichung (7) ergibt vielmehr für diesen Fall eine Gerade, also eine gleichmäßige Streuung nach allen Richtungen.

Man könnte glauben, daß bei einer so großen Diskrepanz der den beiden Theorien entsprechenden Kurven das Experiment leicht für eine der beiden entscheiden könnte. Dies ist jedoch nicht der Fall. Die Theorie bestimmt die Intensität des an den freien Elektronen des Radiators gestreuten Lichtes. In Wirklichkeit tritt zu dieser Streukomponente noch die Streuung an den Atomkernen und den gebundenen Elektronen hinzu, die sich von der ersten Streukomponente experimentell im all-

gemeinen nicht trennen läßt. Denn beide Komponenten besitzen praktisch die gleiche Wellenlänge wie das einfallende Licht; nur für die an den freien Elektronen gestreuten Quanten sehr hoher Frequenz tritt eine meßbare Wellenlängenänderung ein. Die beiden Komponenten lassen sich daher nur für extrem kurzwelliges Licht, für Strahlungen radioaktiven Ursprungs, so weit trennen, daß Intensitätsmessungen der einen Komponente mit Aussicht auf Erfolg durchgeführt werden können.

Da also diesbezügliche Messungen für langwelliges Licht unausführbar sind, andererseits die beiden Kurven für γ-Strahlen befriedigend untereinander und mit dem Experiment übereinstimmen, ist es an Hand dieser Streuungsversuche nicht möglich, ein Urteil über die größere Wahrscheinlichkeit der einen oder der anderen Theorie abzugeben.

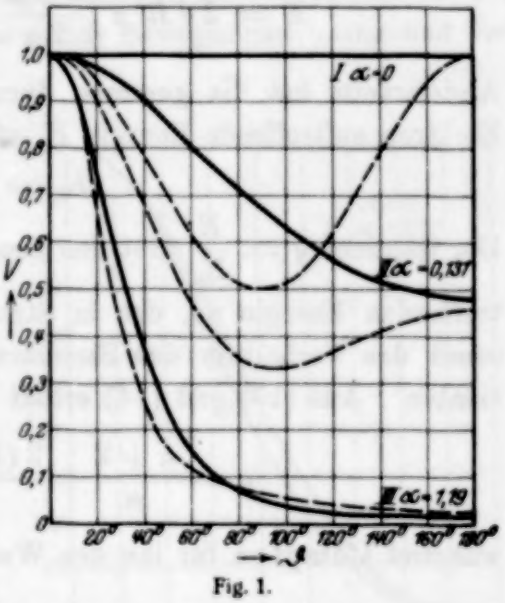


Fig. 1.

Um nochmals auf die oben besprochene Unsicherheit der Absolutwerte der gestreuten Intensitäten zurückzukommen, seien hier die beiden richtungsunabhängigen Faktoren von (5) und (8), also die Koeffizienten der V_ϑ-Ausdrücke in den Intensitätsformeln angeführt. Bezeichnet man mit r den unbekannten Radius eines Lichtquants und führt für den Radius des Elektrons den Wert (6) ein, so folgt aus (5) für diesen Faktor C der Ausdruck

$$C = \frac{\left(\frac{e^2}{mc^2} + r\right)^2}{\varrho^2} \cdot \frac{(1+\alpha)^2}{4}, \tag{10}$$

während Compton für ihn den Ausdruck

$$\overline{C} = \frac{e^4}{m^2 c^4 \varrho} \tag{11}$$

erhält.

Nimmt man an, daß für kurzwellige Strahlung der Quantenradius gegenüber dem eines Elektrons vernachlässigt werden kann (siehe oben), so geht der Ausdruck (10) wegen $\alpha \sim 1$ in den für $\overline{C}$ über. Die Formel (5) stimmt daher auch quantitativ mit der Comptonschen für kurzwellige Strahlung überein.

Es ist nicht ohne Interesse, die gesamte, in der Sekunde gestreute Energie E zu bestimmen. Integriert man Gleichung (5) nach Multiplikation mit dem entsprechenden Flächenelement, führt also das Integral

$$E = \frac{J R^2 \pi (1+\alpha)^2}{2} \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{[1+\alpha(1-\cos\vartheta)]\left[1+\left(\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\right)(1-\cos\vartheta)\right]^2} \quad (12)$$

aus, so gelangt man zur Formel

$$E = 2 J R^2 \pi \left\{\frac{2+\alpha}{2\alpha} + \frac{(1+\alpha)^2}{\alpha^3} l \frac{1+2\alpha}{(1+\alpha)^2}\right\}. \quad (13)$$

Andererseits hat die gesamte, durchschnittlich in der Sekunde auf das Elektron auftreffende Energie E_0 offenbar den Betrag

$$E_0 = J . R^2 \pi. \quad (14)$$

Der Quotient $q = \frac{E}{E_0}$ gibt den Bruchteil der auf ein freies Elektron auftreffenden Energie an, der in Streustrahlung umgesetzt wird, bedeutet somit das Verhältnis des Streustrahlungskoeffizienten zum Streukoeffizienten. Aus (13) und (14) erhält man für ihn den Ausdruck

$$q = \frac{\alpha+2}{\alpha} + \frac{2(1+\alpha)^2}{\alpha^3} l \frac{1+2\alpha}{(1+\alpha)^2}, \quad (15)$$

während Compton für ihn den Wert

$$\bar{q} = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} \quad (16)$$

findet.

In der Fig. 2 sind die zwei Kurven für q und $\bar{q}$ in der Abhängigkeit von α aufgetragen. Aus der Zeichnung geht hervor, daß für das Gebiet der langen Wellen, Röntgenstrahlen und noch für die langwelligeren radioaktiven Strahlungen, also für Werte von $\alpha < 1$, die beiden Kurven sehr gut übereinstimmen. Während aber $\bar{q}$ monoton abfällt und für extrem kurzwellige Strahlung der Grenze $\frac{1}{2}$ zustrebt, erreicht die Kurve für q für $\alpha \sim 2{,}3$ ein Minimum und steigt von diesem Punkte wieder an, um sich dem Werte 1 zu nähern.

Experimentelle Daten zur Entscheidung zwischen einer der beiden Kurven liegen gegenwärtig nicht vor; übrigens dürfte es schwer fallen, durch Versuche eine Entscheidung darüber mit Sicherheit abgeben zu können. Berücksichtigt man nämlich einerseits die große Ungenauigkeit bei Intensitätsmessungen, andererseits die Tatsache, daß sich die beiden

q-Werte für $\alpha = 1{,}19$ (γ-Strahlung von RaC) nur um rund 7% ihres Wertes unterscheiden, so sieht man sofort die Aussichtslosigkeit eines solchen Unternehmens ein.

Zum Schluß sei noch auf die Verteilung der Geschwindigkeiten bzw. der Energiebeträge bei den Rückstoßelektronen eingegangen. Zu diesem Zwecke sei aus der Theorie des Comptoneffekts die Gleichung

$$E_\eta = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = h\nu \cdot \frac{2\alpha\cos^2\eta}{(1+\alpha)^2 - \alpha^2\cos^2\eta} \qquad (17)$$

nachgetragen, die die kinetische Energie eines Rückstoßelektrons in der Abhängigkeit vom Winkel η zwischen seiner Bewegungsrichtung und der Richtung des Primärstrahles gibt.

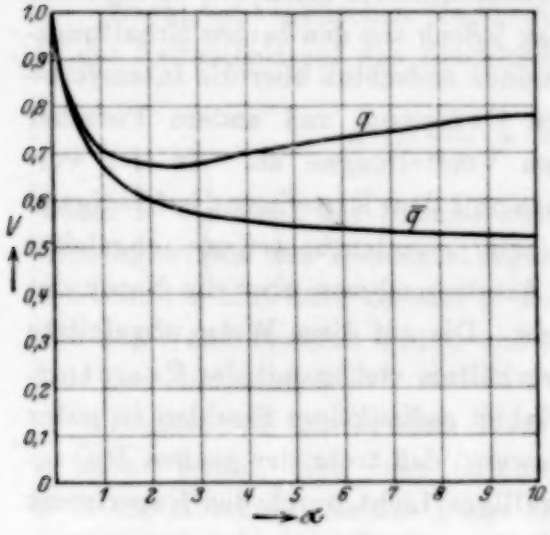


Fig. 2.

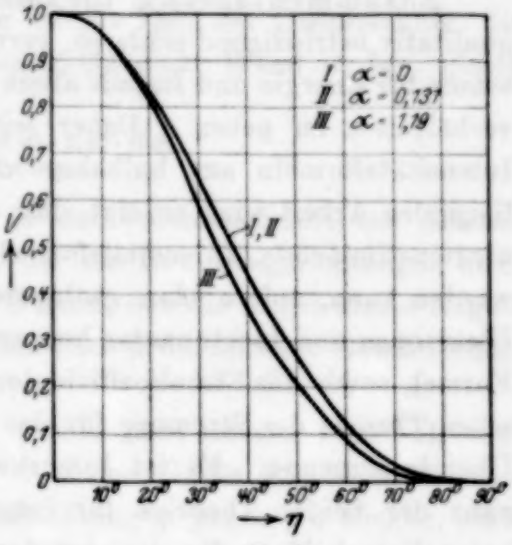


Fig. 3.

Wegen der Gleichheit des Stoßwinkels ζ mit dem Winkel η (siehe oben) folgt für die Zahl N_η der in die Richtung zwischen η und $\eta + d\eta$ in der Sekunde fliegenden Elektronen der Ausdruck

$$N_\eta\, d\eta = \frac{J}{h\nu} \cdot 2\pi R^2 \sin\eta\cos\eta\, d\eta. \qquad (18)$$

Die „Intensität" des Elektronenstromes in der angegebenen Richtung ergibt sich daraus durch Multiplikation mit der durch (17) gegebenen Energie eines Elektrons und Division durch das entsprechende Flächenelement. Man erhält für sie die Gleichung

$$J_\eta = \frac{2J \cdot R^2}{\varrho^2} \cdot \frac{\alpha\cos^3\eta}{(1+\alpha)^2 - \alpha^2\cos^2\eta}. \qquad (19)$$

Analog der Gleichung (7) kann man auch hier die relative Intensität V_η als Quotient aus J_η und dem Intensitätswert für $\eta = 0$ definieren; man gelangt so zur Gleichung

$$V_\eta = \frac{\cos^3\eta\,(1+2\alpha)}{(1+\alpha)^2 - \alpha^2\cos^2\eta}. \tag{20}$$

Eine graphische Darstellung für die drei Werte von α gibt Fig. 3. Eine Diskussion derselben, sowie ein Vergleich mit der sehr kompliziert gebauten Comptonschen Formel soll der Kürze halber unterbleiben (vgl. W. Bothe, Handb. d. Phys., Bd. XXIII, S. 411 ff.). Bemerkenswert ist der Umstand, daß die relative Intensitätsverteilung des Elektronenstromes nur in sehr geringem Maße von der Wellenlänge des auffallenden Lichtes abhängt.

Zusammenfassung. Die Lichtquantentheorie kann den Streuprozeß qualitativ befriedigend erklären, vermag jedoch aus den beiden Erhaltungssätzen für Energie und Impuls allein keinen Aufschluß über die Intensitätsverhältnisse zu geben. Daher leiten Compton und andere Forscher Intensitätsformeln aus halbklassischen Vorstellungen ab. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß eine mit dem Experiment befriedigend übereinstimmende Intensitätsformel rein quantentheoretisch abgeleitet werden kann, sofern man geeignete Zusatzannahmen über die Natur der Elektronen und Lichtquanten heranzieht. Die auf diese Weise abgeleitete Formel, sowie das Streukoeffizientenverhältnis stehen mit der Comptonschen Theorie der Streuung für das Gebiet radioaktiver Strahlen in guter Übereinstimmung. Es ist bemerkenswert, daß trotz der großen Diskrepanz der beiden Theorien für langwelliges Licht durch das Experiment keine Entscheidung für die eine der beiden getroffen werden kann.

Über eine experimentelle Methode zur Messung von Molekularstrahlung.

Erste Mitteilung.

Von **Herbert Mayer** aus Cernauti, zurzeit in Tübingen.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 10. Oktober 1928.)

Es wird eine Drehwaagemethode zur Messung der Intensität von Molekularstrahlen beschrieben und als erste Anwendung eine experimentelle Prüfung und Bestätigung des Kosinusgesetzes der Molekularstrahlung mitgeteilt.

Einleitung.

Nach der kinetischen Gastheorie ist die Zahl der Gasmoleküle, die in der Zeiteinheit auf das Flächenelement $d\sigma$ einer Wand stoßen, gleich

$$n = \frac{N}{4\pi} \cdot u \cdot \cos\varphi \cdot d\omega \cdot d\sigma,$$

worin N die Zahl der Gasmoleküle in der Volumeneinheit ist, $d\omega$ der Öffnungswinkel des Elementarkegels, der die Bewegungsrichtungen aller betrachteten Moleküle umfaßt, φ der Winkel, den die Achse dieses Kegels mit der Wandnormalen bildet, und schließlich u die mittlere Geschwindigkeit der Gasmoleküle.

Denken wir uns in einer Wand, welche zwei Räume, I und II, voneinander trennt, eine enge Öffnung von der Größe $d\sigma$, dann werden z. B. die Moleküle, die aus I aus der Richtung φ gegen $d\sigma$ fliegen, statt auf die Wand zu prallen, durch die Öffnung in den Raum II hineinfliegen. Sind Öffnung und Dicke der Wand gegenüber der mittleren freien Weglänge der Moleküle klein, so finden in der Öffnung fast keine Zusammenstöße der Moleküle untereinander statt; ebenso nicht unmittelbar vor und nach dem Durchgehen durch die Öffnung. Infolgedessen behält die überwiegende Mehrzahl der hindurchgeflogenen Moleküle ihre Geschwindigkeit sowohl der Größe als auch der Richtung nach bei. Die Zahl der Moleküle, die von der Fläche der Öffnung $d\sigma$ in der Richtung φ in den Raum II hineinfliegen, wird also wieder gegeben sein durch

$$n = \frac{N}{4\pi} \cdot u \cdot \cos\varphi \cdot d\omega \cdot d\sigma.$$

Man bezeichnet diesen Ausdruck oft als das Kosinusgesetz der Molekularstrahlung.

Untersuchungen, die vom Verfasser mit einer Drehwaage* durchgeführt werden, ergaben die Möglichkeit, die Gültigkeit dieses Gesetzes experimentell zu untersuchen. Letzteres erschien sowohl mit Rücksicht auf den fundamentalen Charakter dieses Gesetzes als auch besonders im Hinblick auf gewisse Fragen, die sich bei Untersuchungen mit der Molekularstrahlenmethode** ergeben hatten, wünschenswert.

Methode.

Dieselbe ist folgende: Zwei Räume, I und II (siehe Fig. 1), sind durch eine Wand aus sehr dünner Metallfolie getrennt. In dieser Folie befindet sich eine sehr kleine Öffnung $d\sigma$. Die beiden Räume sind so weit evakuiert, daß die mittlere freie Weglänge der Moleküle gegenüber den Dimensionen der Öffnung sehr groß ist. Stellt man zwischen I und II eine bestimmte kleine Druckdifferenz $p_1 - p_2$ her, so ist die Zahl der Gasmoleküle, die aus I kommend durch die Öffnung in II hineinfliegen, größer als die Zahl der aus II kommenden und in I hineinfliegenden Moleküle. Findet in der Öffnung keine gegenseitige Beeinflussung dieser Moleküle statt, was der Fall ist, wenn ihre mittlere freie Weglänge gegenüber den Dimensionen der Öffnung sehr groß ist, so strömt ein Plus von Molekülen aus I nach II, wobei weder absoluter Wert noch Richtung ihrer Geschwindigkeit eine Änderung erfährt; d. h. aber, daß die aus I kommenden Moleküle von der Öffnung in den Raum II nach dem oben erwähnten Kosinusgesetz hineinfliegen. Hängt man vor diese Öffnung ein einem Radiometerflügel ähnliches Flügelchen, welches an einem Quarzfaden befestigt ist, so wird das Flügelchen durch das Plus der aus I kommenden Moleküle einen Impuls erfahren und gedreht werden. Diese Drehung kann mit Fernrohr und Skale gemessen werden.

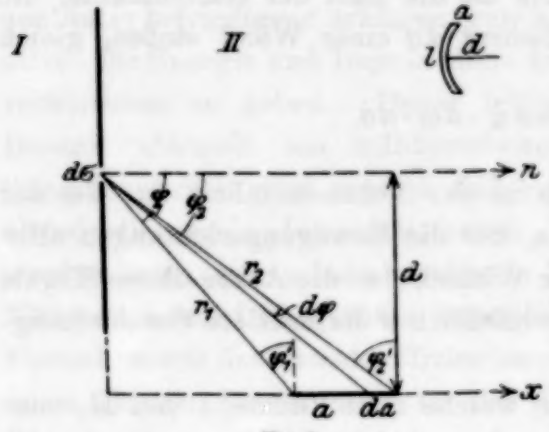


Fig. 1.

A. Es sei $d\sigma$ die Öffnung in derWand, welche die beiden Räume I und II trennt, a sei das Flügelchen (siehe Fig. 1). Dasselbe bestehe aus

* Erste Anwendung einer Drehwaage zur Messung von Molekularstrahlung: E. Michel, Diss. Frankfurt, 1922.

** F. Knauer und O. Stern, ZS. f. Phys. **39**, 765, 1926.

einem Streifen dünner Metallfolie von der Breite a und der Länge l. Der Streifen sei so gekrümmt, daß sein Krümmungsradius gerade gleich ist seiner Entfernung d von der Wandnormalen n, die durch den Mittelpunkt der Öffnung geht (siehe Fig. 1 rechts oben).

Wir denken uns den Flügel in Streifen von der Breite da und der Länge l geschnitten. Ein Flächenelement dO dieses Elementarstreifens hat die Breite da und die Länge dl. Dann ist

$$d\omega = \frac{dO \cdot \cos \varphi_2'}{r_2^2} = \frac{da \cdot dl \cdot \cos \varphi_2'}{r_2^2}.$$

Die auf das Flächenelement dO auffallende von $d\sigma$ (d. h. aus I) kommende Molekülzahl ist dem Kosinusgesetz entsprechend gegeben durch

$$n'_{\varphi_2} = \frac{N_1}{4\pi} \cdot u \cdot \cos \varphi_2 \cdot d\omega \cdot d\sigma$$

und die in entgegengesetzter Richtung aus II gegen $d\sigma$ fliegende Molekülzahl analog gegeben durch

$$n''_{\varphi_2} = \frac{N_2}{4\pi} \cdot u \cdot \cos \varphi_2 \cdot d\omega \cdot d\sigma.$$

Das Plus der von $d\sigma$ kommenden und die Drehung des Flügelchens verursachenden Moleküle ist somit gleich

$$n_{\varphi_2} = n'_{\varphi_2} - n''_{\varphi_2} = \frac{N_1 - N_2}{4\pi} \cdot u \cdot \cos \varphi_2 \cdot d\omega \cdot d\sigma.$$

Solange die Drucke in den Räumen I und II, somit auch die Druckdifferenz zwischen beiden konstant gehalten wird, ist $N_1 - N_2$ ebenfalls konstant*; man kann daher schreiben:

$$n_{\varphi_2} = k_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot d\omega,$$

führt man hierin für $d\omega$ den oben erhaltenen Wert ein, so wird

$$n_{\varphi_2} = \frac{k_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2' \cdot da \cdot dl}{r_2^2}.$$

Da infolge der Krümmung des Streifens für alle Flächenelemente des Elementarstreifens φ_2 und r_2 gleichen Wert haben, ist diese auf den ganzen Elementarstreifen auffallende Molekülzahl gegeben durch

$$n_{\varphi_2} = \frac{k_1 \cdot l \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2' \cdot da}{r_2^2}.$$

* Die Temperatur in I und II wird hier wie auch in allen folgenden Überlegungen als gleich und konstant vorausgesetzt.

Nun ist, wie aus Fig. 1 leicht zu ersehen ist,

$$da = \frac{r_2 d\varphi}{\cos \varphi_2'}, \qquad r_2 = \frac{d}{\sin \varphi_2},$$

daher

$$n_{\varphi_2} = k_2 . \cos \varphi_2 . \sin \varphi_2 . d\varphi,$$

wo $k_2 = \frac{k_1 . l}{d}$.

Der Impuls, den der Elementarstreifen durch den Stoß dieser Moleküle erfährt, ist gleich

$$i_{\varphi_2} = 2 . n_{\varphi_2} . m . u . \cos \varphi_2',$$

da ja für den Impuls nur die auf den Flügel senkrechte Geschwindigkeitskomponente in Betracht kommt. Führen wir den Wert von n_{φ_2} ein, so ergibt sich

$$i_{\varphi_2} = k . \cos \varphi_2 . \sin \varphi_2^2 . d\varphi,$$

weil $\cos \varphi_2' = \sin \varphi_2$; hierin ist die Konstante k eine leicht ersichtliche Abkürzung für $k_2 . m . u$.

Den Gesamtimpuls, den das ganze Flügelchen erfährt, erhalten wir durch Integration obiger Gleichung von φ_1 bis φ_2:

$$J = k \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi_1 . \sin^2 \varphi_1 . d\varphi = C . \left| \sin^3 \varphi \right|_{\varphi_1}^{\varphi_2} *,$$

wo $C = \frac{k}{3}$. Nun ist, wie aus Fig. 1 ersichtlich,

$$\sin \varphi_1 = \frac{d}{r_1} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + x^2}},$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{d}{r_2} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + (x + a)^2}},$$

daher

$$J = C' \left\{ \frac{1}{(d^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{1}{(d^2 + [x + a]^2)^{3/2}} \right\}. \qquad (1)$$

Trägt man die Ausschläge des Flügelchens, die man bei konstanter Druckdifferenz zwischen I und II und bei konstantem d, jedoch bei veränderlichem x erhält, als Funktion von x auf, so muß die auf diese Weise erhaltene Kurve mit der graphischen Darstellung obiger Funktion zusammenfallen, wenn das Kosinusgesetz gilt. Die graphische Darstellung dieser Funktion ergibt Kurven, die von $x = 0$ ausgehend einen plötzlichen starken Anstieg bis zu einem maximalen Werte zeigen und dann etwas langsamer abfallen (siehe Fig. 5 und 6). Es ist sehr wichtig, zu

* Die Integrationskonstante ist mit Rücksicht auf das Folgende weggelassen.

betonen, daß für jede bestimmte Entfernung d das Maximum dieser Kurven bei einem ganz bestimmten, gut definierten Werte von x liegt, welcher verschieden ist für verschiedene d. Also nicht nur das Zusammenfallen der experimentell ermittelten Ausschlagskurven mit den theoretisch berechneten, sondern auch die Lage des Maximums dieser Kurven für verschiedene d ist für die nach dem Kosinusgesetz erfolgende Ausbreitung der Moleküle charakteristisch.

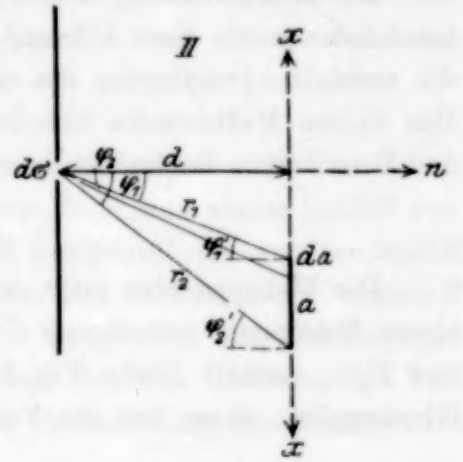


Fig. 2.

B. Es sei wieder $d\sigma$ die Öffnung in der Wand, welche die beiden Räume I und II trennt, a das Flügelchen (siehe Fig. 2). Seine Breite sei a, seine Länge l. Wieder denken wir uns das Blättchen in Elementarstreifen von der Breite da und der Länge l geteilt und fragen nach dem Impuls, den ein solcher Streifen von den von $d\sigma$ kommenden Molekülen erfährt. Analoge Überlegungen wie unter A. ergeben

$$n_{\varphi_1} = \frac{k_1 \,.\, l \,.\, \cos\varphi_1 \,.\, d\varphi}{r_1}.$$

Aus Fig. 2 ersieht man, daß

$$r_1 = \frac{d}{\cos\varphi_1},$$

daher

$$n_{\varphi_1} = k_2 \,.\, \cos\varphi_1^2 \,.\, d\varphi$$

und

$$i_{\varphi_1} = k \,.\, \cos^3\varphi_1 \,.\, d\varphi,$$

weil $\varphi_1 = \varphi_1'$. Der Gesamtimpuls ist

$$J = k\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^3\varphi\, d\varphi = k\left|\sin\varphi - \tfrac{1}{3}\sin^3\varphi\right|_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Ferner ist hier

$$\sin\varphi_1 = \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}}, \qquad \sin\varphi_2 = \frac{a+x}{\sqrt{d^2 + (a+x)^2}},$$

also

$$J = C\left\{\left[\frac{a+x}{\sqrt{d^2 + (a+x)^2}} - \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}}\right] - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{a+x}{\sqrt{d^2 + (a+x)^2}}\right)^3 - \left(\frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}}\right)^3\right]\right\}. \qquad (2)$$

Auch hier müssen die bei Verschiebung des Flügelchens in der x-Richtung beobachteten Ausschläge — Druckdifferenz und Entfernung d konstant vorausgesetzt — mit den Kurven zusammenfallen, die sich durch graphische Darstellung der letzten Funktion ergeben.

Durch Anwendung beider Meßmethoden ist es möglich, den Gesamtbereich eines aus einer Öffnung austretenden Gasstromes auszumessen, da die erste den peripheren, die zweite den zentralen Teil desselben erfaßt. Die beiden Meßbereiche überdecken sich sogar teilweise, wie man aus den Resultaten, die weiter unten mitgeteilt werden, ersehen kann.

Apparat.

Die Meßapparatur setzt sich wie folgt zusammen: Von einem mit einem Manometer versehenen Glasgefäß G, das luftdicht verschlossen ist und P_2O_5 enthält (siehe Fig. 3), führt eine dünne Kapillare K zu der Glaskugel I; diese hat ein Volumen von 1,5 Litern. Von dieser Glas-

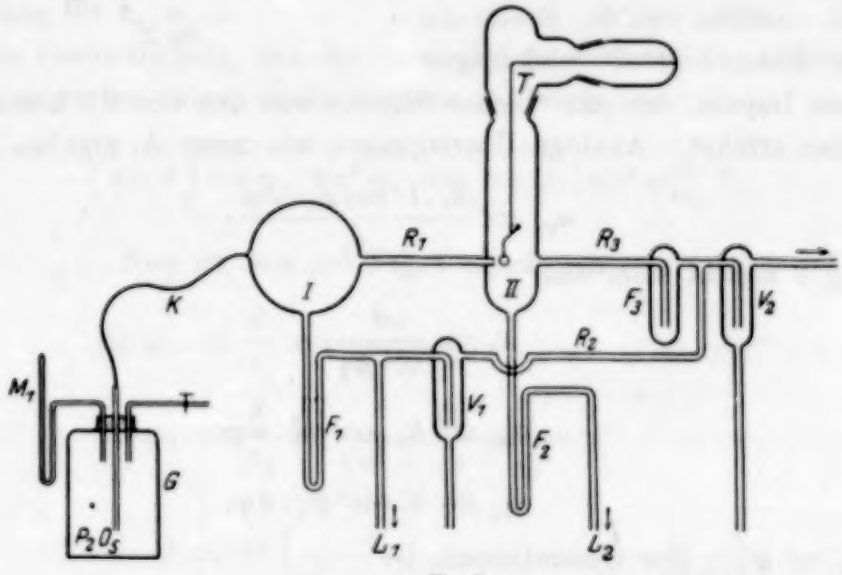


Fig. 3.

kugel führt einerseits ein 1 cm weites Glasrohr R_1 in das Gefäß II. Das in II liegende Ende dieses Rohres ist mit einer dünnen Aluminiumfolie verschlossen, in welcher sich ein kleines Loch befindet.

Die Aluminiumfolie hatte eine Dicke von 0,01 mm; das Loch war, wie die Untersuchung mit dem Mikroskop zeigte, abgesehen von winzigen Randzacken, kreisrund und hatte einen Durchmesser von 0,3 mm. Dieses Loch wurde hergestellt, indem die Folie zwischen zwei Messingplatten gelegt und nun mit einem Bohrer ein Loch durchgebohrt wurde. Die Folie war mit weißem Siegellack auf den Rand des Glasrohres R aufgeklebt.

Von der Glaskugel I führt ein zweites Rohr R_2 von ebenfalls 1 cm innerer Weite über eine Hg-Falle F_1 einerseits zu einem Mc Leod-Manometer L_1, andererseits über einen Hg-Verschluß V_1 zu dem Rohr R_3, welches über eine Hg-Falle F_3 die Verbindung zwischen dem Glasgefäß II und dem Pumpenaggregat herstellt. Letzteres bestand aus einer Hg-Diffusionspumpe, einer Hg-Dampfstrahlpumpe und einer rotierenden Kapselpumpe. Das Rohr R_2 ermöglichte ein schnelles Evakuieren der Glaskugel I.

Das Glasgefäß II bestand aus einem 4 cm weiten und etwa 30 cm langen Glasrohr, welches an seinem oberen Ende mit einem Schliff versehen war. An diesem war seitlich und horizontal ein zweiter Schliff angeblasen, durch dessen Mitte ein mit ihm fest verbundener Glasstab T ging. An diesem wurden Quarzfaden samt Flügelchen und Ablesespiegel befestigt. Durch Drehen des horizontalen Schliffes konnten die Verschiebungen bewirkt werden, über die bei Beschreibung der Meßmethode die Rede war.

Vom Glasgefäß II führt ein Glasrohr über eine Hg-Falle F_2 zu dem zweiten Mc Leod-Manometer L_2.

Da bei Drehung des horizontalen Schliffes das Ende des Glasstabes T und somit auch das Flügelchen sich auf einem Kreise bewegen, erfolgt außer der seitlichen Verschiebung des letzteren auch eine Verschiebung in vertikaler Richtung. Um diese möglichst klein zu machen, wurde der vertikale Teil des Stabes T 10 cm lang gemacht. Bei dieser Länge beträgt bei einer seitlichen Verschiebung von 10 mm die vertikale Verschiebung nur 0,13 mm, bleibt also ohne störenden Einfluß auf die Meßresultate.

Form und Größe der verwendeten Flügelchen werden bei den Meßresultaten beschrieben, ebenso wird der Zweck des Glasgefäßes G und der Kapillare K später erklärt.

Prüfung der Meßapparatur.

Bevor auf die Resultate, welche eine Bestätigung des Kosinusgesetzes darstellen, eingegangen wird, soll kurz über die Resultate der Voruntersuchungen berichtet werden, weil dieselben nicht nur die Möglichkeit der Verwendung der Flügelmethode für die folgenden Untersuchungen zeigten, sondern weil sie auch eine neuerliche, auf ganz anderem Wege erhaltene Bestätigung der zuerst von Knudsen* experimentell untersuchten Strömungsgesetze verdünnter Gase durch enge Öffnungen ergaben.

* M. Knudsen, Ann. d. Phys. **28**, 999, 1909.

Wie Knudsen zuerst berechnete, ist die Gesamtzahl der Gasmoleküle, die im Falle molekularer Strömung aus einem Raum I mit dem Drucke p_1 durch eine enge Öffnung $d\sigma$ in einen Raum II mit dem Drucke $p_2 < p_1$ strömen, gegeben durch

$$n = \frac{1}{m \cdot u} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (p_1 - p_2)\, d\sigma$$

und die in einer bestimmten Richtung φ in einem Kegel vom Öffnungswinkel $d\omega$ von $d\sigma$ ausgehende Zahl gleich

$$n_\varphi = \frac{1}{m u \pi} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (p_1 - p_2) \cdot \cos\varphi \cdot d\omega \cdot d\sigma$$

und ihr Impuls

$$J_\varphi = n_\varphi \cdot m \cdot u = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (p_1 - p_2) \cdot \cos\varphi \cdot d\omega \cdot d\sigma.$$

1. Unabhängigkeit der Ausschläge des Flügelchens von der Natur des Gases. Hängt man also z. B. vor die enge Öffnung $d\sigma$ ein Flügelchen F (siehe Fig. 4), so erfährt dieses den durch obige Gleichung gegebenen Impuls. Läßt man die relative Stellung von Flügel und Öffnung unverändert, so ist

$$\cos\varphi \cdot d\omega \cdot d\sigma = \text{const},$$

der Impuls daher

$$J_\varphi = C \cdot (p_1 - p_2),$$

d. h. der Ausschlag eines solchen Flügelchens hängt bei bestimmter Entfernung desselben von der Öffnung nur von der zwischen I und II vorhandenen Druckdifferenz, nicht aber von der Natur des Gases ab. Dies konnte durch eine Reihe von Versuchen bestätigt werden, die mit verschiedenen Gasen, und zwar mit Luft, Wasserstoff und Kohlensäure durchgeführt wurden.

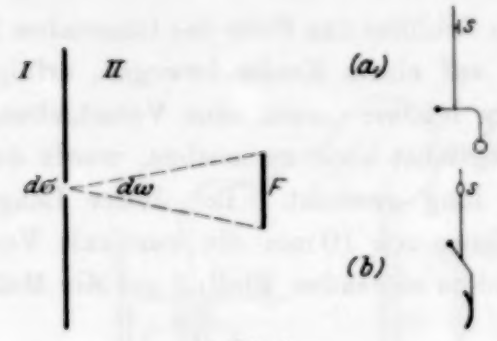


Fig. 4.

Das Flügelchen hatte dabei die in Fig. 4a gezeigte Form. Ein kreisrundes Blättchen aus Aluminiumfolie von der Dicke 0,01 mm und 3 mm Durchmesser ist an einem rechtwinklig gebogenen, 0,1 mm dicken Glasfaden befestigt; zu diesem steht ein ebenso dicker Glasfaden senkrecht, der das Spiegelchen s trägt; das ganze System hängt an einem Quarzfaden.

Ohne die Lage von Flügelchen und Öffnung zu verändern, wurde die Apparatur nacheinander mit zwei verschiedenen Gasen gefüllt und für

jedes Gas der verschiedenen Druckdifferenzen entsprechende Ausschlag gemessen. Vor endgültiger Füllung mit dem zweiten Gase wurde die ganze Apparatur sorgfältig mit diesem Gas gewaschen.

In Tabelle 1 sind einige der erhaltenen Werte für Luft und Wasserstoff gegeben. Die erste Kolonne enthält die Druckdifferenz Δp, die zweite den Ausschlag s, die dritte das Verhältnis $s/\Delta p$, d. h. den der Einheit der Druckdifferenz entsprechenden Ausschlag. Der Abstand des Flügels von der Öffnung betrug etwa 2 mm, die Öffnung hatte eine Größe von 0,0004 mm². Gekühlt wurde mit flüssiger Luft. Der Druck in II variierte von $1 \cdot 10^{-5}$ mm Hg bis $1 \cdot 10^{-4}$ mm Hg, so daß die in der ersten Kolonne gegebenen Druckdifferenzen gleichzeitig auch die Drucke in 1. sind.

Tabelle 1.

Luft			Wasserstoff		
Δp	s*	$s/\Delta p$	Δp	s*	$s/\Delta p$
$4{,}15 \cdot 10^{-2}$	75	$1{,}81 \cdot 10^{3}$	$7{,}40 \cdot 10^{-2}$	129	$1{,}77 \cdot 10^{3}$
$8{,}00 \cdot 10^{-2}$	145	$1{,}82 \cdot 10^{3}$	$7{,}80 \cdot 10^{-2}$	138	$1{,}76 \cdot 10^{3}$
$1{,}20 \cdot 10^{-1}$	208	$1{,}74 \cdot 10^{3}$	$1{,}30 \cdot 10^{-1}$	245	$1{,}76 \cdot 10^{3}$
$1{,}60 \cdot 10^{-1}$	285	$1{,}78 \cdot 10^{3}$	$2{,}03 \cdot 10^{-1}$	353	$1{,}75 \cdot 10^{3}$
$2{,}03 \cdot 10^{-1}$	357	$1{,}76 \cdot 10^{3}$	—	—	—
	Mittelwert:	$1{,}78 \cdot 10^{3}$		Mittelwert:	$1{,}76 \cdot 10^{3}$

Tabelle 2.

Luft			Kohlensäure		
Δp	s*	$s/\Delta p$	Δp	s*	$s/\Delta p$
$9{,}50 \cdot 10^{-2}$	57	$0{,}60 \cdot 10^{3}$	$9{,}60 \cdot 10^{-2}$	57	$0{,}60 \cdot 10^{3}$
$1{,}74 \cdot 10^{-1}$	111	$0{,}64 \cdot 10^{3}$	$2{,}03 \cdot 10^{-1}$	121	$0{,}60 \cdot 10^{3}$
$2{,}50 \cdot 10^{-1}$	168	$0{,}62 \cdot 10^{3}$	$3{,}31 \cdot 10^{-1}$	203	$0{,}61 \cdot 10^{3}$
	Mittelwert:	$0{,}62 \cdot 10^{3}$		Mittelwert:	$0{,}60 \cdot 10^{3}$

In Tabelle 2 sind einige der für Luft und Kohlensäure erhaltenen Werte gegeben. Der Abstand des Flügelchens von der Öffnung betrug

* Die hier gegebenen Ausschlagswerte sind korrigiert; denn durch die Drehung des Flügelchens wird die Entfernung zwischen diesem und der Öffnung etwas vergrößert, $d\omega$ daher verkleinert. Die beobachteten Ausschläge sind infolgedessen etwas kleiner als die absolut konstanter Entfernung entsprechenden. Die anzubringende Korrektur läßt sich leicht aus Hebelarm des Flügelchens, Ausschlag und Entfernung der Skale vom Spiegel berechnen.

hier etwa 3,5 mm*; beide hatten im übrigen die gleichen Dimensionen wie im vorhergehenden Falle.

2. Strenge Proportionalität mit der Druckdifferenz. Auch diese konnte durch eine ganze Reihe von Beobachtungen mit verschiedenen Gasen nachgewiesen werden. Als Beispiel mögen die in den Tabellen 1 und 2 mitgeteilten Werte gelten.

Man sieht, daß diese Ergebnisse eine auf ganz andere Weise erhaltene Bestätigung des zuerst von Knudsen (l. c.) experimentell geprüften Gesetzes der Molekularströmung durch enge Öffnungen sind.

Eine der wichtigsten Bedingungen für die Messungen zum Nachweis des Kosinusgesetzes war die Erhaltung einer bestimmten, selbst mehrere Stunden hindurch völlig konstanten Druckdifferenz zwischen den Räumen I und II. Dies geschah mit Hilfe des Glasgefäßes G und der Kapillare K. Nach einigen Versuchen gelang es immer, jenen Druck in G zu ermitteln, bei welchem durch die Kapillare K eine Gasmenge in I einströmte, welche der in derselben Zeit durch die Öffnung aus I nach II strömenden gleich war. Das Glasgefäß G hatte das relativ große Volumen von 2 l, und die Kapillare war so gewählt, daß zwischen G und I immer eine Druckdifferenz von einigen Millimetern Hg notwendig war; so gelang es, die Druckdifferenz selbst mehrere Stunden lang völlig konstant zu halten, da die aus G nach I abströmende Gasmenge keine merkliche Verminderung des relativ hohen Druckes in G verursachte. Da die Pumpen während der Dauer einer Messung ständig arbeiteten und auf Konstanz der Heizung und Kühlung besonderes Augenmerk gerichtet war, stellte sich auch in II immer ein bestimmter, von der einströmenden Menge abhängiger und bei Konstanz derselben ebenfalls völlig konstanter Druck ein. Man ersieht dies deutlich aus den Angaben, die weiter unten folgen.

Die Messung der Abstände von Öffnung und Flügel geschah mit Hilfe eines Mikroskops, das an einer Teilmaschine befestigt war. Die Trommel der Mikrometerschraube derselben gestattete genaue Ablesung bis 0,001 mm.

Resultate.

A. Messungen mit dem Seitenflügel. Es wurde eine Reihe von Messungen bei verschiedenen Entfernungen d gemacht. Der Seitenflügel bestand aus einem 8 mm langen und 0,53 mm breiten Streifen von

* Obwohl bei diesen Messungen auf genaue Messung des Abstandes von Flügel und Öffnung kein Wert gelegt war, ergeben die mitgeteilten Abstandswerte und die in den Tabellen gegebenen entsprechenden Werte für Druck und Ausschlag genügend genau die Tatsache, daß die Intensität der Molekularstrahlung dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist.

Aluminiumfolie von der Dicke 0,007 mm und hatte immer die seiner Entfernung d entsprechende Krümmung. Er war an einem rechtwinklig gebogenen Glasfaden (siehe Fig. 4 b) von 0,1 mm Dicke befestigt. Durch diese Form wurde der horizontale Teil dieses Fadens aus dem wirksamen Bereich des Gasstromes entfernt und so störende Einflüsse vermieden.

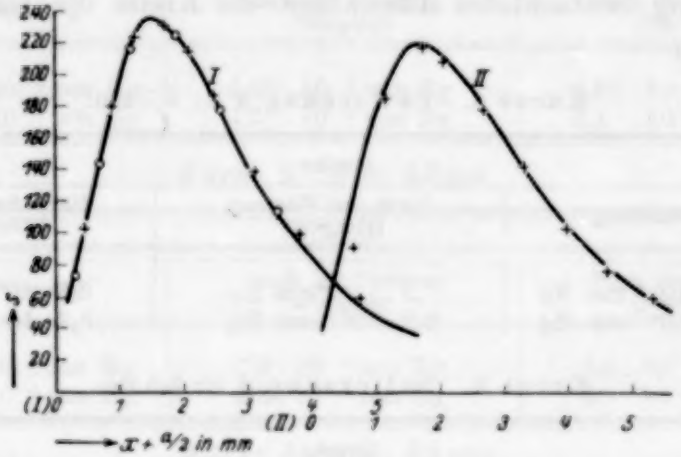


Fig. 5.

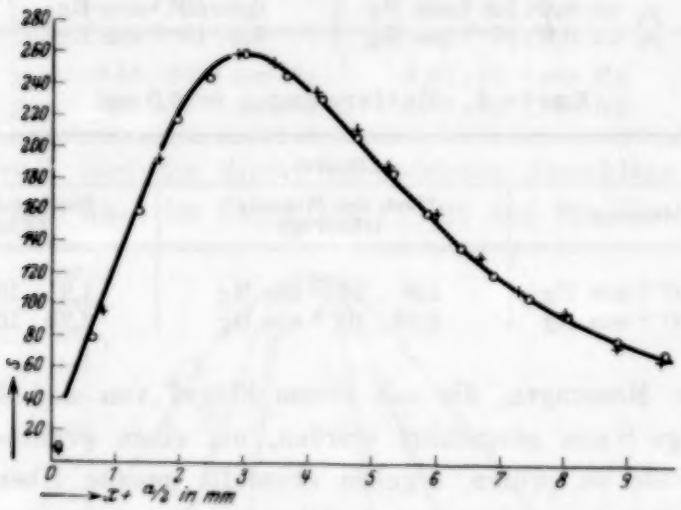


Fig. 6.

Um die Konstanz der Druckdifferenz zwischen I und II zu prüfen, wurde einerseits vor und nach jeder Messung der Druck mit den beiden Mc Leod-Manometern gemessen. Andererseits wurde in mehreren Fällen nach Beendigung einer Meßreihe das Flügelchen wieder in der entgegengesetzten Richtung zurückbewegt und von neuem die bestimmten Entfernungen x entsprechenden Ausschläge beobachtet. Bei völliger Konstanz der Druckdifferenz mußte die so beim Rückgang gewonnene Kurve mit

der beim Hingang aufgenommenen zusammenfallen, was auch tatsächlich der Fall war (siehe Fig. 5 und 6).

In Fig. 5 und 6 sind drei bei verschiedenen Entfernungen d erhaltene Resultate graphisch dargestellt. Die ausgezogenen Kurven sind die theoretisch nach Formel (1) berechneten, die Kreuze sind die experimentell beim Hingang beobachteten Ausschläge, die Kreise die beim Rückgang beobachteten.

Kurve 1. Entfernung $d = 3{,}0$ mm.

Drucke		
Vor der Messung	Nach der Messung (Hingang)	Nach der Messung (Rückgang)
$p_2 = 6{,}8 \cdot 10^{-4}$ mm Hg $p_1 = 8{,}1 \cdot 10^{-3}$ mm Hg	$6{,}9 \cdot 10^{-4}$ mm Hg $8{,}2 \cdot 10^{-3}$ mm Hg	$6{,}8 \cdot 10^{-4}$ mm Hg $8{,}2 \cdot 10^{-3}$ mm Hg

Kurve 2. Entfernung $d = 3{,}5$ mm.

Drucke	
Vor der Messung	Nach der Messung
$p_2 = 6{,}5 \cdot 10^{-4}$ mm Hg $p_1 = 8{,}0 \cdot 10^{-3}$ mm Hg	$6{,}8 \cdot 10^{-4}$ mm Hg $8{,}0 \cdot 10^{-3}$ mm Hg

Kurve 3. Entfernung $d = 6{,}0$ mm.

Drucke		
Vor der Messung	Nach der Messung (Hingang)	Nach der Messung (Rückgang)
$p_2 = 1{,}9 \cdot 10^{-3}$ mm Hg $p_1 = 2{,}26 \cdot 10^{-2}$ mm Hg	$1{,}9 \cdot 10^{-3}$ mm Hg $2{,}26 \cdot 10^{-2}$ mm Hg	$1{,}9 \cdot 10^{-3}$ mm Hg $2{,}26 \cdot 10^{-2}$ mm Hg

Analoge Messungen, die mit einem Flügel von der Breite 1,5 mm und der Länge 8 mm ausgeführt wurden, um einen eventuellen Einfluß der Flügelgröße zu prüfen, ergaben ebenfalls genaue Übereinstimmung der beobachteten Ausschläge mit den theoretisch berechneten.

B. Messungen mit dem Flügel vor der Öffnung. Auch hier wurde eine Reihe von Messungen für verschiedene Entfernungen d gemacht. Der Flügel hatte eine Länge von 4 mm und eine Breite von 0,53 mm. Die Resultate dreier Messungsreihen sind in Fig. 7 dargestellt. Die ausgezogenen Kurven sind die nach Formel (2) berechneten, die Kreise sind die experimentell beim Hingang beobachteten Ausschläge, die Kreuze die beim Rückgang beobachteten. Beim Ausziehen der theoretischen Kurven ist auch die Tatsache berücksichtigt, daß die Öffnung

kein Punkt, sondern eine Kreisfläche vom Durchmesser 0,3 mm ist; d. h. das Maximum ist um 0,3 mm in die Breite gezogen.

Kurve 1. $d = 1{,}78$ mm.

Drucke		
Vor der Messung	Nach der Messung (Hingang)	Nach der Messung (Rückgang)
$p_1 = 4{,}05 \cdot 10^{-3}$ mm Hg $p_2 = 3{,}0 \cdot 10^{-4}$ mm Hg	$4{,}05 \cdot 10^{-3}$ mm Hg $3{,}3 \cdot 10^{-4}$ mm Hg	$3{,}95 \cdot 10^{-3}$ mm Hg $3{,}1 \cdot 10^{-4}$ mm Hg

Kurve 2. $d = 3{,}7$ mm.

Drucke		
Vor der Messung	Nach der Messung (Hingang)	Nach der Messung (Rückgang)
$p_1 = 7{,}9 \cdot 10^{-3}$ mm Hg $p_2 = 6{,}3 \cdot 10^{-4}$ mm Hg	$7{,}9 \cdot 10^{-3}$ mm Hg $6{,}3 \cdot 10^{-4}$ mm Hg	$8{,}0 \cdot 10^{-3}$ mm Hg $6{,}7 \cdot 10^{-4}$ mm Hg

Kurve 3. $d = 6{,}7$ mm.

Drucke	
Vor der Messung	Nach der Messung
$p_1 = 2{,}53 \cdot 10^{-2}$ mm Hg $p_2 = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ mm Hg	$2{,}52 \cdot 10^{-2}$ mm Hg $1{,}98 \cdot 10^{-3}$ mm Hg

In Kurve 1 sind die direkt beobachteten Ausschläge eingetragen, für Kurve 2 sind diese im Verhältnis 1 : 1,22 und für Kurve 3 im Ver-

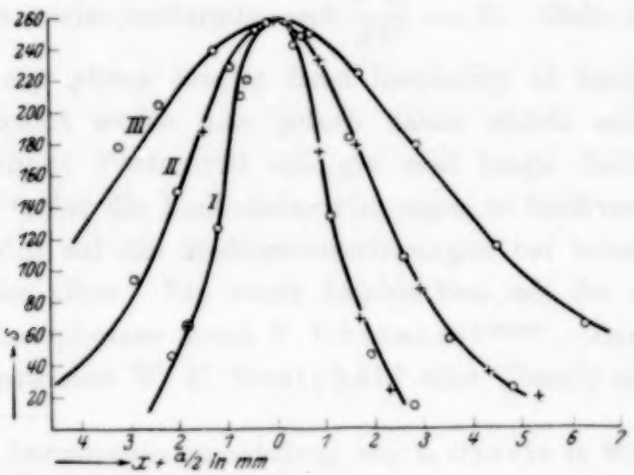


Fig. 7.

hältnis 1 : 1,47 verkleinert, um die Kurven im Maximum zusammenfallend zeichnen zu können.

Es muß noch bemerkt werden, daß die mitgeteilten Ergebnisse selbstverständlich auch das Gesetz enthalten, daß die Intensität eines von einem Punkte ausgehenden Gasstromes direkt proportional dem Quadrat der Entfernung abnimmt.

Zusammenfassung.

1. Mit einer neuen Methode werden die von Knudsen experimentell geprüften Strömungsgesetze verdünnter Gase durch enge Öffnungen bestätigt.

2. Mit derselben Methode wird zum ersten Male direkt die Gültigkeit des Kosinusgesetzes der Molekularstrahlung experimentell nachgewiesen.

Vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Tübingen durchgeführt. Herrn Prof. W. Gerlach sage ich für die Anregung zu diesen Untersuchungen und für sein stetes, förderndes Interesse meinen herzlichsten Dank. Dem International Education Board danke ich, daß er mir den Aufenthalt in Tübingen ermöglichte.

Tübingen, Physikal. Institut der Universität, im Oktober 1928.

Zur Theorie des Einplattenradiometers.

Von **Theodor Sexl** in Wien.

(Eingegangen am 2. Oktober 1928.)

Es wird eine exakte Theorie des Einplattenradiometers aufgestellt, indem die Platte als Grenzfall eines Rotationsellipsoids aufgefaßt wird. Durch Bestrahlung wird die Oberfläche des Ellipsoids Sitz eines Temperaturgefälles, so daß sich die Maxwellsche thermische Gleitströmung ausbildet. Dadurch ist das Problem auf ein hydrodynamisches zurückgeführt, und die Radiometerkraft wird zu der Kraft, welche das strömende Gas auf das im Ursprung ruhende Rotationsellipsoid ausübt. Die Radiometerkraft ergibt sich so zu $\mathfrak{R} = \frac{14{,}72}{n+5}\,\frac{\delta}{\varkappa_i}\,J\frac{p\,l^2}{T}$, welche die richtige Abhängigkeit von der Intensität der Bestrahlung, vom Gasdruck und von der Natur des Gases enthält.

§ 1. Historische Einleitung. Über die Entstehung der Radiometerwirkungen in Gasen bei hohem Druck, wo also die mittlere freie Weglänge des Gases klein gegen die in Betracht kommenden Gefäßdimensionen ist, sind lange Zeit recht verworrene Ansichten in der Literatur* zu finden. Nichtsdestoweniger war bereits die erste exakt fundierte Ansicht die richtige. Sie möge im Original hier zitiert werden. Maxwell** schreibt in seiner berühmten Abhandlung „On stresses in rarified gases arising from inequalities of temperature“ wie folgt im Jahre 1879: „If the bodies are two parallel disks very near to each other, the central parts will produce very little effect, because between the disks the temperature varies uniformly, and $\frac{d^2\Theta}{dh^2} = 0$. Only near the edges will there be any stress arising from inequality of temperature in the gas.“ Anscheinend wußte man jedoch damit nichts anzufangen. Der nächste wesentliche Fortschritt erfolgte erst lange Zeit später durch M. Knudsen***, der die Radiometerwirkungen in hochverdünnten Gasen klärte. In bezug auf die Radiometerwirkungen bei hohem Druck blieb jedoch alles beim alten. Ein neuer Impuls kam mit der Auffindung der sogenannten Photophorese durch F. Ehrenhaft****. Bereits kurze Zeit nachher veröffentlichte W. H. Westphal† eine Theorie der Radiometer-

* Vgl. die Literaturzusammenstellung von L. Graetz in Winkelmanns Handbuch der Physik II, S. 262–264, 1896.

** J. Cl. Maxwell, Scientific Papers, Vol. II, S. 683.

*** M. Knudsen, Ann. d. Phys. **32**, 809, 1910.

**** F. Ehrenhaft, ebenda **56**, 81, 1918.

† W. H. Westphal, Verh. d. D. Phys. Ges. **21**, 129, 1919.

wirkungen bei hohem Druck; doch war seine Theorie, worauf A. Einstein hinwies, im Widerspruch mit dem Impulssatz. Daraufhin zog Westphal* seine Theorie zurück. In der Folge erschien eine Arbeit von E. Einstein**, die jedoch eine falsche Abhängigkeit der Radiometerkraft von der Intensität der Bestrahlung ergab. Immer hatte man dabei vorausgesetzt, daß es sich bei den Radiometerwirkungen um einen Flächeneffekt handelt. Daraufhin nahm A. Einstein*** wieder die Maxwellsche Ansicht auf, daß es sich bei dem Einplattenradiometer um einen Randeffekt und nicht um einen Flächeneffekt handle. Seine Argumentation war die nachfolgende: Die Kraftwirkung auf einen kleinen Körper, dessen Flächenausdehnung klein gegen die mittlere freie Weglänge des Gases ist, gehört dem Knudsenschen Bereich an und wird durch Knudsens Formel gegeben. Ist andererseits die Flächenausdehnung des Körpers groß gegen die mittlere freie Weglänge, so herrscht im Innern der Fläche Druckgleichgewicht. Es muß also am Rande des Körpers in einem Bereich von der Größenordnung der mittleren freien Weglänge des Gases ein Übergang von der Druckgleichheit im Innern zu der Kraftwirkung außerhalb auf gegen die freie Weglänge kleine Körper stattfinden. So erhielt Einstein die größenordnungsmäßig richtige Formel: $\Re = -\frac{1}{2}\frac{p l^2}{T}\frac{\partial T}{\partial x}$, die die Abhängigkeit vom Wärmestrom, vom Gasdruck und von der Natur des Gases richtig wiedergibt. Hierauf haben H. E. Marsh, E. Condon und L. B. Loeb**** experimentell nachgewiesen, daß es sich beim Einplattenradiometer tatsächlich um einen Randeffekt handelt. Auch erhielt H. E. Marsh† eine bemerkenswerte quantitative Übereinstimmung mit der Einsteinschen Formel. Gleichzeitig mit der Einsteinschen Arbeit erschien eine Arbeit von G. Hettner††, in der die Radiometerwirkungen bei hohem Druck durch eine thermische Gleitströmung erklärt werden. Eine spätere Anwendung auf kleine Kugeln††† wurde durch Beobachtungen J. Mattauchs†††† bestätigt. Diese thermische Gleitströmung tritt stets dann auf, wenn an der Berührungsfläche eines festen

---

* W. H. Westphal, Verh. d. D. Phys. Ges. **21**, 669, 1919.
** E. Einstein, Ann. d. Phys. **69**, 241, 1922.
*** A. Einstein, ZS. f. Phys. **27**, 1, 1924.
**** H. E. Marsh, E. Condon und L. B. Loeb, Journ. Opt. Soc. Amer. **11**, 257, 1925.
† H. E. Marsh, ebenda **12**, 135, 1925.
†† G. Hettner, ZS. f. Phys. **27**, 12, 1924.
††† G. Hettner, ebenda **37**, 179, 1926.
†††† J. Mattauch, Ann. d. Phys. **85**, 967, 1928.

Körpers und eines Gases ein Temperaturgefälle längs der Fläche besteht, welches bewirkt, daß das Gas von Stellen höherer zu Stellen niedrigerer Temperatur in Bewegung gerät. Auch auf diese Erscheinung hatte zum ersten Male bereits Maxwell* in seinen „Stresses in rarified gases" hingewiesen und sie theoretisch berechnet, ohne sie jedoch mit den Radiometerwirkungen in Verbindung zu bringen. Trotzdem also bereits der Radiometereffekt am Einplattenradiometer als Randeffekt erkannt war, publizierte A. Sterntal** eine Theorie des Einplattenradiometers, indem er den Effekt wieder für einen Flächeneffekt hält. Doch enthält auch seine Arbeit einen Widerspruch gegen den Impulssatz, wie etwas näher ausgeführt werden soll. Zur Berechnung des auf die gegen die mittlere freie Weglänge des Gases große Platte übertragenen Impulses wird angenommen, daß das in bezug auf den Wärmestrom im Gase korrigierte Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz F für die auffallenden Moleküle bis an die Platte heran gelte. Das Geschwindigkeitsverteilungsgesetz der abgehenden Moleküle sei F'. Dann ist die gesamte in der x-Richtung auf die Platte ausgeübte Kraft gegeben durch

$$\int_{\xi<0} m\xi^2 F\, d\tau + \int_{\xi>0} m\xi^2 F'\, d\tau$$

und wird zu $p + \Re$ berechnet, wo $\Re$ die Radiometerkraft bedeuten soll. Dabei wurde jedoch übersehen, daß für den stationären Zustand die Wirkungen der von dem Flächenelement der Platte ausgehenden Moleküle dieselben sein müssen, wie sie es wären, wenn sie mit dem Geschwindigkeitsverteilungsgesetz der auffallenden Moleküle und entgegengesetzter ξ-Komponente emittiert würden. Der Impulstransport muß eben durch jede Isothermenebene derselbe, also auch gleich dem Impulstransport im freien Gase sein:

$$\int_{-\infty<\xi<+\infty} m\xi^2 F\, d\tau = p,$$

der aber gleich dem konstanten Gasdruck ist. Damit erübrigen sich auch die Einwände Sterntals gegen die Arbeit von E. Einstein. Schließlich erschien kürzlich eine kurze Sitzungsberichtsnotiz von P. S. Epstein***, in der er den Radiometereffekt für eine kreisförmige Scheibe berechnet und eine ähnliche Formel wie Einstein erhält. Doch sind Voraussetzungen und der Gang der Rechnung aus dieser kurzen Notiz nicht zu entnehmen.

---

* J. Cl. Maxwell, Scientific Papers, Vol. II, S. 703.
** A. Sterntal, ZS. f. Phys. **39**, 341, 1926.
*** P. S. Epstein, Phys. Rev. **31**, 914, 1928.

Im folgenden soll nun eine exakte Theorie des Einplattenradiometers dargelegt werden, indem die Platte als Grenzfall eines Rotationsellipsoids aufgefaßt wird. Die Bestrahlung erfolge gleichmäßig in Richtung der positiven x-Achse, so daß in bezug auf die x-Achse Symmetrie herrscht und diese Achse als Rotationsachse des Ellipsoids gewählt werden kann. Die Oberfläche des Ellipsoids wird dann Sitz eines Temperaturgefälles sein, so daß sich die Maxwellsche thermische Gleitströmung ausbildet. Dadurch ist das Problem auf ein hydrodynamisches zurückgeführt, und die Radiometerkraft wird bei hohem Druck zu der Kraft, welche das strömende Gas auf das im Ursprung ruhende Rotationsellipsoid ausübt. Diesen Annahmen gemäß zerfallen die folgenden Betrachtungen in drei Teile:

1. Die Aufstellung des Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes für das Gas, in dem ein Temperatur- und Geschwindigkeitsgefälle herrscht.

2. Die Berechnung der gastheoretischen Grenzbedingung an der Oberfläche des Rotationsellipsoids.

3. Die Lösung des hydrodynamischen Problems.

§ 2. Aufstellung des Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes. Wir nehmen an, daß im Gase eine beliebige Wärmeströmung längs der x-Achse besteht, und daß sich das Gas mit der makroskopischen Geschwindigkeit u längs der x-Achse bewegt. u soll eine lineare Funktion von y sein. Äußere Kräfte seien keine vorhanden. Dann folgt zunächst für den stationären Zustand aus der Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$, d. h. das Temperaturgefälle längs der x-Achse muß linear sein. Ferner folgt aus den hydrodynamischen Gleichungen, daß der Druck p konstant sein muß. Bezeichnet k die Boltzmannsche Konstante und N die Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit, so ist also $p = N(x)\,k\,T(x) = \text{const}$, und daher folgt aus $T(x) = T + \frac{\partial T}{\partial x} x$ die Relation $N(x) = N\left(1 - \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x} x\right)$. Fallender Temperatur entspricht also steigende Dichte, und umgekehrt.

Zur Aufstellung des Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes benutzen wir nun eine Methode, die im Grunde von Boltzmann* stammt, deren Verwendbarkeit aber insbesondere von P. S. Epstein** hervorgehoben wurde.

---

* L. Boltzmann, Wissensch. Abh., Bd. II, S. 23. Leipzig 1909.

** P. S. Epstein, Verh. d. D. Phys. Ges. **21**, 96, 1919; Phys. Rev. **23**, 710, 1924. Vgl. auch E. Einstein, Ann. d. Phys. **69**, 241, 1922, und Th. Sexl, Ann. d. Phys. **80**, 515, 1926.

Diese Methode hat den besonderen Vorzug, daß sie einzig und allein auf dem Boltzmannschen Prinzip beruht und unabhängig ist von irgendwelchen Annahmen über die Natur der Zusammenstöße der Gasmoleküle untereinander. Das Boltzmannsche Prinzip sagt nun aus, daß das richtige Geschwindigkeitsverteilungsgesetz dasjenige ist, das die größte Wahrscheinlichkeit besitzt, oder wenn H die Boltzmannsche H-Funktion bedeutet, muß sein

$$H = \int F \log F \, . \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \, dp_1 \ldots dp_n = \min.$$

Dabei sind ξ, η, ζ die Geschwindigkeitskomponenten nach den Koordinatenrichtungen und $p_1 \ldots p_n$ die inneren Impulskomponenten eines Moleküls. F gibt dann die Anzahl der Moleküle an, welche Geschwindigkeitskomponenten zwischen ξ, η, ζ und $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$ und die inneren Impulskomponenten zwischen $p_1 \ldots p_n$ und $p_1 + dp_1 \ldots p_n + dp_n$ besitzen. F muß gemäß dieser Bedingung gewählt werden und außerdem in dem hier vorliegenden speziellen Falle folgende fünf Bedingungen erfüllen ($d\tau = d\xi \ldots dp_n$):

$$\int m F \, d\tau = \varrho(x), \tag{1}$$

$$\int \left[\frac{m}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + U\right] F \, d\tau = N(x) \frac{n+3}{2} k T(x), \tag{2}$$

$$\int m \xi F \, d\tau = \varrho(x) \, u(y), \tag{3}$$

$$\int \left[\frac{m}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + U\right] \xi F \, d\tau = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial x} + N(x) \, k T(x) \frac{n+5}{2} u(y), \tag{4}$$

$$\int m \xi \eta F \, d\tau = -p_{xy} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5}$$

Dabei bedeutet $U = \alpha_1 p_1^2 + \cdots + \alpha_n p_n^2$ und α_i Konstanten. (1) gibt die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit an, (2) gibt die konstante Energie der Volumeneinheit, (3) stellt den Massentransport dar, (4) den Energietransport, und schließlich gibt (5) die Schubkraft längs der x-Achse.

Nach der Lagrangeschen Methode sind nun (1) bis (5) mit konstanten Faktoren zu multiplizieren, zu H hinzuzufügen und die Variation der Summe gleich Null zu setzen. Wir multiplizieren der Reihe nach mit $-(\log A + 1)$, B', $-a$, $-b$ und $-c$ und erhalten

$$\int \delta F \cdot \Big\{ \log F + 1 - (\log A + 1) + B' \left[\frac{m}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + U\right] - a\xi - b\xi \left[\frac{m}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + U\right] - c\xi\eta \Big\} = 0$$

oder

$$\log F = \log A - B'\left[\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+U\right]+a\xi+b\xi$$

$$\left[\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+U\right]+c\xi\eta.$$

Beschränken wir uns auf geringe Abweichungen vom Maxwellschen Verteilungsgesetz:

$$F = A e^{-B\left[\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+U\right]},$$

so kann $B' = B + B''$ gesetzt werden $\left(B = \frac{1}{kT}\right)$. B'', a, b und c werden als klein vorausgesetzt, ihre Quadrate und Produkte vernachlässigt. Dann folgt durch Reihenentwicklung und bei Beschränkung auf lineare Glieder:

$$F = A e^{-B\left[\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+U\right]}\left\{1+a\xi+b\xi\left[\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+U\right]\right.$$

$$\left.+c\xi\eta-B''\left[\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+U\right]\right\}.$$

Die fünf Konstanten A, a, b, c und B'' sind aus (1) bis (5) zu berechnen. Setzt man

$$A = \frac{N_0\sqrt{\alpha_1\dots\alpha_n}}{\pi^{n/2}(2\pi)^{3/2}}\, m^{3/2} B^{\frac{n+3}{2}},$$

so erhält man:

$$N(x) = N_0 - N_0\frac{B''}{B}\frac{n+3}{2}, \tag{1a}$$

$$N(x)\,kT(x) = \frac{N_0}{B} - N_0\frac{B''}{B^2}\frac{n+5}{2}, \tag{2a}$$

$$a\frac{N_0}{mB} + b\frac{N_0}{2mB^2}(n+5) = Nu, \tag{3a}$$

$$a\frac{N_0}{2m}\frac{n+5}{B^2} + b\frac{N_0}{4m}\frac{(n+5)(n+7)}{B^3} = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{N}{2B}u(n+5), \tag{4a}$$

$$c\frac{N_0}{mB^2} = -p_{xy}. \tag{5a}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach den Unbekannten N_0, B'', a, b und c ergibt nun

$$N_0 = N\left(1 - \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x} x \frac{n+5}{2}\right),$$

$$B'' = -\frac{1}{kT^2}\frac{\partial T}{\partial x} x,$$

$$a = \frac{mu}{kT} + \varkappa \frac{\partial T}{\partial x}\frac{4}{\varrho}\left(\frac{m}{2kT}\right)^2,$$

$$b = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial x}\frac{8\left(\frac{m}{2kT}\right)^3}{(n+5)\,\varrho}\frac{2}{m},$$

$$c = -p_{xy}\frac{4}{\varrho}\left(\frac{m}{2kT}\right)^2.$$

Das gesuchte Geschwindigkeitsverteilungsgesetz lautet also

$$F = Ae^{-\frac{1}{kT}\left[\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+U\right]}\left\{1 + \alpha x + \beta x\left[\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+U\right]\right.$$
$$\left. + a\xi + b\xi\left[\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+U\right] + c\,\xi\eta\right\}, \qquad (6)$$

worin

$$A = \frac{N\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\left(\frac{m}{2}\right)^{n/2}}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{n+3}{2}},$$

$$\alpha = -\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{n+5}{2},$$

$$\beta = \frac{1}{kT^2}\frac{\partial T}{\partial x}$$

und a, b und c die gerade angegebene Bedeutung besitzen.

Geht man die gegebene Ableitung durch, so sieht man, daß dieses Geschwindigkeitsverteilungsgesetz auch für ein beliebiges Temperatur- und Geschwindigkeitsgefälle bestehen bleibt. Verändern würden sich nur die Werte von α und β, die jedoch in die folgenden Rechnungen nicht eingehen werden. Dies hängt damit zusammen, daß jetzt der Druck gemäß den hydrodynamischen Gleichungen keine Konstante mehr zu sein braucht, sondern eine Funktion von x sein wird. Schließlich sei noch bemerkt, daß für $n = 0$ (6) in das von Boltzmann* gefundene Ge-

* L. Boltzmann, Vorl. über Gastheorie, 3. Aufl., Bd. I, S. 185, 1923.

schwindigkeitsverteilungsgesetz übergeht, wie man ohne weiteres durch Übertragung der dort gegebenen Ausdrücke in die hier benutzte Schreibweise sieht. Allerdings hat Boltzmann sein Verteilungsgesetz unter der Voraussetzung abgeleitet, daß sich die Moleküle mit einer der fünften Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Kraft abstoßen.

§ 3. Die Grenzbedingung an der festen Wand. Es sei nun parallel der x-Achse eine feste Wand vorhanden, und wir fragen nach dem Wert, den die Geschwindigkeit u im stationären Zustand an der Wand annimmt. Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir zunächst eine Annahme über die Beeinflussung der Gasmoleküle durch die feste Wand machen. Wir wollen nun gemäß den Vorstellungen Maxwells annehmen, daß die Flächeneinheit der festen Wand den Bruchteil f der auf ihr auftreffenden Moleküle diffus reflektiere, d. h. die Geschwindigkeiten der Moleküle sind der Wandtemperatur gemäß nach dem Maxwellschen Verteilungsgesetz verteilt, und ihre Anzahlen verteilen sich räumlich nach dem cos-Gesetz. Der Bruchteil $1-f$ soll elastisch reflektiert werden, d. h. das Geschwindigkeitsverteilungsgesetz der so reflektierten Moleküle ist dasselbe wie das der auftreffenden Moleküle, nur ist das Vorzeichen der η-Komponente ins Gegenteil umgeschlagen.

Im stationären Zustande müssen nun die Wirkungen, die die reflektierten Moleküle in bezug auf Zug- und Druckspannungen im Gase ausüben, dieselben sein, wie sie die von Molekülen wären, die gemäß dem Geschwindigkeitsverteilungsgesetz der auftreffenden Moleküle verteilt vom Flächenelement emittiert würden. Insbesondere muß das in bezug auf die auf das Flächenelement ausgeübte Schubkraft gelten. Es muß also sein:

$$-\int_{\eta<0} m\xi\eta F\,d\tau + (1-f)\int_{\eta<0} m\xi\eta F\,d\tau = -\int_{-\infty<\eta<+\infty} m\xi\eta F\,d\tau.$$

Darin bedeutet der erste Ausdruck links die von den auftreffenden Molekülen ausgeübte Schubkraft, wobei vorausgesetzt ist, daß das Verteilungsgesetz F, das ja natürlich nur für das freie Gas abgeleitet wurde, bis in unmittelbare Nähe der festen Wand gilt. Der zweite Term gibt die Schubkraft der von dem Flächenelement der Wand reflektierten Moleküle und setzt sich allein aus der Schubkraft der elastisch reflektierten Moleküle zusammen, da die diffus reflektierten Moleküle offenbar keine Schubkraft auszuüben vermögen. Die Summe der beiden Schubkräfte muß nun im stationären Zustande gleich der Schubkraft im freien Gase sein, welche die rechte Seite darstellt.

Zur besseren Durchdringung des Ansatzes wird es gut sein, noch folgendes hinzuzufügen. df sei ein Flächenelement im Gase, dessen nach außen gerichtete Normale mit der y-Achse zusammenfalle. Wir fragen nun, wie viele Moleküle mit Geschwindigkeitskomponenten ξ, η, ζ und $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$ treffen in der Zeiteinheit auf das Flächenelement auf? Offenbar treffen nun alle diejenigen Moleküle auf, die in einem gegebenen Augenblick in einem schiefen Zylinder liegen, der df zur Basis und η zur Höhe hat. Da das absolute Volumen dieses Zylinders $\eta\, df$ beträgt und die Geschwindigkeit des Moleküls entgegen der positiven y-Achse gerichtet sein muß, so treffen also $-\eta F d\tau$ auf das Flächenelement auf. Da diese den Impuls $m\xi$ in der positiven x-Achse transportieren, so ist also die von allen Molekülen ausgeübte Schubkraft $-\int\limits_{\eta<0} m\xi\eta F d\tau$. Da nun die elastisch reflektierten Moleküle dasselbe Verteilungsgesetz, jedoch eine entgegengesetzte η-Komponente besitzen, so ist die von diesen ausgeübte Schubkraft

$$-(1-f)\int\limits_{\eta>0} m\xi\eta F(-\eta)\, d\tau = (1-f)\int\limits_{\eta<0} m\xi\eta F d\tau.$$

Wir erhalten also

$$f\int\limits_{\eta<0} m\xi\eta F d\tau = \int\limits_{-\infty<\eta<+\infty} m\xi\eta F d\tau.$$

Wird nun für F das durch (6) gegebene Geschwindigkeitsverteilungsgesetz eingetragen, so ergibt die Integration:

$$f\left[-\frac{u\varrho}{2\sqrt{\pi}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}} - \frac{p_{xy}}{2} + \varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\pi}\,(n+5)}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}\right] = -p_{xy}$$

Da nun $\dfrac{1}{\dfrac{2}{f}-1}\,\dfrac{\varrho}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{2kT}{m}\right)^{1/2} = \beta$ ist, wenn β den Koeffizienten der äußeren Reibung des Gases an der festen Wand bezeichnet, so berechnet sich hieraus die Geschwindigkeit an der festen Wand zu

$$u = \frac{p_{xy}}{\beta} + \varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\,\frac{1}{n+5}\,\frac{1}{p}, \tag{7}$$

was die gesuchte Grenzbedingung liefert. Ist kein Temperaturgefälle vorhanden, so geht sie einfach in den gewöhnlichen phänomenologischen Gleitungsansatz über. Wir werden nun im nächsten Paragraphen annehmen, daß diese für eine ebene Wand abgeleitete Grenzbedingung auch für eine gekrümmte Wand mit genügend großem Krümmungsradius gelte,

müssen jedoch β zur Ermöglichung der folgenden Rechnungen für das Ellipsoid gleich ∞ setzen. In bezug auf experimentelle Überprüfung von (7) ist zu bemerken, daß M. Czerny und G. Hettner* ihre Richtigkeit für eine ebene Wand bestätigen konnten, indem das Experiment im Einklang mit der Theorie direkte Proportionalität mit $\frac{\partial T}{\partial x}$ und umgekehrte Proportionalität mit dem Druck für ein Intervall ergab, in dem $\varkappa$ als unabhängig vom Druck nachgewiesen ist.

§ 4. Das hydrodynamische Problem. Vernachlässigen wir die quadratischen Glieder in den hydrodynamischen Gleichungen, so lauten diese für den stationären Zustand:

$$0 = -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \mathfrak{v}. \tag{8a}$$

Dazu kommt die Inkompressibilitätsbedingung

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0, \tag{8b}$$

da die Kontinuitätsgleichung für den stationären Zustand bei Vernachlässigung quadratischer Glieder in den Geschwindigkeiten in

$$0 = \operatorname{div}(\varrho \mathfrak{v}) = \varrho \operatorname{div} \mathfrak{v} + \mathfrak{v} \,.\, \operatorname{grad} \varrho = \varrho_0 \operatorname{div} \mathfrak{v} + \varrho' \operatorname{div} \mathfrak{v} + \mathfrak{v} \,.\, \operatorname{grad} \varrho'$$
$$= \varrho_0 \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$$

übergeht. Dabei wurde $\varrho = \varrho_0 + \varrho'$ gesetzt; $\varrho_0 = \text{const}$, $\varrho' = \varrho'(u, v, w)$.

Unser Ellipsoid, das die x-Achse zur Rotationsachse besitzen soll, sei gegeben durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

Wir suchen nun eine Lösung der Stokesschen Gleichungen (8a) und (8b), welche im Unendlichen den Grenzbedingungen $u = v = w = 0$ genügt und für welche an der Oberfläche des Ellipsoids die Normalgeschwindigkeit verschwindet, während die Tangentialgeschwindigkeit die im vorigen Paragraphen abgeleitete Grenzbedingung (7) erfüllt.

Durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2 + z^2}{b^2 + \lambda} = 1$ und die Bedingung $\lambda > 0$ sei zunächst eine Funktion $\lambda(x, y, z)$ definiert. Ferner werde $\sqrt{(a^2 + \lambda)\,(b^2 + \lambda)^2} = W(\lambda)$ gesetzt. Ist dann

$$\Omega(x, y, z) = \pi a b^2 \int_{\lambda}^{\infty} \left(\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2 + z^2}{b^2 + s} - 1 \right) \frac{ds}{W(s)}$$

* M. Czerny und G. Hettner, ZS. f. Phys. **30**, 258, 1924.

die Dirichletsche* Potentialfunktion und bedeutet

$$\chi(x, y, z) = a b^2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{W(s)},$$

so machen wir zur Befriedigung der Gleichungen (8a) und (8b) den aus der Widerstandstheorie eines stationär bewegten Ellipsoids bekannten Ansatz

$$u = A \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + B\left(x \frac{\partial \chi}{\partial x} - \chi\right),$$

$$v = A \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + B x \frac{\partial \chi}{\partial y},$$

$$w = A \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z} + B x \frac{\partial \chi}{\partial z}.$$

Dieser erfüllt zunächst wegen $\Delta \Omega = 0$ und $\Delta \chi = 0$ die Inkompressibilitätsbedingung (8b). Damit (8a) erfüllt ist, muß sein

$$p = 2 \mu B \frac{\partial \chi}{\partial x} + \text{const.}$$

Die Grenzbedingungen im Unendlichen sind offenbar erfüllt, da ja dem unendlich fernen Ellipsoid $\lambda \to \infty$ entspricht. Da ferner unser Ansatz für die Geschwindigkeiten der Symmetriebedingung in bezug auf die Rotationsachse genügt, genügt es weiterhin, die $x\,y$-Ebene zu betrachten. Dann lautet die Randbedingung für die Normalgeschwindigkeiten auf unserem Ellipsoid, dem ja $\lambda = 0$ entspricht,

$$u_{\lambda=0} \cos(n x) + v_{\lambda=0} \cos(n y) = 0,$$

diejenige für die Tangentialgeschwindigkeiten, wenn in (7) des vorigen Paragraphen $\frac{\varkappa}{(n+5)p} = c$ gesetzt wird,

$$u_{\lambda=0} \cos(n y) - v_{\lambda=0} \cos(n x) = c \frac{dT}{ds}.$$

Hier bedeutet ds das Bogenelement der Schnittellipse in der $x\,y$-Ebene in tangentialer Richtung. Setzt man abkürzend $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2 + z^2}{b^4} = D_0$, $a b^2 \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)\, W(s)} = \alpha_0$ und $a b^2 \int_0^{\infty} \frac{ds}{W(s)} = \chi_{\lambda=0} = \chi_0$ und beachtet,

* Vgl. z. B. die Abhandlung von P. G. Lejeune-Dirichlet in Ostwalds Klassiker Nr. 19.

daß $\cos(n\,x) = \frac{x}{\sqrt{D_0\,a^2}}$ und $\cos(n\,y) = \frac{y}{\sqrt{D_0\,b^2}}$ ist, so ergeben die beiden Grenzbedingungen am Ellipsoid, wenn die Werte für u und v eingesetzt werden, die beiden linearen Gleichungen zur Bestimmung von A und B:

$$2\pi(\alpha_0 - 2)A - (\chi_0 + 2a^2)B = 0,$$

$$\frac{y}{\sqrt{D_0\,b^2}}\{2\pi\alpha_0 A - \chi_0 B\} = c\frac{dT}{ds}.$$

Die letztere kann offenbar nur dann erfüllt werden, wenn $\frac{dT}{ds}$ proportional zu $\frac{y}{\sqrt{D_0\,b^2}} = \sin\nu$ ist, wenn mit ν der Winkel der Normalen des Ellipsoids gegen die x-Achse bezeichnet wird. Nun ist aber ds gleich Krümmungsradius mal $d\nu$. Andererseits berechnet sich der Krümmungsradius $R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ zu $R = -a^2b^2D_0^{3/2}$ oder, wenn man diese Funktion auf eine Funktion von ν umrechnet, $R = -\frac{b^2}{a}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin\nu^3}}$ mit $k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$.

Wird dies eingesetzt, so sieht man, daß

$$T = -\frac{\cos\nu}{\sqrt{1-k^2\sin^2\nu}}\frac{\delta T}{2} + \text{const}$$

angesetzt werden muß, damit die zweite Gleichung erfüllt werden kann. Hierbei ist δT die Temperaturdifferenz zwischen beiden Polen $x = -a$, $y = z = 0$ und $x = +a$, $y = z = 0$.

Damit werden die beiden Gleichungen:

$$2\pi(\alpha_0 - 2)A - (\chi_0 + 2a^2)B = 0,$$

$$2\pi\alpha_0 A - \chi_0 B = \frac{c\,\delta T}{2a}.$$

Aus diesen berechnet sich die für das Folgende allein benötigte Konstante B zu

$$B = \frac{c}{4a}\delta T\frac{2-\alpha_0}{\chi_0 + \alpha_0 a^2}.$$

Um nun die Resultante der Kräfte berechnen zu können, welche das Gas auf das Ellipsoid ausübt, haben wir die Komponente des Drucktensors parallel der x-Achse zu berechnen und über die Ellipsoidoberfläche zu integrieren. Da es nach dem Impulssatz gleichgültig sein muß, über welche Fläche integriert wird, wählen wir als Integrationsfläche eine mit

dem Ellipsoid konzentrische Kugel mit einem sehr großen Radius. Für sehr große Werte des Radius r wird nun

$$\lambda = r^2, \quad \Omega = -\frac{4\pi a b^2}{3r} \quad \text{und} \quad \chi = \frac{2ab^2}{r},$$

und das gesuchte Integral nach einfacher Rechnung, die hier wohl unterdrückt werden darf,

$$\Re = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} [p_{xx}\cos(nx) + p_{xy}\cos(ny) + p_{xz}\cos(nz)]\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 16\pi\mu a b^2 B.$$

Dies liefert schließlich für die gesuchte Radiometerkraft $\Re$, wenn $\varkappa = \frac{15}{4}\mu\frac{k}{m}$ und $\mu = 0{,}3502\,\varrho\,\bar{c}\,l$ gesetzt wird,

$$\boxed{\Re = \frac{14{,}72}{n+5}\frac{pl^2}{T}\delta T \cdot b^2 \frac{2-\alpha_0}{\chi_0 + \alpha_0 a^2}.} \tag{9}$$

§ 5. Diskussion des Resultats. Wir wollen nun zunächst unser Rotationsellipsoid in eine Kugel ausarten lassen. Dann wird $a = b$, $\alpha_0 = \frac{2}{3}$ und $\chi_0 = 2a^2$. Dies ergibt $b^2\frac{2-\alpha_0}{\chi_0 + \alpha_0 a^2} = \frac{1}{2}$, so daß die auf die Kugel ausgeübte Radiometerkraft wird:

$$\Re_{\text{Kugel}} = \frac{7{,}36}{n+5}\frac{pl^2}{T}\delta T.$$

Dies Ergebnis unterscheidet sich von dem Hettnerschen* Resultat für eine Kugel nur in dem Zahlenkoeffizienten. Dieser Unterschied ist dadurch bedingt, daß Hettner eine andere Definition der mittleren freien Weglänge als die Boltzmannsche benutzt. Wird diese für hohe Drucke gültige Formel mit der für tiefe Drucke geltenden Knudsenschen Formel durch geeignete Interpolation verbunden, so gibt sie die Radiometerwirkungen an kleinen Kugeln (Photophorese) nach Beobachtungen J. Mattauchs** vorzüglich wieder.

Wird andererseits a sehr klein, so daß unser Rotationsellipsoid in eine kreisförmige Scheibe vom Radius b ausartet, so wird $\alpha_0 = 2 - \pi\frac{a}{b}$

* G. Hettner, ZS. f. Phys. **37**, 179, 1926.
** J. Mattauch, Ann. d. Phys. **85**, 967, 1928.

und $\chi_0 = \pi a b$. Dies ergibt $b^2 \frac{2 - \alpha_0}{\chi_0 + \alpha_0 a^2} = 1$, und die gesuchte Radiometerwirkung auf eine kreisförmige Platte wird daher

$$\Re_{\text{Platte}} = \frac{14{,}72}{n+5} \frac{p l^2}{T} \delta T.$$

Bezeichnet nun J die auffallende Strahlungsenergie, $\varkappa_i$ die Wärmeleitfähigkeit des Plattenmaterials und δ die Dicke der Platte, so wird der Wärmestrom durch die Platte $\varkappa_i \frac{\delta T}{\delta}$ gleich J sein, also ist $\delta T = \frac{\delta}{\varkappa_i} J$, und unsere Formel wird endgültig

$$\Re_{\text{Platte}} = \frac{14{,}72}{n+5} \frac{\delta}{\varkappa_i} J \frac{p l^2}{T}.$$

Wir wollen die gefundene Formel noch kurz in bezug auf Abhängigkeit vom Gasdruck und Intensität der Bestrahlung, von der Natur des Gases und in bezug auf die Kraftrichtung diskutieren. Was die Abhängigkeit vom Gasdruck betrifft, so ist die Radiometerkraft einfach umgekehrt proportional dem Gasdruck, in Übereinstimmung mit allen Beobachtungen an Plattenradiometern. Die Abhängigkeit von der Intensität der Bestrahlung ist durch direkte Proportionalität gegeben, im Einklang mit dem wichtigen Experiment von W. Gerlach und E. Madelung*. Die Abhängigkeit von der Natur des Gases wird durch den Faktor l^2 dargestellt, da es sich bei den Beobachtungen immer um zweiatomige Gase handelt, und ergibt also Proportionalität mit dem Quadrat der mittleren freien Weglänge, was insbesondere durch kürzlich angestellte Experimente von Irma Bleibaum** erhärtet wurde. Was schließlich die Richtung der Kraft anbelangt, so wird es sich um positive oder negative Radiometerwirkungen handeln, je nachdem δT positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem ob die der Strahlung zugewandte Vorderseite die durchschnittlich wärmere ist oder die von der Strahlung abgewandte Rückseite. Dabei wurde in den obigen Rechnungen vorausgesetzt, daß die Bestrahlung in Richtung der positiven x-Achse erfolgt.

Wien, Institut für theoretische Physik der Universität.

* W. Gerlach und E. Madelung, ZS. f. Phys. **21**, 257, 1924.
** Irma Bleibaum, ebenda **49**, 590, 1928.

Über die Beziehung zwischen der Lösung und der Resolvente der Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichts.

Von **V. Ambarzumian** in Leningrad.

(Eingegangen am 29. September 1928.)

Es wird gezeigt, daß zwischen einer Lösung $\chi(\tau)$ und der Resolvente $\Gamma(\tau, t)$ der Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichts die Beziehung besteht

$$\frac{d\chi(\tau)}{d\tau} = \Gamma(0, \tau).$$

E. Hopf hat bewiesen*, daß die homogene Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichts

$$B(\tau) = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty Ei|\tau - t|\, B(t)\, dt \tag{1}$$

eine nichttriviale Lösung hat. Wir wollen hier zeigen, daß die Hopfsche Lösung in enger Beziehung zur Resolvente des Kerns $Ei|\tau - t|$** steht.

§ 1. Zunächst betrachten wir die inhomogene Integralgleichung

$$Ei\,\tau = \varphi(\tau) - \tfrac{1}{2}\int_0^\infty Ei|\tau - t|\,\varphi(t)\, dt. \tag{2}$$

Wir können beweisen, daß eine Lösung von (2) in der Form

$$\varphi(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\tau) \tag{3}$$

darstellbar ist, wobei

$$a_1(\tau) = Ei\,\tau \tag{4}$$

ist und

$$a_{i+1}(\tau) = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty Ei|\tau - t|\, a_i(t)\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{4'}$$

Dabei konvergiert die Reihe (3) gleichmäßig.

In der Tat haben wir

$$a_2(\tau) = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty Ei|\tau - t|\, Ei\, t\, dt = \tfrac{1}{2}\int_0^1 + \tfrac{1}{2}\int_1^\infty = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B,$$

wo

$$A = \int_0^1 \quad \text{und} \quad B = \int_1^\infty$$

---

* Eberhard Hopf, ZS. f. Phys. **46**, 374, 1928; vgl. auch ebenda **49**, 155, 1928.

** Vgl. V. A. Ambarzumian and N. A. Kosirev, Month. Not. **87**, 651, 1927.

gesetzt ist. Es gilt

$$B = \int_1^\infty Ei|\tau - t|\,Eit\,dt < 2\int_1^\infty Ei|\tau - t|\,Ei_2 t\,dt,$$

wo die Bezeichnung

$$Ei_2 t = \int_1^\infty \frac{e^{-ty}}{y^2}\,dy = e^{-t} - tEit$$

eingeführt ist*. Ferner ist

$$A = \int_0^1 Ei|\tau - t|\,Eit\,dt = Ei|\tau - \delta|\int_0^1 Eit\,dt \qquad (0 \leq \delta \leq 1)$$

oder

$$A < \tfrac{3}{2}\,eEi\tau < 3\,eEi_2\tau,$$

wenn $\tau > 2$ ist**.

Da aber A eine stetige Funktion von τ ist und $Ei_2\tau$ im Intervall $0 \leqq \tau \leqq 2$ stets > 0 und auch stetig ist, so können wir solche M wählen, daß

$$\int_0^1 Ei|\tau - t|\,Eit\,dt < MEi_2\tau$$

wird. Folglich ist

$$a_2(\tau) = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty Ei|\tau - t|\,Eit\,dt < \int_1^\infty Ei|\tau - t|\,Ei_2 t\,dt + MEi_2\tau$$

$$< \int_0^\infty Ei|\tau - t|\,Ei_2 t\,dt + MEi_2\tau. \qquad (5)$$

---

* Denn wir haben

$$Ei\tau = \frac{e^{-\tau}}{\tau + \Theta(\tau)}, \quad \text{wo} \quad (0 \leq \Theta < 1)$$

(vgl. Hopf, ZS. f. Phys. **46**, 375, 1928). Es sei $\tau > 1$. Dann wird

$$Ei\tau = \frac{e^{-\tau}}{\tau + \Theta(\tau)} > \frac{1}{2}\frac{e^{-\tau}}{\tau}.$$

Daraus folgt, daß

$$Ei_2\tau = \int_\tau^\infty Eiy\,dy > \frac{1}{2}\int_\tau^\infty \frac{e^{-y}}{y}\,dy > \frac{1}{2}\,Ei\tau$$

oder

$$Ei\tau < 2\,Ei_2\tau, \qquad \text{wenn} \qquad \tau > 1$$

ist.

** In der Tat gilt für $\tau > 2$

$$\frac{Ei|\tau - \delta|}{Ei\tau} = \frac{\dfrac{e^{-\tau+\delta}}{\tau + \Theta(\tau - \delta)}}{\dfrac{e^{-\tau}}{\tau + \Theta(\tau)}} = \frac{e^{\delta}[\tau + \Theta(\tau)]}{\tau + \Theta(\tau - \delta)} \leqq \frac{e^{\delta}[\tau + 1]}{\tau} = e^{\delta}\left(1 + \frac{1}{\tau}\right) \leqq \frac{3}{2}e.$$

Wir definieren nun die Funktionenfolge $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)\ldots$ durch die Relation:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(\tau) &= \tfrac{1}{2} E i_2 \tau, \\ \psi_{n+1}(\tau) &= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty E i\,|\tau - t|\,\psi_n(t)\,dt \qquad (n = 1, 2\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Dann folgt aus (6)

$$a_2(\tau) < 2M\psi_1(\tau) + 4\psi_2(\tau),$$

und mit Berücksichtigung von (6) und (4')

$$a_{n+1}(\tau) < 2M\psi_n(\tau) + 4\psi_{n+1}(\tau). \tag{7}$$

Die Reihe positiver Funktionen $\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i(\tau)$ konvergiert* gleichmäßig, woraus folgt, daß die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty}[2M\psi_i(\tau) + 4\psi_{i+1}(\tau)]$ dieselbe Eigenschaft hat. Dann zeigt die Ungleichung (7), daß auch die Entwicklung $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\tau)$ gleichmäßig konvergiert. Aus**

$$\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i(\tau) = 1$$

schließen wir, daß

$$\varkappa(\tau) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i(\tau) \tag{8}$$

eine beschränkte und stetige Funktion von τ ist. Nun zeigt die unmittelbare Einführung von (3) in (2), daß wir eine Lösung von (2) gefunden haben.

Also können wir die Lösung der Gleichung (2) in der Gestalt

$$\varphi(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\tau) = E i\,\tau + \varkappa(\tau) \tag{9}$$

schreiben.

Bezeichnen wir nun mit $K^{(n)}(\tau, t)$ die zum Kern $E i\,|\tau - t|$ gehörigen iterierten Kerne, so erhalten wir

$$a_i(t) = \frac{1}{2^{n-1}} K^{(n)}(0, t), \tag{10}$$

wenn wir die Definition (4) und (4') von $a_i(t)$ berücksichtigen.

Folglich finden wir, daß

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i-1}} K^{(i)}(0, t) = \Gamma(0, t) \tag{11}$$

---

* V. A. Ambarzumian and N. A. Kosirev, Month. Not. 87, 213, 1927; ZS. f. Phys. 47, 607, 1928.

** U. Wegner, ZS. f. Phys. 45, 826—827, 1927.

ist, wo $\Gamma(\tau, t)$ der lösende Kern oder die Resolvente der Integralgleichung

$$f(\tau) = x(\tau) - \tfrac{1}{2}\int_0^\infty Ei|\tau - t|\, x(t)\, dt \tag{12}$$

ist. Es ist leicht zu sehen, daß

$$\int_0^\infty \varphi(t)\, Ei_2 t\, dt = \sum_{i=1}^\infty \int_0^\infty a_i(t)\, Ei_2 t\, dt = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^{i-1}} \int_0^\infty K(0,t)\, Ei_2 t\, dt$$

$$= 4\sum_{i=2}^\infty \psi_i(0) = 4\left(1 - \psi_i(0)\right) = 2. \tag{13}$$

Dabei kann man die Möglichkeit der gliedweisen Integration ohne Schwierigkeit beweisen.

§ 2. Bringen wir die Gleichung (2) in die Form

$$\varphi(\tau) = Ei\tau + \tfrac{1}{2}\int_0^\tau + \tfrac{1}{2}\int_\tau^\infty = Ei\tau + \tfrac{1}{2}\int_0^\tau Ei\, x\, \varphi(\tau - x)\, dx + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty Ei\, x\, \varphi(\tau + x)\, dx,$$

so erhalten wir durch Integration der einzelnen Summanden

$$\int_0^s \left[Ei\, t + \tfrac{1}{2}\int_0^\tau Ei\, x\, \varphi(\tau - x)\, dx\right] d\tau = \tfrac{1}{2}\int_0^s Ei\, x\, \chi(s - x)\, dx,$$

wo

$$\chi(s) = 2 + \int_0^s \varphi(\tau)\, d\tau \tag{14}$$

und

$$\tfrac{1}{2}\int_0^s d\tau \int_0^\infty Ei\, x\, \varphi(\tau + x)\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty Ei\, x\, \chi(\tau + x)\, dx \Big|_{\tau=0}^{\tau=s}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty Ei\, x\, \chi(s + x)\, dx - \tfrac{1}{2}\int_0^\infty Ei\, x\, \chi(x)\, dx$$

ist. Also ist

$$\chi(s) - 2 + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty Ei\, x\, \chi(x)\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^s Ei\, x\, \chi(s - x)\, dx + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty Ei\, x\, \chi(s + x)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty Ei|s - t|\, \chi(t)\, dt. \tag{15}$$

Aus (13) und (14) folgt

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty Ei\, x\, \chi(x)\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty 2\, Ei\, x\, dx + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty Ei\, x\, dx \int_0^x \varphi(t)\, dt$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \varphi(x)\, Ei_2 x\, dx = 2.$$

Daher geht (15) in

$$\chi(s) = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty Ei|s-t|\,\chi(t)\,dt \tag{16}$$

über, d. h. $\chi(\tau)$ ist eine Lösung der Milneschen Integralgleichung.

Aus $\frac{d\chi}{d\tau} = \varphi(\tau)$ und (10) schließt man, wenn man die Beschränktheit $\varkappa(\tau)$ berücksichtigt, daß $\chi(\tau) < M + N\tau$, wo M und N zwei positive Konstanten sind. Hopf hat nun gezeigt, daß nur eine einzige (bis auf einen konstanten Faktor) solche Lösung der Gleichung (1) existiert. Wir haben also das Resultat: Zwischen der Resolvente der Integralgleichung (12) und der Hopfschen Lösung der Milneschen Integralgleichung besteht die Beziehung

$$\frac{d\chi(\tau)}{d\tau} = \Gamma(0,\tau). \tag{17}$$

Leningrad, 26. September 1928.

Über dielektrische Anisotropie der nematischen Flüssigkeiten im magnetischen Felde.

Von **Mieczysław Jeżewski** in Krakau.

Mit 5 Abbildungen. — (Eingegangen am 9. Oktober 1928.)

Es wurden nach einer verbesserten Resonanzmethode die Messungen der Dielektrizitätskonstante von p-Azoxyanisol und p-Azoxyphenetol in nematischer Phase in Kondensatoren verschiedener Gestalt und Plattenentfernung im magnetischen Felde ausgeführt. Es wird gezeigt, daß man in einem Felde, dessen Kraftlinien senkrecht zu den elektrischen Linien im Kondensator verlaufen, unter gewissen Bedingungen eine Vergrößerung der Dielektrizitätskonstante bekommen kann. Die Tatsache, daß früher im magnetischen Felde immer eine Verkleinerung gefunden wurde, muß man den orientierenden, sich auf beträchtliche Entfernungen ausbreitenden Wirkungen der Wände und dem Einfluß der Randkapazität zuschreiben.

Die von mir vor einigen Jahren ausgeführten Messungen haben gezeigt, daß die Dielektrizitätskonstante (DK) des p-Azoxyanisols und p-Azoxyphenetols in nematischer Phase im magnetischen Felde eine Verkleinerung erfährt *, aber nur dann, wenn die Linien des magnetischen Feldes zu den Linien des elektrischen Feldes parallel, parallel also zu der Normale zu den Belegungen des Kondensators sind (solches Feld wird weiter kurz paralleles Feld genannt). Im magnetischen Felde indessen, dessen Kraftlinien senkrecht zur Normale verlaufen (senkrechtes Feld), konnte man keine Änderung der DK beobachten. Bei späteren Untersuchungen habe ich festgestellt, daß folgende Abhängigkeit der DK von dem Winkel α zwischen den elektrischen und magnetischen Linien vorhanden ist:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_0 \cos^2\alpha + \varepsilon_{90} \sin^2\alpha \text{ **}.$$

Prof. L. S. Ornstein hat in seiner Theorie der nematischen Flüssigkeiten für die Änderung der DK folgende Formel abgeleitet:

$$\Delta\varepsilon_a = \tfrac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot f(H) \cdot (\cos^2\alpha - \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha) \text{ ***},$$

wo $f(H)$ eine Funktion des magnetischen Feldes und α der Winkel zwischen den magnetischen Kraftlinien und der Normale zu den Belegungen des Kondensators ist.

---

* M. Jeżewski, Bull. de l'Acad. Polon. (A) 1923, S. 43. Journ. de phys. et le Radium (6) **5**, 59, 1924. Auch W. Kast, Ann. d. Phys. **73**, 145, 1924.

** M. Jeżewski, ZS. f. Phys. **40**, 159, 1926.

*** L. S. Ornstein, Ann. d. Phys. **74**, 445, 1924. Die angeführte Formel wurde mir freundlichst brieflich mitgeteilt.

Ist die Temperatur und die Intensität des magnetischen Feldes konstant, so erhalten wir:

$$\Delta \varepsilon_\alpha = -K(\cos^2\alpha - \tfrac{1}{3}\sin^2\alpha),$$

wo K eine (positive) Konstante ist.

Aus meiner empirischen Formel folgt:

$$\Delta \varepsilon_\alpha = -K\cos^2\alpha.$$

Das Glied mit $\sin^2\alpha$ ist also bei mir nicht vorhanden. Das bedeutet, daß nach Ornstein für $\alpha = 0$ eine Verkleinerung der DK stattfinden müßte, für $\alpha = 90^0$ eine Vergrößerung, gleich 50 % der Verkleinerung. Meine Messungen haben indessen für $\alpha = 90^0$ den Effekt Null, in anderen Richtungen immer eine Verkleinerung ergeben.

Diese Unstimmigkeit hat Ornstein in folgender Weise erklärt: Die Wände des Kondensators orientieren die Teilchen der Flüssigkeiten so, daß die Achsen der kleinsten DK sich parallel zu den Kondensatorplatten einstellen. Eine Orientierung der Teilchen durch die Wände des Gefäßes ist übrigens aus verschiedenen optischen Beobachtungen bekannt.

Ich habe nunmehr eine Reihe von verschiedenen Messungen unternommen, um zu erforschen: 1. ob eine Vergrößerung der DK unter verschiedenen Bedingungen nicht vorkommt; 2. ob die Ursache des Effektes Null für $\alpha = 90^0$ in der Orientierung der Teilchen durch die Wände liegt, und wie dick die Schichten sind, in welchen eine Einstellung der Teilchen unter der Wirkung der Wände vorkommt.

Die Methode der Messungen war die schon vielmal von mir gebrauchte Resonanzmethode*. Die Apparatur war von neuem hergestellt und verbessert. Mit der Resonanzmethode kann man sehr große Genauigkeit und Unabhängigkeit von äußeren Einflüssen erreichen, man muß nur strengstens dafür sorgen, daß Widerstand, Kapazität und Selbstinduktion im Resonanzkreise ungeändert bleiben. Um das zu erreichen und gleichzeitig die Empfindlichkeit zu steigern, habe ich den ganzen Resonanzkreis aus 4,5 mm starkem Kupferdraht gebaut. Die Dämpfung ist deshalb sehr klein (Gleichstromwiderstand 0,01 Ohm), die Resonanzkurve ist bei sehr loser Kopplung außergewöhnlich scharf. Die Strahlspule L_1 im Röhrengenerator (Fig. 1) und die Empfangsschleife L_2 (21 cm Durchmesser) befinden sich gewöhnlich in einer Entfernung von 65 cm. Die

* M. Jeżewski, Bull. de l'Acad. Polon. (A) 1920, S. 88. Journ. de phys. et le Radium (6) **3**, 293, 1922.

Spule L_3 aus 20 Windungen (Durchmesser 12,5 cm) ist durch tiefe Quecksilbernäpfchen mit dem Schwingungskreis verbunden, um den Kontaktwiderstand zu vermeiden. Die ganze Meßvorrichtung ist mit Ebonitstäbchen am Tisch befestigt. Der veränderliche Kondensator C_1 ist ein Präzisionsdrehkondensator von Spindler & Hoyer in Göttingen (Modell der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt). Die Hauptachse des Kondensators ist verlängert, und auf der Verlängerung ist ein Spiegel befestigt. Zum Ablesen der Kapazität dient eine große halbkreisige Millimeterskale aus Bronzeband von 100 cm Radius. Der Beobachter kann mit Hilfe einer Kurbel K und einer entsprechenden Übertragungsvorrichtung den Kondensator von der Beobachtungsstelle drehen. Am Beobachterplatz sind das Fernrohr F zum Ablesen der Kapazität, das Saitengalvanometer G und das Fernrohr zum Ablesen des Galvanometers, das zu Temperaturmessungen dient, aufgestellt. Die Mikrometerschraube M ermöglicht sehr genaue Einstellung des Kondensators. Ein Okularnonius im Fernrohr F gestattet das Ablesen von 0,1 mm der Skale. Von dem Kondensator C_1 zum Meßkondensator C_2 führen zwei kurze und starre Hartkupferdrähte von 1,5 mm Durchmesser in einer gegenseitigen Entfernung von einigen Millimetern. Sie sind mit Ebonitstäbchen verbunden, um eine Abstandänderung zu verhindern.

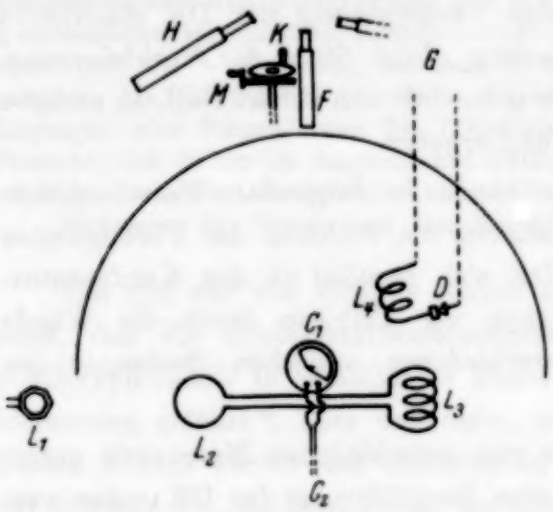


Fig. 1.

Mit der Spule L_3 ist eine Spule L_4 sehr lose gekoppelt (Entfernung $\sim$ 20 cm). In Reihe mit der Spule L_4 ist ein Detektor D und das Saitengalvanometer G geschaltet. Die Einstellung der Saite geschieht momentan und aperiodisch. Die Stabilität und Unempfindlichkeit der so angeordneten Resonanzmethode gegen äußere Einflüsse ist erstaunlich. Die großen Elektromotoren, die im benachbarten Zimmer laufen, die Wechselströme, die in einer Entfernung von 20 cm von dem Meßkondensator fließen (elektrischer Ofen, Elektromotor für Betätigung des Rührers), verursachen keine Störungen des Funktionierens der Methode. Die Abschirmung gegen elektrostatische Einflüsse erwies sich als unnötig.

Ich stelle den Kondensator nicht auf den Resonanzpunkt ein, sondern nehme das Mittel der Kapazitäten von beiden Seiten der Resonanz, bei denen das Saitengalvanometer dieselben Ausschläge aufweist. So bekommt man eine sehr scharfe Einstellung und Unabhängigkeit von dem Leitvermögen der untersuchten Körper*.

Ein Skalenteil der Kondensatorskale ist gleich 0,038 elst. Einh. Der mittlere Fehler der Einstellung beträgt 0,2 Skalenteile, also 0,008 elst. Einh.

Es ist schon erwähnt worden, daß bei früheren Messungen in einem zur Plattennormale parallelen magnetischen Felde p-Azoxyanisol und p-Azoxyphenetol eine Verkleinerung der DK, im senkrechten Felde keine Änderung aufwiesen. Der Abstand zwischen den Platten des Kondensators, in welchem die Messungen ausgeführt worden sind, war 0,7 mm. Ist das Resultat durch die Wirkung der Wände bedingt, wäre zu erwarten, daß bei zunehmender Entfernung der Kondensatorplatten die Wirkung der Wände abnehmen und deshalb der Einfluß des magnetischen Feldes verschieden sein würde. Ich habe deshalb einige Kondensatoren von derselben Gestalt konstruiert, jedoch mit Plattenabständen, die von 0,2 bis 2,5 mm variierten. Im Felde von 3700 Gauß habe ich keine Differenzen bei p-Azoxyanisol und p-Azoxyphenetol gefunden. Im parallelen Felde habe ich fast dieselbe Verkleinerung, im senkrechten Felde keinen Einfluß des Feldes festgestellt. Ich habe sogar im senkrechten Felde bei großem Plattenabstande eine unmerkliche Verkleinerung der Kapazität gefunden. Die Konstruktion der Meßkondensatoren ließ jedoch einen Zweifel entstehen. Eine Belegung eines jeden Kondensators bestand aus einem prismatischen Messinggefäß, als zweite Belegung diente eine Platte *P* (Fig. 2). Die elektrischen Linien zwischen dem Rande der inneren Platte und den Wänden des Gefäßes (in den Teilen *bb*) verlaufen in anderer Richtung als in den Teilen *aa*. Ist die Randkapazität groß genug, so kann die Vergrößerung der Kapazität des Teiles *aa* durch die Verkleinerung der Kapazität des Teiles *bb* kompensiert werden. Die theoretische Formel für den Dreiplattenkondensator zeigt, daß die Randkapazität bis 12 % der ganzen Kapazität betragen kann.

Ich habe in Annäherung die Randkapazität in meinen Kondensatoren vermittels eines Hilfskondensators, der aus drei rechteckigen Platten zusammengesetzt war, bestimmt. Seine Dimensionen kamen den Dimensionen der Meßkondensatoren möglichst nahe. Der Kondensator ist in

---

* M. Jeżewski, Journ. de phys. et le Radium (6) **5**, 59, 1924. ZS. f. Phys. **43**, 448, 1927; **48**, 126, 1928.

Fig. 3 im Querschnitt dargestellt. Zwischen den Rändern der inneren Platte und den Seitenwänden ist ein Spielraum von 1 mm vorhanden. Die innere Platte ist durch Ebonitstückchen von den äußeren Platten isoliert. Die vier Seitenwände mit der oberen und unteren Platte bilden eine prismatische Büchse. Da die Skale der Meßvorrichtung geeicht war, konnte man die Kapazität des Kondensators in elektrostatischen Einheiten bestimmen. Die einfache Formel für einen Dreiplattenkondensator gibt die Kapazität ohne Randkapazität an. Die Differenz zwischen der gemessenen und der berechneten Kapazität gibt die Randkapazität an. Das Resultat ist folgendes: Bei kleiner Plattenentfernung (0,3 mm) beträgt die Randkapazität ungefähr 3 %, bei einer Plattenentfernung von 1,5 mm wächst die Randkapazität bis zu ungefähr 12 % der Gesamtkapazität. Um den Einfluß der beträchtlichen Randkapazität zu beseitigen, habe ich zwei neue Kondensatoren gebaut. Jeder von ihnen bestand aus einem

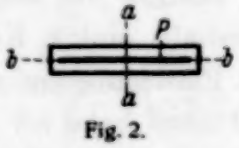


Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

prismatischen Gefäß und einer inneren Platte in der Mitte. Zwischen dem Rande der inneren Platte und dem äußeren Trog befand sich eine entsprechend geschliffene Glasplatte (Fig. 4), so daß die Randkapazität konstant war. In dem ersten Kondensator (*A*) war die Entfernung der Belegungen 2,1 mm, im zweiten (*B*) 4,75 mm. Der Versuch mit p-Azoxyanisol im Kondensator *A* (Temperatur 126° C) ergab tatsächlich eine Vergrößerung der DK im senkrechten Felde. Die Vergrößerung betrug 7,6 % der Verkleinerung im parallelen Felde. Im Kondensator *B* bekam ich auch eine Vergrößerung, die 8,9 % der Verkleinerung im parallelen Felde betrug. Der Versuch mit p-Azoxyphenetol gab in beiden Fällen eine Vergrößerung im senkrechten Felde, die 5 % der Verkleinerung war (Temperatur 147° C).

Die Messungen der Kapazität mit so großem Plattenabstand wie im Kondensator *B* waren nur dank der großen Empfindlichkeit der Methode

möglich. Die Vergrößerung der Kapazität im Kondensator B betrug nur 0,035 elst. Einh. Trotzdem stimmen alle Messungen einer Reihe (ich habe immer jede Messung mehrmals wiederholt) sehr gut überein. Wie aus diesen Ergebnissen zu ersehen ist, nimmt bei zunehmendem Plattenabstande das Verhältnis der Vergrößerung zur Verkleinerung auch zu (für p-Azoxyanisol). Die orientierende Wirkung der Wände ist also wahrscheinlich vorhanden. Um diese Wirkung zu beseitigen, müßte man einen solchen Kondensator bauen, in welchem keine Richtung bevorzugt wäre. Dies wäre ein Kondensator aus zwei Halbkugeln. Leider wäre die Kapazität eines solchen Kondensators zu klein. Um die Wirkung der Wände wenigstens zu vermindern, habe ich einen Kondensator konstruiert, welcher aus zylindrischen Gefäßen bestand. Ich habe sechs Glasröhrchen von 5,7 mm äußerem Durchmesser genommen. Jedes Röhrchen war von zwei Seiten platiniert und verzinnt. Dann wurden die Röhrchen verlötet, wie Fig. 5 zeigt. Auf diese Weise bekam ich einen Kondensator von genügender Kapazität. Mit diesem habe ich die Messungen mit p-Azoxyanisol und p-Azoxyphenetol ausgeführt. Mit p-Azoxyanisol bekam ich eine sehr deutliche Vergrößerung der Kapazität im senkrechten Felde, die 32 % der Verkleinerung im parallelen Felde betrug (Temperatur 129°). Mit p-Azoxyphenetol war die Vergrößerung gleich 12% der Verkleinerung (bei der Temperatur 145°). Da die elektrischen Linien im Kondensator nicht überall parallel sind (an den Rändern der Belegungen und auch in der Nähe der Belegungen verlaufen sie in anderen Richtungen als in der Mitte), kann man nicht feststellen, ob das Ergebnis quantitativ mit der Theorie von Ornstein übereinstimmt. Jedenfalls kann gesagt werden, daß bei abnehmenden orientierenden Wirkungen der Wände die Vergrößerung der DK der nematischen Flüssigkeiten im senkrechten magnetischen Felde zunimmt.

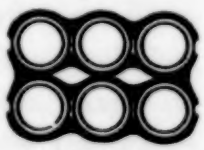


Fig. 5.
Der Kondensator aus Glasröhrchen im Querschnitt.

Zusammenfassung. Es ist durch Messungen festgestellt worden, daß im magnetischen Felde, dessen Kraftlinien parallel zu den elektrischen Linien verlaufen (einen Winkel 0° oder 180° bilden), die DK der nematischen Flüssigkeiten kleiner, in einem Felde, dessen Kraftlinien senkrecht zu den elektrischen Linien sind, größer ist als in Abwesenheit des Feldes. Das Ergebnis ist qualitativ in vollständigem Einklang mit der Theorie von Ornstein. Quantitativ kann man diese augenblicklich nicht prüfen wegen der orientierenden Wirkung der Wände, welche sich auf beträchtliche Entfernungen ausbreiten. Den Effekt Null im senkrechten Felde

in Kondensatoren mit kleinem Plattenabstande (bis ungefähr 0,5 mm) kann man durch die orientierende Wirkung der Wände, in Kondensatoren mit größerer Plattenentfernung durch die Wirkung der Wände und durch eine gleichzeitige kompensierende Wirkung der Randkapazität erklären. Die Ergebnisse zeigen, daß die wechselseitigen Wirkungen der Moleküle des p-Azoxyphenetols größer sind als im p-Azoxyanisol.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn T. Estreicher, Professor an der Universität Krakau, für die Überlassung eines Edelmannschen Elektromagnets meinen besten Dank aussprechen.

Krakau, Physikalisches Institut der Bergakademie.

Über eine experimentelle Prüfung der Kombinationsregeln unter den Bandenspektren.

Von **E. Bengtsson** und **E. Hulthén** in Kopenhagen.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 11. Oktober 1928.)

Im AlH-Spektrum sind zwei Bandensysteme $^1P \to {}^1S$ und $^1S' \to {}^1S$ bekannt. Es wurde ein Kombinationssystem $^1S' \to {}^1P$ gefunden und bei großer Dispersion ausgemessen. Hierdurch lassen sich die von Kronig aufgestellten Kombinationsregeln experimentell prüfen.

§ 1. Die Terme eines Bandensystems lassen sich in zwei nicht kombinierende Teilsysteme einteilen*. Diese Charakteristik liefert einen Ausdruck für die unter den Bandenspektren geltenden Auswahlregeln. Es entsteht aber die Frage, inwieweit diese Einteilung der Bandenterme in zwei nicht kombinierende Systeme auch dort aufrecht zu erhalten ist, wo die Übergänge zwischen drei oder mehreren Elektronentermen bekannt sind. Kronig** hat dies Problem kürzlich in zwei Arbeiten wellenmechanisch gelöst. Werden die empirisch gefundenen Teilsysteme eines der Rotationsterme der Elektronenzustände als gerade und ungerade Terme bezeichnet, so gilt die Regel: es kombinieren nur gerade und ungerade Terme. Diese Regel soll für die Übergänge innerhalb eines Elektronenzustandes (die ultraroten Banden) wie für die Übergänge zwischen verschiedenen Elektronentermen (die optischen Banden) gelten. Anschaulich läßt sich die Regel auch so aussprechen: tragen wir die Übergänge als Kantenlinien eines Vielecks auf, so läßt sich aus einer ungeraden Zahl der Kantenlinien kein solches konstruieren. In den Bandenspektren begegnen wir nun einigen Fällen, wo alle drei Übergänge zwischen drei Elektronentermen realisiert sind (z. B. $S \to P$, $P \to S'$, $S' \to S$), wo also die Elektronenfrequenzen der Summenregel

$$\nu_1 = \nu_2 + \nu_3 \tag{1}$$

gehorchen. Die Regel von Kronig verschärft aber die Bedingungen, indem er fordert, daß die Frequenz einer Bandenlinie immer einen, wenn auch sehr kleinen Kombinationsdefekt gegenüber (1) aufweisen muß. Die Regel wird daher als ein Gegenstück zu der Laporteschen Regel für die Atomspektren bezeichnet.

---

* E. Hulthén, ZS. f. Phys. **46**, 349, 1928.

** R. de L. Kronig, ebenda **46**, 814, 1928; **50**, 347, 1928.

Es ist uns gelungen, einen Fall zu finden, wo sich diese Regel empirisch prüfen läßt. Im Bandenspektrum von AlH (Singulettsystem) kennen wir* die Übergänge zwischen zwei erregten Termen ^1P, $^1S'$ und dem Normalzustand ^1S. Der $^1P \longrightarrow {}^1S$-Übergang entspricht einem violetten ($\nu_0 = 22\,471$), der $^1S' \longrightarrow {}^1S$ einem ultravioletten ($\nu_0 = 44\,597$) Bandensystem. Wesentlich für die Erregung der beiden Systeme ist folgendes**: das $^1P \longrightarrow {}^1S$-System tritt im Lichtbogen von hohem Wasserstoffdruck (800 bis 200 mm Hg) sehr stark hervor, während das ultraviolette $^1S' \longrightarrow {}^1S$-System erst bei niedrigem Druck ($\sim$ 20 mm) erscheint. Die Linien des sichtbaren Systems kehren sich im Bogen großer Stromdichte um und das System tritt auch in Absorption auf***. Die Erregungsbedingungen sowie die Kombinationsbeziehungen der Banden sind daher im Einklang mit dem Niveauschema in Fig. 1. In den Elektronenniveaus

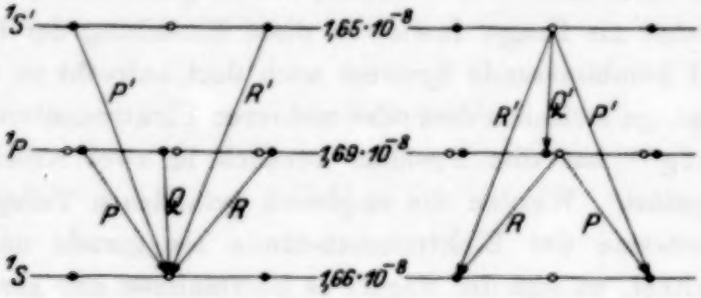


Fig. 1a. Fig. 1b.

sind die Rotationsterme der geraden und der ungeraden Systeme als ● und ○ angegeben, wobei diese so gewählt sind, daß die Übergangspfeile der Kronigschen Regel (● ⟷ ○) gehorchen. Die ^1S-Terme sind abwechselnd aus geraden und ungeraden Rotationstermen aufgebaut, im ^1P-Term tritt die hierfür typische Feinstruktur**** (σ-doubling) auf. Die aus der Bandenanalyse sich ergebenden Kernabstände der Elektronenterme sind in der Fig. 1a rechts angegeben. Es wäre nun das Auftreten eines Kombinationssystems $^1S' \longrightarrow {}^1P$ zu erwarten, dessen Nullage

$$\nu_0 = 44\,597 - 22\,471 = 22\,126\ \mathrm{cm}^{-1} \qquad (1^1)$$

sein sollte. Die Abschattierung ihrer Banden sollte im Gegensatz zu derjenigen des $^1P - {}^1S$-Systems nach Violett verlaufen ($r'' > r'$). Es ist

---

* G. Eriksson und E. Hulthén, ZS. f. Phys. **34**, 775, 1925; E. Bengtsson, ebenda **51**, 889, 1928.

** E. Bengtsson, l. c.

*** E. Hulthén und R. V. Zumstein, Phys. Rev. **28**, 13, 1926.

**** R. S. Mulliken, ebenda **28**, 1202, 1926.

uns gelungen, durch Daueraufnahmen den Q-Zweig der Nullbande ($n'' = n' = 0$) mit der großen Konkavgitteraufstellung (Dispersion 2,4 Å/mm) im hiesigen Institut zu photographieren.

§ 2. Die zur Prüfung nötigen Beobachtungen aller drei Bandensysteme sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Wegen der Schwierigkeit, genaue Messungen in dem im fernen Ultraviolett liegenden $^1S' \longrightarrow {}^1S$-System auszuführen, wollen wir zuerst die Genauigkeit dieser abschätzen. Wie aus Fig. 1 b erhellt, läßt sich folgende Relation zwischen den $R'P'$-Serien des $^1S' \longrightarrow {}^1S$ und den RP-Serien des $^1P \longrightarrow {}^1S$-Systems aufstellen:

$$R'(j-1) - R(j-1) = P'(j+1) - P(j+1). \qquad (2)$$

Diese Differenzen sind im zweiten Teile der Tabelle mitgeteilt und bilden einen Ausdruck für die Meßgenauigkeit im ultravioletten System.

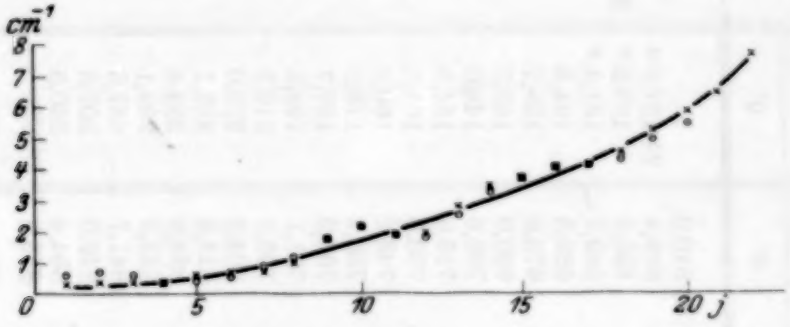


Fig. 2.
○ $\sigma(j) + \sigma(j+1)$ aus Tabelle 1.
× $\sigma(j) + \sigma(j+1)$ aus Beziehung (3).

Die Abweichung zwischen ihren Mittelwerten (M Tabelle 1) und den beobachteten Q'-Frequenzen des Kombinationssystems liefern uns dann die „σ-doubling" — in der Tabelle mit $\sigma(j)$ bezeichnet — des ^1P-Terms.

Daß es sich hier wirklich um die σ-doubling handelt, läßt sich folgenderweise kontrollieren. Aus den Kombinationen innerhalb des $^1P \longrightarrow {}^1S$-Systems (Fig. 1 a) folgt, daß

$$[R(j) - Q(j)] - [Q(j+1) - P(j+1)] = \sigma(j) + \sigma(j+1) \qquad (3)$$

sein muß. In Fig. 2 sind die $\sigma(j) + \sigma(j+1)$ der Tabelle 1 graphisch mit der obigen Beziehung (3) verglichen. Die Übereinstimmung beider ist überzeugend und somit ist auch die Kronigsche Kombinationsregel in diesem Falle experimentell bestätigt.

Während die σ-doubling im Dublettspektrum (z. B. HgH) einen mit j linearen Verlauf aufweist, zeigt das Singulettspektrum von AlH eine deutliche parabolische Form. Es ist bemerkenswert, daß diese Tatsachen sich

Tabelle 1.

j	$^1P \rightarrow {}^1S$			$^1S' \rightarrow {}^1S$		$^1S' \rightarrow {}^1P$	$P' - P$	$R' - R$	M	$\sigma(j)$
	P	Q	R	P'	R'	Q'				
0	—	—	23 483,1	—	44 610,0	—	—	21 126,9	—	—
1	—	23 470,3	494,5	44 584,2	623,4	21 127,7 *	—	128,9	21 127,0	0,7 *
2	23 445,2	469,1	505,3	572,3	636,3	129,2 *	21 127,1	131,0	128,85	0,35 *
3	431,5	467,4	515,6	560,3	649,7	131,4 *	128,8	134,1	131,0	0,4 *
4	417,2	465,0	525,2	548,2	663,3	134,3	131,0	138,1	134,05	0,25
5	402,7	462,1	534,1	536,7	676,6	138,2	134,0	142,5	138,0	0,2
6	387,1	458,5	542,3	525,0	690,0	142,7	137,9	147,7	142,65	0,05
7	370,9	454,1	549,5	513,7	703,6	148,0	142,8	154,1	147,7	0,3
8	354,3	449,0	556,2	502,0	716,8	154,3	147,7	160,6	153,7	0,6
9	337,0	443,1	561,8	490,1 *	730,0	161,2	153,1 *	168,2	160,5	0,7
10	319,2	436,1	566,3	479,6	743,2	169,2	160,4	176,9	168,1	1,1
11	300,5	428,5	569,3	468,5	756,2	178,0	168,0	186,9	176,85	1,15
12	280,9	419,7	571,4	457,7	768,9	187,7	176,8	197,5	186,8	0,9
13	260,1	409,7	572,4	446,8	781,1	198,3	186,7	208,7	197,3	1,0
14	238,5	398,4	571,8	435,6	793,1	210,2	197,1	221,4	208,7	1,5
15	215,8	385,7	569,3	424,5	804,2	223,0	208,7	234,9	221,3	1,7
16	191,7	371,6	564,7	412,9	814,8	237,1	221,2	250,1	235,15	1,95
17	166,3	355,3	558,0	401,5	824,9	252,4	235,2	266,9	250,25	2,15
18	139,0	337,5	548,8	389,4	833,7	269,1	250,4	284,9	266,95	2,15
19	110,0	316,7	536,9	377,0	841,7	287,6	267,0	304,8	285,15	2,45
20	078,6	293,5	521,2	364,0	849,0	307,8	285,4	327,8	304,95	2,85
21	044,7	266,6	501,3	349,8	854,4	330,5	305,1	353,1	327,85	2,65
22	007,6	235,8	476,0	335,5	858,0	—	327,9	382,0	—	—
23	22 967,6 *	200,0	—	320,0	—	—	352,4 *	—	—	—

* Unsicher.

auch in voller Übereinstimmung mit den von Kronig* und Hill und van Vleck** hierfür gegebenen theoretischen Ausdrücken befinden.

Herrn Professor Niels Bohr schulden wir unseren aufrichtigen Dank für seine Förderung unserer Arbeit.

Für das Entgegenkommen, uns einen Vakuumlichtbogen zur Verfügung zu stellen, sagen wir Herrn Professor M. Siegbahn in Upsala herzlichen Dank.

Kopenhagen, Universitetets Institut for teoretisk Fysik, Okt. 1928.

---

* R. de L. Kronig, ZS. f. Phys. **50**, 347, 1928.

** E. L. Hill und J. H. van Vleck, Phys. Rev. **32**, 250, 1928.

Fortpflanzung des Lichtes durch fremde Kraftfelder. III.

Von **Felix Joachim von Wiśniewski** in Łazin (Polen).

(Eingegangen am 5. Oktober 1928.)

Es wird hier die Wellengleichung des Lichtes, welches sich durch ein Gravitationsfeld fortpflanzt, unter der Annahme eines nichteuklidischen Raumes berechnet.

I. In den früher unter demselben Titel veröffentlichten Artikeln sind die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes einer Lichtwelle, welche sich durch ein Gravitationsfeld fortpflanzt, unter der Annahme aufgestellt worden, daß der Raum euklidischen Charakter hat.

Hier werden sie dagegen für den Fall, daß der Raum einen nichteuklidischen Charakter hat, entwickelt.

Zur Vereinfachung wird angenommen, daß zwischen den Komponenten $g_{\mu,\nu}$ des Fundamentaltensors eines dreidimensionalen Raumes nur die Komponenten g_{11}, g_{22}, g_{33} von Null verschieden sind, während:

$$g_{\mu,\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu$$

ist. Das Quadrat des Linienelements ds eines dreidimensionalen nichteuklidischen Raumes lautet unter diesen Annahmen

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + g_{22}\,dx_2^2 + g_{33}\,dx_3^2.$$

Als Ausgangspunkt werden die Feldgleichungen einer Lichtwelle im euklidischen Raume genommen. Unter Beibehaltung derselben Bezeichnungen wie früher, lassen sie sich schreiben:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{rot} H + \frac{2\pi i \nu \Phi}{c}\frac{}{c^2}\cdot E,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = -\operatorname{rot} E + \frac{2\pi i \nu \Phi}{c}\frac{}{c^2}\cdot H.$$

Da

$$E = E_0\, e^{2\pi i \nu t}; \quad H = H_0\, e^{2\pi i \nu t}$$

ist, so lassen sich diese Gleichungen weiter in folgender Gestalt schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c}\left(1-\frac{\Phi}{c^2}\right)\frac{\partial E}{\partial t} &= \operatorname{rot} H, \\ \frac{1}{c}\left(1-\frac{\Phi}{c^2}\right)\frac{\partial H}{\partial t} &= -\operatorname{rot} E, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

wo $c\left(1-\frac{\Phi}{c^2}\right)$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle im Gravitationsfelde bezeichnet.

Da nach A. Einstein dieselbe Geschwindigkeit unter der Annahme des euklidischen Charakters des Raumes gleich:

$$c\sqrt{g_{44}}$$

ist, so folgt, daß:

$$g_{44} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right)^2}.$$

Die Feldgleichungen (α) nehmen dann folgende Gestalt an:

$$\sqrt{g^{44}} \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = \text{rot}\, H \qquad \sqrt{g^{44}} \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = \text{rot}\, E.$$

Um die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes einer Lichtwelle im nichteuklidischen Raume zu erhalten, wird nach A. Einstein angenommen, daß in der unmittelbaren Umgebung jedes Punktes des dreidimensionalen nichteuklidischen Raumes ein lokales euklidisches Koordinatensystem X, Y, Z gilt, so daß der Abstand zweier einander unendlich nahe liegender Punkte eines nichteuklidischen Raumes durch den Ausdruck:

$$ds = \sqrt{dX_1^2 + dY_2^2 + dZ_3^2}$$

gegeben ist. Das elektromagnetische Feld ist in diesem lokalen Koordinatensystem durch die Gleichungen (α) beschrieben.

Wenn man dasselbe Feld in dem für den endlichen Raum gültigen Koordinatensystem x_1, x_2, x_3 beschreiben will, in welchem das Linienelement ds durch den Ausdruck:

$$\sqrt{g_{11}\, dx_1^2 + g_{22}\, dx_2^2 + g_{33}\, dx_3^2}$$

gegeben ist, so kommt man zum Ziele, wenn man die Koordinaten x_1, x_2, x_3 als krummlinige orthogonale Koordinaten betrachtet. In diese krummlinigen Koordinaten umgeschrieben, lauten die Feldgleichungen (α) wie folgt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{g^{22} g^{33}} \cdot \left(\frac{\partial \sqrt{g_{33}} E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \sqrt{g_{22}} E_2}{\partial x_3}\right) &= -i \cdot \sqrt{g^{44} g^{11}} \cdot \frac{\partial \sqrt{g_{11}} H_1}{\partial x_4}, \\
\sqrt{g^{33} g^{11}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{11}} E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \sqrt{g_{33}} E_3}{\partial x_1}\right) &= -i \cdot \sqrt{g^{44} g^{22}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}} H_2}{\partial x_4}, \qquad (\gamma_1) \\
\sqrt{g^{11} g^{22}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{22}} E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \sqrt{g_{11}} E_1}{\partial x_2}\right) &= -i \cdot \sqrt{g^{44} g^{33}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}} H_3}{\partial x_4}, \\
\sqrt{g^{22} g^{33}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{33}} H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \sqrt{g_{22}} H_2}{\partial x_3}\right) &= i \cdot \sqrt{g^{44} g^{11}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}} E_1}{\partial x_4}, \\
\sqrt{g^{33} g^{11}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{11}} H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \sqrt{g_{33}} H_3}{\partial x_1}\right) &= i \sqrt{g^{44} g^{22}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}} E_2}{\partial x_4}, \qquad (\gamma_2) \\
\sqrt{g^{11} g^{22}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{22}} H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \sqrt{g_{11}} H_1}{\partial x_2}\right) &= i \cdot \sqrt{g^{44} g^{33}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}} E_3}{\partial x_4}.
\end{aligned}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind aus den entsprechenden Termen von (β) durch Einführung von:

$$x_4 = i.t.c$$

und Multiplikation mit:

$$\sqrt{g^{\alpha\alpha}}\sqrt{g_{\alpha\alpha}} = 1 \text{ *}. \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

erhalten.

Die Gleichungen (γ_1) und (γ_2) lassen sich einfacher schreiben, wenn man zwei antisymmetrische kovariante Tensoren $e_{\mu\nu}$ und $h_{\mu\nu}$ einführt.

Die Ausdrücke von $e_{\mu\nu}$ und $h_{\mu\nu}$ sind:

$$e_{\mu\nu} = \frac{\partial \sqrt{g_{\nu\nu}} E_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \sqrt{g_{\mu\mu}} E_\mu}{\partial x_\nu},$$

$$h_{\mu\nu} = \frac{\partial \sqrt{g_{\nu\nu}} H_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \sqrt{g_{\mu\mu}} H_\mu}{\partial x_\nu},$$

wo für E_4 und H_4 Null zu setzen ist.

Durch Einführung dieser Tensoren in (γ_1) und (γ_2) lassen sich die Gleichungen in folgender einfacher Gestalt schreiben:

$$\sqrt{g^{22}g^{33}}\, e_{23} = i\sqrt{g^{44}g^{11}}\, h_{14}; \qquad \sqrt{g^{22}g^{33}}\, h_{23} = i\sqrt{g^{44}g^{11}}\, e_{41}, \qquad (\delta_1)$$

$$\sqrt{g^{33}g^{11}}\, e_{31} = i\sqrt{g^{44}g^{22}}\, h_{24}; \qquad \sqrt{g^{33}g^{11}}\, h_{31} = i\sqrt{g^{44}g^{22}}\, e_{42}, \qquad (\delta_2)$$

$$\sqrt{g^{11}g^{22}}\, e_{12} = i\sqrt{g^{44}g^{33}}\, h_{34}; \qquad \sqrt{g^{11}g^{22}}\, h_{12} = i\sqrt{g^{44}g^{33}}\, e_{43}.$$

Die kovarianten Tensoren $e_{\mu\nu}$ und $h_{\mu\nu}$ erfüllen, wie leicht zu prüfen ist, die Gleichungen:

$$\frac{\partial e_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial e_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial e_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = 0, \qquad (\eta_1)$$

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial h_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial h_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = 0. \qquad (\eta_2)$$

Aus den Gleichungen (δ_1), (η_1) und (δ_2), (η_2) erhält man folgende zwei Relationen:

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\{\sqrt{g}\, g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} e_{\mu\nu}\} = 0, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \quad (J_1)$$

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\{\sqrt{g}\, g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} h_{\mu\nu}\} = 0. \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \quad (J_2)$$

Jede dieser Gleichungen besagt, daß die Divergenz eines kovarianten antisymmetrischen Tensors zweiten Grades Null ist. Die Gleichungen (J_1) und (J_2) sind kovariant gegenüber jeder orthogonalen Transformation im vierdimensionalen Raume.

Wie leicht zu sehen ist, gehen diese Gleichungen, wenn

$$g^{\mu\mu} = g_{\mu\mu} = 1$$

---

* $q^{\alpha\alpha}$ und $g_{\alpha\alpha}$ sind von $x_4 = ict$ unabhängig.

gesetzt wird, in die bekannte Wellengleichung im euklidischen Raume über, wenn man noch die in diesem Falle erfüllten Relationen

$$\operatorname{div} E = 0; \qquad \operatorname{div} H = 0$$

berücksichtigt.

Man kann also die Gleichungen (J_1) und (J_2) als Wellengleichungen interpretieren.

Es wird jetzt gezeigt, daß im Falle statischer Gravitationsfelder die Gleichungen (J_1) und (J_2) denselben Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Gravitationsfelde ergeben, welcher von A. Einstein auf Grund seiner Gravitationstheorie abgeleitet wurde.

Nach Einsetzen der Ausdrücke von $e_{\mu\nu}$ und $h_{\mu\nu}$ in (J_1) und (J_2) schreiben sich die letzten Gleichungen wie folgt:

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\sqrt{g}\, g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} \frac{\partial \sqrt{g_{\nu\nu}}\, E_\nu}{\partial x_\mu}\right\} = \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\sqrt{g}\, g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} \frac{\partial \sqrt{g_{\mu\mu}}\, E_\mu}{\partial x_\nu}\right\}, \qquad J_1\,(a)$$

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\sqrt{g}\, g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} \frac{\partial \sqrt{g_{\nu\nu}}\, H_\nu}{\partial x_\mu}\right\} = \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\sqrt{g}\, g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} \frac{\partial \sqrt{g_{\mu\mu}}\, H_\mu}{\partial x_\nu}\right\}, \qquad J_2\,(a)$$

wo $E_4 = H_4 = 0$ zu setzen ist.

Wenn man weiter annimmt, daß das Gravitationsfeld als nahezu konstant angesehen werden kann, und die Einsteinsche* Lösung seiner Gravitationsgleichungen einführt, gemäß welcher:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33}; \quad \text{und} \quad g_{44} \neq g_{ii} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3$$

ist, so folgen aus J_1 (a) und J_2 (a) die gesuchten beiden Wellengleichungen:

$$g^{11}\frac{\partial^2 E_\nu}{\partial x_1^2} + g^{22}\frac{\partial^2 E_\nu}{\partial x_2^2} + g^{33}\frac{\partial^2 E_\nu}{\partial x_3^2} + g^{44}\frac{\partial^2 E_\nu}{\partial x_4^2} = 0, \qquad J_1\,(b)$$

$$g^{11}\frac{\partial^2 H_\nu}{\partial x_1^2} + g^{22}\frac{\partial^2 H_\nu}{\partial x_2^2} + g^{33}\frac{\partial^2 H_\nu}{\partial x_3^2} + g^{44}\frac{\partial^2 H_\nu}{\partial x_4^2} = 0, \qquad J_2\,(b)$$

denn in einem quasikonstanten statischen Gravitationsfelde ist

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = 0^{**}, \qquad \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} = 0.$$

---

* A. Einstein, Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie, 1922.

** In den lokalen Koordinaten X, Y, Z ausgedrückt, lautet die Relation $\operatorname{div} E = 0$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} = 0.$$

Wenn man statt dieser lokalen Koordinaten die krummlinigen orthogonalen Koordinaten x_1, x_2, x_3 einführt, so wird die Relation $\operatorname{div} E = 0$ in diesen Koordinaten umgeschrieben:

$$\sqrt{g^{11} g^{22} g^{33}}\left\{\frac{\partial \sqrt{g_{22} g_{33}}\, E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sqrt{g_{11} g_{33}}\, E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \sqrt{g_{11} g_{22}}\, E_3}{\partial x_3}\right\} = 0.$$

Aus den Gleichungen J_1 (b) und J_2 (b) folgt für die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_g einer Welle im Gravitationsfeld:

$$c_g = c\sqrt{\frac{g^{11}}{g^{44}}} = c\sqrt{\frac{g_{44}}{g_{11}}}$$

in völliger Übereinstimmung mit dem von Einstein gegebenen Werte.

Da nach Einstein

$$\frac{g_{44}}{g_{11}} = 1 + 2\frac{\Phi}{c^2}$$

und nach dem früher Gesagten

$$g_{44} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right)^2},$$

so folgt

$$g_{ii} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)^2}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Die elektromagnetischen Feldgleichungen im statischen und nahezu konstanten Gravitationsfeld lauten dann:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)\operatorname{rot} H + \frac{2\pi i\nu}{c}\frac{\Phi}{c^2}E,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = -\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)\operatorname{rot} E + \frac{2\pi i\nu}{c}\frac{\Phi}{c^2}\cdot H.$$

Die Feldgleichungen sind richtig für elektromagnetische Störungen kleiner Wellenlänge, nicht aber für solche, deren Wellenlängen so groß sind, daß Φ nicht als quasikonstant angesehen werden kann.

Wenn man außer dem Gravitationsfeld noch die Wellen fremder, elektrischer und magnetischer Felder berücksichtigen will, so nehmen die Feldgleichungen einer Lichtwelle folgende Gestalt an:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)\operatorname{rot} H + \frac{2\pi i}{hc}\left(\frac{h\nu}{c^2}\Phi + U_e\right)E,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = -\left(1 + \frac{\Phi}{c}\right)\operatorname{rot} E + \frac{2\pi i}{he}\left(\frac{h\nu}{c^2}\Phi + U_m\right)H.$$

U_e ist die potentielle Energie des Lichtquants elektrischen Ursprungs und U_m die potentielle Energie des Lichtquants magnetischen Ursprungs.

Sind die g_{11} nahezu konstant, so reduziert sich die obenstehende Relation wegen der gegenseitigen Gleichheit von $g_{11}g_{22}$ und g_{33} auf

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = 0,$$

was zu beweisen war. Ähnliches gilt, wenn man E durch H ersetzt.

II. Die Wellengleichungen J_1(b) und J_2(b), welche für den Fall nahezu konstanter und statischer Gravitationsfelder richtig sein sollen, lassen sich leicht formal aus dem Ausdruck des Quadrats des Linienelements ds im vierdimensionalen Raume ableiten.

Aus dem Ausdruck

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 + g_{44}dx_4^2$$

wird durch Division mit dt und Multiplikation mit einer Größe m folgende Relation erhalten:

$$m\frac{ds^2}{dt^2} = mg_{11}\dot{x}_1^2 + mg_{22}\dot{x}_2^2 + mg_{33}\dot{x}_3^2 + mg_{44}\dot{x}_4^2. \qquad \text{(a)}$$

Wenn man $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$, $\dot{x}_4$ aus (a) mittels der Relationen

$$p_1 = mg_{11}\dot{x}_1, \quad p_2 = mg_{22}\dot{x}_2, \quad p_3 = mg_{33}\dot{x}_3, \quad p_4 = mg_{44}\dot{x}_4$$

eliminiert, so ergibt sich:

$$m\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{g^{11}}{m}p_1^2 + \frac{g^{22}}{m}p_2^2 + \frac{g^{33}}{m}p_3^2 + \frac{g^{44}}{m}p_4^2. \qquad \text{(b)}$$

Die Größen p_i haben die Dimensionen der Impulse einer Masse m.

Wenn man jetzt die Impulse p_i durch die Operatoren $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_i}$ ersetzt, so folgt aus (b):

$$m^2\frac{ds^2}{dt^2} = -\frac{h^2}{4\pi^2}\left\{g^{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + g^{22}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + g^{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + g^{44}\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\right\}. \qquad \text{(c)}$$

Durch Multiplikation dieses Operators mit einer Funktion σ folgt die gesuchte Wellengleichung:

$$g^{11}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1^2} + g^{22}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_2^2} + g^{33}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_3^2} + g^{44}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_4^2} + \frac{4\pi^2}{h^2}m^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\cdot\sigma = 0. \qquad \text{(d)}$$

Da die Lichtfortpflanzung durch:

$$ds^2 = 0$$

charakterisiert ist, so wird durch Einführung dieses Wertes von ds in (d) die Gleichung der Lichtwelle gefunden.

Man erhält dann nämlich die Gleichung

$$g^{11}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1^2} + g^{22}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_2^2} + g^{33}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_3^2} + g^{44}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_4^2} = 0, \qquad \text{(e)}$$

welche mit den Gleichungen J_1(b) und J_2(b) übereinstimmt.

Wenn man es nicht mit Lichtwellen, sondern mit anderen Materiewellen zu tun hat, so ist

$$ds^2 \neq 0$$

und die Gleichung (d) enthält einen unbekannten Term.

Insbesondere läßt sich, wenn:

$$(g_{11}\dot{x}_1^2 + g_{22}\dot{x}_2^2 + g_{33}\dot{x}_3^2)$$

klein gegen

$$g_{44}\dot{x}_4^2$$

ist, der unbekante Term definieren, denn dann kann man mit einiger Annäherung

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -g_{44}c^2$$

setzen.

Die Gleichung der Materiewelle lautet dann:

$$g^{11}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1^2} + g^{22}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_2^2} + g^{33}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_3^2} + g^{44}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_4^2} - \frac{4\pi^2}{h^2}m^2c_g^2 = 0, \qquad \text{(f)}$$

wo

$$c_g = c\cdot\sqrt{g_{44}}$$

gesetzt ist.

Wenn man in (f)

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1; \quad c_g = c; \quad g^{44} = \left(1 - \frac{F}{h\nu}\right)^2 \qquad \text{(g)}$$

einsetzt, wo F die potentielle Energie ist, so folgt aus (f) die bekannte de Broglie-Schrödingersche Wellengleichung:

$$\left(\frac{1 - \frac{F}{h\nu}}{c}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} - \Delta\sigma + \frac{4\pi^2}{h^2}m^2c^2 = 0. \qquad \text{(h)}$$

Aus dem oben Gesagten ergibt sich, daß diese Gleichung nur für kleine Geschwindigkeiten richtig ist.

Nähert sich die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes der Lichtgeschwindigkeit, so muß die Wellengleichung (h) durch die Wellengleichung

$$\left(\frac{1 - \frac{F}{h\nu}}{c}\right)^2 \frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} - \Delta\sigma = 0 \qquad \text{(k)}$$

ersetzt werden.

Die Gleichungen (h) und (k) haben angenäherte Gültigkeit für extreme Fälle, erstens wenn die Geschwindigkeit der Materie kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist, zweitens wenn die Geschwindigkeit der Materie sich der Lichtgeschwindigkeit nähert.

Für Geschwindigkeiten, welche zwischen diesen Grenzen liegen, ist die Wellengleichung nicht bestimmt, da $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ selbst nicht angenähert bekannt ist.

Da die Wellengleichungen (h) und (k) Näherungscharakter haben, so werden auch die diesen Wellengleichungen entsprechenden mechanischen Gleichungen denselben Charakter haben.

Über die optische Abbildung von Nichtselbstleuchtern.

Bemerkungen zur Arbeit von Herrn Siedentopf.

Von **H. Boas** in Berlin.

(Eingegangen am 7. Oktober 1928.)

Es wird gezeigt, daß ein Unterschied im Auflösungsvermögen von Diatomeen bei ihrer Beleuchtung innerhalb oder außerhalb der Apertur des benutzten Mikroskopobjektivs nicht besteht. Die abweichenden Beobachtungen des Herrn Siedentopf werden damit erklärt, daß er bei seinen Untersuchungen keine äquivalenten Strahlenbündel zur Beleuchtung angewandt hat. Es wird eine Methode beschrieben, um Diatomeen in Jodsilber einzulegen, wodurch die Sichtbarkeit ihrer Oberflächenzeichnung erheblich zunimmt. Diatomeen, die auf diese Weise hergestellt sind, zeigen gleiche Auflösung bei durchfallendem Lichte innerhalb wie außerhalb der Objektivapertur, so wie bei auffallendem Lichte.

Einige Forscher haben beobachtet, daß das Auflösungsvermögen für feinste Strukturen bei Hellfeld- und bei Dunkelfeldbeleuchtung unter dem Mikroskop das gleiche ist. Daraus haben sie den Schluß gezogen, daß die Abbesche Theorie der Abbildung nicht richtig sei. Herr Siedentopf hat in der Arbeit unter dem obenstehenden Titel* eine Entgegnung veröffentlicht, in welcher er den Nachweis zu bringen sucht, daß die Angaben der anderen Forscher nicht richtig seien, daß tatsächlich das Auflösungsvermögen eines Mikroskops im Hellfeld größer sei als im Dunkelfeld und daß andere Beobachtungen auf einen Irrtum zurückzuführen seien. Die Richtigkeit seiner Versuche belegt er mit sehr schönen Photographien, die mit neuen Einrichtungen der Firma Zeiss aufgenommen sind.

Nach Angabe von Herrn Siedentopf soll unter der Voraussetzung einer Wellenlänge des Lichtes von 475 mμ, einer Apertur des Beobachtungsobjektivs von 1,3 und einer Belichtungsapertur des Beleuchtungsapparats von 1,43 die Grenze der Sichtbarkeit im Dunkelfeld bei 0,348 μ, im Hellfeld für dasselbe Objektiv dagegen bei 0,183 μ zu liegen. Er sagt nun, da eine bestimmte, als Objektiv vielfach benutzte Diatomee, und zwar die Amphipleura pellucida, einen Abstand der Gitterleisten zwischen 0,25 und 0,28 μ hat, sei sie ein bequemes Mittel, die Streitfrage versuchsmäßig nach der einen oder anderen Richtung zu entscheiden.

Ich habe nicht die Absicht, mich für ein Für oder Wider der Abbeschen Theorie zu erklären, meine Absicht geht lediglich dahin, die Angaben

* H. Siedentopf, ZS. f. Phys. **50**, 297, 1928, Nr. 5/6.

von Herrn Siedentopf nachzuprüfen und festzustellen, ob er auf Grund seiner Versuche ein Recht hat, eine Entscheidung in der strittigen Angelegenheit zu treffen. Ich werde infolgedessen kurz auf die Erörterung von Herrn Siedentopf eingehen und dann meine eigenen Ansichten und Versuche vortragen. Leider bin ich nicht in der Lage, die beobachteten Erscheinungen in schönen Mikrophotogrammen festzulegen, ich muß es vielmehr dem Leser, der über die nötigen mikroskopischen Geräte verfügt, überlassen, die Richtigkeit dessen, was ich anführen werde, festzustellen.

Zu den folgenden Untersuchungen habe ich mich folgender optischen Geräte bedient:

1. eines Fluoritsystems von Winkel von 1,8 mm Brennweite und der numerischen Apertur 1,30;

2. eines Zeiss-Apochromaten, Brennweite 2 mm, Apertur 1,40;

3. verschiedener Beleuchtungskondensoren für den Abbeschen Beleuchtungsapparat von 1,30 bis 1,40 Apertur;

4. des auch von Herrn Siedentopf benutzten Leuchtbildkondensors von Zeiss;

5. einer Einrichtung, die ich mir behelfsweise hergestellt hatte;

6. eines Vertikalilluminators nach Beck.

An Präparaten standen mir zur Verfügung erstens einige Testpräparate von Möller, in denen die Diatomeen teils in Styrax, teils in Jodkalium-Quecksilberjodid eingelegt waren, und Präparate, die ich selbst hergestellt habe nach einem Verfahren, das ich unten noch näher beschreiben werde, bei dem die Diatomeen in Jodsilber liegen. Wir werden späterhin sehen, daß es offenbar außerordentlich auf die Art des Einschlußmittels der Diatomeen ankommt. Herr Siedentopf gibt leider über die Art seines Präparats weiter nichts an, als daß es von der Firma Beck, London, bezogen worden war.

Die Präparate von Möller. Diese Präparate sind, so schön sie sonst auch hergestellt sein mögen, doch mit einem Fehler behaftet, der gerade für Untersuchungen, bei denen man das Äußerste erreichen will, von erheblichem Einfluß werden kann. Die Präparate von dort sind in der Weise hergestellt, daß die Kieselpanzer der Diatomeen in einer ganz schwachen Kollodiumlösung aufgeschwemmt sind. Von dieser Lösung wird ein Tröpfchen auf das Deckglas gebracht, man läßt antrocknen und setzt das Einbettungsmittel zu. Danach werden die Präparate in der üblichen Weise mit einem Lackring abgeschlossen. Die Präparate mit dem flüssigen Kalium-Quecksilberjodid halten sich nicht sehr gut, weil der Lackring doch wohl nicht dicht genug abschließt.

Ehe ich auf die Unzuträglichkeiten dieser Präparationsmethode eingehe, muß ich einiges über die Diatomeen selbst sagen. Diese wirklichen Meisterwerke der Natur bilden bekanntlich im Leben die Gehäuse für Algen. Es sind Schalen aus Kieselsäurehydrat, die ungefähr wie die Schalen einer Auster aneinanderliegen. Zwischen sich schließen sie die Alge ein, die mit Bewegungsorganen stellenweise nach außen vorragt. Sie entstehen wahrscheinlich durch Zellenausscheidungen, so wie die Blätter der Gramineen an ihren Kanten mit Haaren aus Kieselsäure versehen sind, an denen sich wohl schon mancher der Leser in die Hände geschnitten haben wird. Die Oberflächen dieser Kieselpanzer sind nun in einer geradezu erstaunlichen Weise moduliert, teils mit erhöhten Leisten, teils mit eckig geformten Blöckchen besetzt. Manche tragen zwischen stärkeren Leisten feine Querleistchen, so daß sie ein außerordentlich abwechslungsreiches und anziehendes Bild unter dem Mikroskop abgeben.

Als Prüfobjekte werden seit alters besonders folgende drei Arten benutzt:

Erstens für alle Trockensysteme bis zu numerischen Aperturen von 1 gewöhnlich Pleurosigma angulatum. Diese Diatomee kann, wenn man sich auf die Betrachtung mit Trockensystemen beschränkt, trocken zwischen Objektträger und Deckglas eingelegt sein. Da der Brechungsexponent der Kieselsäure etwa 1,5 ist, so besteht also auch zwischen der Diatomee und der Luft dasselbe Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit.

Zweitens Surirella gemma. Diese Diatomee hat eine viel feinere Zeichnung, die im allgemeinen mit Objektivaperturen bis 1 nicht einwandfrei aufgelöst werden kann. Sie war früher das schwierigste Prüfobjekt für Wasserimmersionssysteme und zunächst auch für Systeme homogener Immersion.

Drittens wurde mit der Vervollkommnung der Systeme für homogene Immersion Amphipleura pellucida eingeführt, die auf ihren Flachseiten eine außerordentlich zarte und feine Zeichnung aufweist, die wohl großenteils aus Querleisten besteht, die in sich wieder mit etwas engerem Abstand unterteilt sind. Im vorliegenden Falle kommt es nur auf die Querleisten an.

Ich habe schon ausgeführt, daß diese Diatomeen, wenn sie überhaupt als Gitter zu bezeichnen sind, sehr eigenartige Gitter darstellen, weil sie körperlich sind und aus einem Stoff aufgebaut, der an sich vollkommen durchsichtig ist. Die Sichtbarkeit der Unterteilung wird also nicht allein abhängig sein von dem Abstand von Erhöhung zu Erhöhung, sondern auch von der Tiefe, mit der die Furchen, wenn ich mich so

ausdrücken darf, in die Oberfläche einschneiden, also vom Verhältnis der Höhe Leiste bis Furche zur Entfernung von Leiste zu Leiste. Enden die Leisten nach oben in einer praktisch scharfen Linie, hat man tief eingeschnittene Furchen, die ebenfalls in der Tiefe scharf enden, so sind naturgemäß die Beobachtungsverhältnisse ganz andere, als wenn beispielsweise die Leiste oben eine ebene Fläche hat, alsdann mit einem Steilabfall zur Furche herabgeht, dort wieder eine ebene Fläche hat und so fort.

Unter einem optischen Gitter hat man sich eigentlich ganz etwas anderes vorzustellen, als es durch solche Diatomeen verwirklicht werden kann. Ein optisches Gitter ist in bezug auf durchfallendes Licht ein periodischer Wechsel eines lichtdurchlässigen Streifens mit einem lichtundurchlässigen Streifen. Für auffallendes Licht der periodische Wechsel zwischen einem Streifen reflektierender Oberfläche und einem nichtreflektierenden Streifen. Für alle optischen Gitter ist es nicht notwendig, daß sie körperlich sind. Die Gitterung kann in einer Ebene liegen. Nimmt man beispielsweise eine Glasplatte, die auf einer Seite mit einer dünnen Silberschicht überzogen ist, von solcher Stärke, daß sie eben kein Licht mehr durchläßt, und entfernt man mit Hilfe eines Stichels die Versilberung von der Glasoberfläche, so erhält man ein Gitter, das praktisch in einer Ebene liegt und sowohl für durchfallendes wie für auffallendes Licht der obigen Definition entspricht. Im Falle des durchfallenden Lichtes dringt das Licht durch das Glas zwischen den Silberstreifen hindurch, die ihrerseits periodische Dunkelheit erzeugen. Im reflektierten Lichte, bei dem man natürlich die Reflexion an der Glasfläche auf geeignete Weise wegzuschaffen hat, reflektiert ausschließlich der versilberte Stab. Vom unbelegten Glase wird kein Licht zurückgeworfen.

Eine Diatomee ist anders, bei ihr ergibt sich Gitterbedingung nur dadurch, daß sie in einem Medium liegt, dessen Brechungsexponent anders ist als der der Diatomee. Infolgedessen wird die Sichtbarkeit der Gitterung eine Folge des Verhältnises der Brechungsexponenten von Diatomee und Einschlußmedium sein, und zwar zunächst in weiten Grenzen unabhängig von der Entfernung der Gitterbalken voneinander. Legt man eine Diatomee in ein Medium ein, dessen Brechungsexponent dem der Diatomee gleicht, so sieht man weder bei zentraler Beleuchtung mit parallelem Lichtbündel noch bei irgendwelcher anderen Beleuchtung das geringste, weil nirgends vermehrter Lichtdurchgang oder vermehrte Lichtabsperrung stattfindet. Die Diatomee ist unsichtbar. Sie wird um so intensiver sichtbar, je mehr der Brechungsexponent des Einschlußmediums sich von ihrem eigenen unterscheidet.

Bei den oben angegebenen Präparaten sind die mittleren Brechungsexponenten für weißes Licht für Styrax (ein Harz mit hohem Gehalt an Zimmetöl) 1,63, für das Quecksilber-Doppelsalz 1,73 und für Jodsilber endlich 2,3. Daraus ergibt sich, daß die Diatomeen in Jodsilber eine viel viel größere Intensität der Zeichnung aufweisen werden, als in den beiden anderen Einschlußmedien.

Ehe ich weiter fortfahre, möchte ich auch noch einige Worte über den Begriff des Selbstleuchters reden, gerade im Anschluß an die Ausführungen über das Gitter.

Man wird im allgemeinen auf die Frage, was ist ein Selbstleuchter, antworten, ein Körper, der selbst leuchtet. Das ist zweifellos richtig, und es wird wohl auch kaum jemals ein Zweifel darüber herrschen, ob ein Körper selbst leuchtet oder nicht. Ich möchte aber im Hinblick auf den vorliegenden Fall den Selbstleuchter anders definieren, und zwar als einen Körper, dessen Hohlraumstrahlung größer ist als seine Oberflächenstrahlung. Diese Definition ist unzweifelhaft richtig, solange es sich nicht um einen Körper mit absolut schwarzer Oberfläche handelt. Ein Nichtselbstleuchter wäre demnach ein Körper, dessen Oberflächenstrahlung größer ist als seine Hohlraumstrahlung. Da es sich hier aber nur um Körper handelt, die kein eigenes Licht aussenden, die also der Definition zu 1 niemals entsprechen können, so handelt es sich hier eigentlich im günstigsten Falle nur um Pseudoselbstleuchter, und es erscheint mir überhaupt sehr fraglich, ob irgend eine Beobachtung an diesen Diatomeen zum Entscheid einer Theorie herangezogen werden kann, die einen Unterschied zwischen Selbstleuchter und Nichtselbstleuchter macht. Da ich aber eingangs erklärt habe, daß ich mich nur mit den Untersuchungen des Herrn Siedentopf, aber nicht mit den Schlußfolgerungen in bezug auf die Abbesche Theorie befassen will, habe ich das nur beiläufig erwähnt.

Die Mikrophotographie 1 gibt das Aussehen eines Panzerstückchens im durchfallenden schrägen Lichte, die Fig. 2 dasselbe Stück bei Dunkelfeldbeleuchtung mit dem Leuchtbildkondensor wieder. Man sieht sofort, daß Herr Siedentopf recht hat. Im Falle 1 sieht man reelle Linien, im Falle 2 sieht man etwas, was man nicht recht definieren kann. Ob die Ansicht des Herrn Siedentopf, es handelt sich nur um Beugungserscheinungen, unbedingt richtig ist, möchte ich dahingestellt sein lassen, wenn es auch so aussieht. Nun sind aber diese beiden Aufnahmen in einer meines Erachtens nicht zulässigen Weise unter ganz verschiedenen Verhältnissen aufgenommen. Die Photographie 1 ist im Hellfeld aufgenommen, bei einseitig schräger Beleuchtung, bei der das Licht parallel

zur Mittelrippe senkrecht zu den Gitterleisten einfiel. Die Apertur der Beleuchtungsschräge lag innerhalb der Objektivapertur, so daß der Untergrund hell blieb. Will man überhaupt die Annahme machen, daß ein solcher Pseudoselbstleuchter einem wahren Selbstleuchter gleichkommt, so ist jedenfalls die Behauptung, daß das Objekt bei dieser Beleuchtungsart kein Selbstleuchter sei, unrichtig. Es kommt auf den Hintergrund dabei gar nicht an. Nimmt man eine Glühlampe mit glühendem Faden und hält sie vor die Sonne, so daß der Faden zwischen Auge und Sonne sich befindet, so wird man den Faden dunkel auf dem hellsonnigen Hintergrund sehen. Kein Mensch wird aber von dem glühenden Faden behaupten wollen, daß er kein Selbstleuchter sei. Wenn man ein glühendes Gitter an Stelle des Fadens verwendet und nun die Erscheinung untersucht, so wird man schwer zu einer einheitlichen Erscheinung kommen, weil man ein Gemisch von Selbstleuchter- und Nichtselbstleuchter-Eigenschaften erhält. Es ist hier fraglos, daß es sich auch im Falle 1 schon um einen teilweisen Selbstleuchter handelt, aber unter der Voraussetzung, daß man diesem Pseudoselbstleuchter Eigenschaften eines Selbstleuchters zusprechen will. Denn was man als helle Streifen in der Photographie sieht, braucht durchaus kein von unten durch den Beleuchtungsapparat unabgelenkt hindurchfallendes Licht zu sein. Es ist vielmehr von der Seite gekommen und an den Hohlraumflächen total reflektiert. In diesem Falle würde also die Hohlraumstrahlung größer sein als die Oberflächenstrahlung, also hätte man einen Pseudoselbstleuchter vor sich.

Die Photographien 1 und 2 würden nur dann vergleichbar nebeneinander zu stellen sein, wenn (2) unter denselben Bedingungen aufgenommen wäre wie (1). Da ich im Falle (2) mit Licht beleuchte, das radial von allen Seiten einfällt und sich ungefähr in der Mitte des Gesichtsfeldes trifft, so habe ich natürlich ganz andere Verhältnisse als im Falle (1). Entweder photographiert man die Diatomee im ersten Falle bei voller Kondensorapertur, also ebenfalls bei allseitig radial einfallendem Lichte, aber innerhalb der Apertur des Beobachtungsobjektivs, oder man benutzt im Falle (2) auch einseitiges Licht, nur größer als die Objektivapertur, um den dunklen Hintergrund zu erhalten. Ich möchte noch einmal betonen, bewiesen wird dadurch meines Erachtens gar nichts, weil in bezug auf seine Selbstleuchtereigenschaften die Diatomee im Falle 1 wegen der notwendigen hohen Apertur schon fast die gleichen Eigenschaften, die nur graduell etwas verschieden sind, hat wie im Falle 2.

Daß diese eben entwickelte Ansicht richtig ist, wird durch folgendes bewiesen:

Beobachtet man die Diatomeen im parallelen Lichte, aber mit einem Objektiv höherer Apertur, so sieht man sie relativ dunkel auf hellem Untergrund, besonders dann, wenn die Vergrößerung noch keine Lösung der Oberflächenmodellierung zuläßt. In diesem Falle hat man eine ideale Integration der gesamten unendlich kleinen Lichtbündel, die die Diatomee durchdringen und vom Beobachtungsobjektiv aufgenommen werden. Steigert man jetzt die Apertur des beleuchtenden Lichtbündels, so nimmt die Dunkelheit der Diatomee, bezogen auf das übrige beleuchtete Feld, ab. Daraus geht hervor, daß jetzt ein größerer Anteil von Licht durch die Diatomee hindurchgegangen ist als im ersten Falle. Wird die Apertur weiter gesteigert und gleichzeitig eine Vergrößerung gewählt, bei der ein Erkennen der Modellierung noch möglich ist, so tritt mit einem Male eine Trennung von Helligkeit und Dunkelheit in der Diatomee ein, die Zeichnung erscheint. Dasselbe tritt ein, wenn man von der zentralen Beleuchtung auf schiefe Beleuchtung übergeht, nur daß in diesem Falle die Kontrastabnahme, die im Falle der allseitig gesteigerten Beleuchtungsapertur eintritt, in Wegfall kommt. Folge davon: Bei einseitig schiefer Beleuchtung sind die Kontraste zwischen Hell und Dunkel beim Gitter größer als bei vollem allseitig radialen Lichte.

Nimmt man an, daß auf der Oberfläche der Kieselschale dreieckig prismatische Leisten sitzen, so sieht man dann sofort, daß bei genügender Differenz der Brechungsexponenten zwischen Diatomee und Einschlußmedium überhaupt kein paralleles Licht die Diatomee durchdringen und in das Beobachtungsobjektiv eindringen kann, sobald der Neigungswinkel der Prismaseite so groß ist, daß in bezug auf die Differenz der Brechungsexponenten zwischen Kieselpanzer und Medium totale Reflexion eintritt. Dieser Fall ist in der Natur nicht vorhanden, weil die Natur keine unvermittelten Übergänge kennt. Infolgedessen ist weder die Leiste an der Oberfläche absolut scharfkantig noch das Wellental. Es gibt also Stellen, an denen teils ohne jede Ablenkung, teils prismatisch abgelenktes Licht die Diatomee durchdringt. Dieser Lichtanteil bedingt die Aufhellung der Diatomee, die sonst schwarz im hellen Gesichtsfeld erscheinen müßte.

Um die Sache nachzuprüfen, habe ich nun folgendes gemacht:

Es lag mir daran, einseitig schiefe Beleuchtung von einer Apertur zu bekommen, die jenseits des Objektivs lag, wobei ich mich zunächst nur des oben schon beschriebenen Fluoritsystems von 1,30 Apertur bedient habe. Ich habe gerade dieses Objektiv gewählt, weil ich sicher war, daß Herr Siedentopf einen Apochromaten benutzt hat, der natürlich dem Fluoritsystem, das überdies sphärisch nicht besonders gut

korrigiert ist, unter allen Umständen überlegen sein wird. Das einseitige Licht hoher Apertur wurde folgendermaßen erzeugt:

In Ermangelung eines Glasklotzes mit rechtwinklig angeschliffenen Begrenzungsflächen nahm ich ein rechtwinkliges Reflexionsprisma von etwa 2 . 2 cm² Kathetenlänge. An dessen Stirnseiten wurden quadratische Stücke aus starkem Kartonpapier angeklebt. Stellt man dieses Gebilde mit den Kartonpapierkanten auf einen Tisch, so liegt eine Kathetenfläche senkrecht zur Tischfläche, die andere parallel. In dieser Lage wurde das Prisma auf einen gewöhnlichen Objektträger geklebt. Von einer kleinen Mikroskopbogenlampe wurde dann ein Bild des Kraters so auf die senkrecht stehende Kathetenfläche mittels einer Linse projiziert, daß das enge Strahlenbündel fast parallel zur oberen Kathetenfläche einfiel. Der Objektträger mit den Diatomeen wurde mit Zedernholzöl mit der Prismenoberfläche optisch homogen verbunden. Auf diese Weise lag der verkleinerte Bildpunkt des Bogenlampenkraters im Präparat. Bei dieser Anordnung konnte die Apertur der beleuchtenden Strahlen bis auf fast 1,5 gesteigert werden. Benutzt wurden zunächst die Präparate in Styrax und in Jodkalium-Quecksilberjodid, bei denen die Streifung eben gerade bei stark schräger durchfallender Beleuchtung im Hellfeld gesehen werden konnte, während sie bei voller Kondensorapertur bei durchfallendem Lichte unsichtbar blieb. Resultat: Die Streifung war im Dunkelfeld mindestens ebensogut sichtbar wie im Hellfeld.

Da ich nicht wollte, daß unter Umständen die Behauptung aufgestellt werden könnte, diese einseitige Beleuchtung sei im Effekt anders als die Beleuchtung durch den Leuchtbildkondensor, besorgte ich einen solchen und wiederholte dann denselben Versuch.

Das Resultat war: ließ man den Leuchtbildkondensor radial strahlen, so sah man die Zeichnung nicht, beseitigte man aber das sogenannte falsche Licht, d. h. ließ man ihn wie bei der behelfsmäßigen Einrichtung nur von einer Seite quer zu den Gitterleisten strahlen, so sah man die Gitter genau so gut wie im Hellfeld. Ein Unterschied zwischen der behelfsmäßigen Einrichtung bestand also nicht. Es ist doch wohl unangängig, zwei Erscheinungen miteinander vergleichen zu wollen, die ihre Entstehung ganz verschiedenen Ursachen verdanken.

Nun bin ich noch weiter gegangen und habe ein Jodsilberpräparat benutzt. Bei diesem Präparat kann man die Streifung der Diatomee schon bei einer Apertur von 1,3 im Hellfeld und radial voll einfallender Beleuchtung gut sehen. Wurde dann die Hellfeldbeleuchtung gegen den Leuchtbildkondensor vertauscht, so war die Zeichnung ebenfalls, nur noch

viel deutlicher sichtbar als im ersten Falle. Sicherlich deshalb, weil der Öffnungswinkel der beleuchtenden Strahlen größer war. Dasselbe Präparat habe ich dann noch mit dem 2 mm-Angstapochromaten von 1,40 Apertur betrachtet. Bei diesem Apochromaten hat man kein vollständiges Dunkelfeld mehr, es tritt so eine Art Dämmerungserscheinung ein, bei der aber immerhin die Diatomee schon ziemlich hell leuchtet. Es war genau dasselbe Bild. Wegen der überlegenen Güte des Apochromaten war nur alles noch klarer und deutlicher zu sehen.

Beträgt der Winkel, in dem die Leiste zur Furche abfällt, mehr als 41° gegen die Ebene der Diatomee, so muß diese, in ein Medium vom Brechungsexponenten 2,3 eingebettet, sich verhalten wie eine Reihe aneinandergereihter rechtwinkliger Reflexionsprismen, deren Basis dem Auge zugekehrt zur Blickrichtung senkrecht liegt, und deren Katheten vom Auge abgewendet einen Dachfirst bilden. Ein solches Prisma verhält sich wie ein Spiegel, nur mit dem Unterschied, daß es infolge der zweimaligen totalen Reflexion nicht rechts mit links vertauscht. Betrachtet man also eine Diatomee im Lichte, das genau in Richtung der Mikroskopachse vom Beobachter her auf sie fällt, so muß, genügende Apertur des Beobachtungsobjektivs vorausgesetzt, die Zeichnung sichtbar werden, sofern die Dicke der Jodsilberschicht genügend ist, um die Modellierung der Oberfläche einzuebnen. Da die Jodsilberschicht infolge des Verfahrens ihrer Herstellung nur dünn ist, so werden bei dieser Betrachtungsweise nur solche Diatomeen gezeichnet erscheinen, deren Modellierung sehr fein ist. In dem Präparat befinden sich außer der Amphipleura pellucida noch Schüppchen von Pleurosigma angulatum und von Surirella gemma. Man hat also eine gut abgestufte Leiter von Zeichnungsfeinheiten zur Verfügung. Um die Richtigkeit nachzuprüfen, habe ich das Präparat unter Verwendung des Fluoritsystems und unter Zwischenschaltung eines Beckschen Vertikalilluminators untersucht und folgendes festgestellt:

Die Amphipleura pellucida wird in schönster Weise gelöst, die Zeichnung der Surirella gemma tritt ebenfalls noch mit einer annehmbaren Reinheit hervor, dagegen erscheint Pleurosigma angulatum hell wie mit einem Schleier überzogen. Der Kontrast zwischen Hell und Dunkel ist gemindert, es hat sich also genau das ergeben, was vorauszusehen war.

Als Lichtquelle wurde benutzt bei der Untersuchung mit der behelfsmäßigen Einrichtung und bei der Untersuchung mit Vertikalilluminator eine kleine Mikroskopierbogenlampe, wenn notwendig, unter Zwischenschaltung einer Mattscheibe. Im übrigen verwendete ich die in meiner Schreibtischlampe befindliche mattierte Halbwattlampe.

Zum Schlusse möchte ich noch schildern, in welcher Weise die Diatomeen in Jodsilber eingelegt worden sind, da dies vielleicht von allgemeinem Interesse ist.

Vor vielen Jahren habe ich über Kathodenzerstäubung gearbeitet. Damals hat es sich oft darum gehandelt, die Stärken von zerstäubten Silberschichten zu messen. Hierfür lag die Methode von Wernicke vor, der bekanntlich das Silber in Jodsilber umgewandelt und dann die Stärke des Jodsilbers durch die Lage und Ordnungszahl der Interferenzstreifen im Spektrum bestimmt hatte. Zu diesen Messungen habe ich von Anfang an nicht die Wernickesche Anordnung mit dem Spektrometer benutzt, sondern habe dazu ein Spektralokular von Browning auf dem Mikroskop verwendet, ein Okular, wie man es unter dem Namen Abbesches Okular in den Zeissschen Listen findet und das Herr Siedentopf in seiner Fig. 11 mit photographischer Spektralkammer auch dargestellt hat. Die Silberschichten waren auf dünnen Glimmerplättchen niedergeschlagen. Um die Interferenzen des Glimmers unschädlich zu machen, nahm ich eine Hartgummiplatte, schliff sie matt und legte das zu messende Jodsilberstück mit der Glimmerschicht nach unten unter Zwischenschaltung von etwas Monobromnaphthalin auf die Platte. Das Licht wurde durch einen Vertikalilluminator durch ein schwaches Objektiv auf das Objekt geleitet und zurück zum Spektralokular. Seit jener Zeit her hatte ich eine gewisse Übung in derartigen Messungen erworben, und dieser Dinge habe ich mich erinnert. Hier bin ich nun so verfahren:

Die Diatomeen wurden mir von Herrn Möller in Wedel freundlichst zur Verfügung gestellt. (Ich bemerke noch, diese Arbeiten liegen jetzt etwa 10 Jahre zurück.) Sie befanden sich in einer Kollodiumaufschwemmung. Das Kollodium wurde zunächst durch vielfaches Verdünnen und Absitzenlassen weitmöglichst beseitigt. Von der Aufschwemmung wurde dann etwas auf ein gut gesäubertes Deckglas gebracht und das Deckglas auf einem Kupferblech bis zu dunkler Rotglut erhitzt, so daß die Diatomeen ein klein wenig anschmolzen. Nach dem Erkalten wurde das Deckglas unmittelbar in eine doppelt oder dreifach starke ammoniakalische Versilberungsflüssigkeit mit Seignettesalz gebracht.

Die Silberlösung enthielt etwas mehr Ammoniak als günstig. Der Niederschlag erfolgt dann langsamer, aber man erhält auf diese Weise bei gelindem Erwärmen festere und stärkere Silberschichten. Nach der Versilberung wurde die Silberschicht gut gesäubert, getrocknet und dann durch Einbringen in ein Gläschen mit Jod in Jodsilber verwandelt. Die auf chemischem Wege hergestellte Silberschicht hat keine glatte Ober-

fläche. Sie sieht auf der Oberfläche bekanntlich rot aus, ist matt, und unter dem Mikroskop sieht man, daß die Oberfläche körnig ist. Wird die Silberschicht jodiert, so vervierfacht sich die Dicke, und damit tritt natürlich auch zwischen Berg und Tal eine erhebliche Vermehrung der Höhenunterschiede ein. Aus diesem Grunde muß man das Jodsilber nachher ganz vorsichtig polieren. Das gelingt mit einem weichen Leinen- oder Wolläppchen sehr leicht, natürlich beschädigt man dabei manche der Diatomeen, kratzt auch wohl in die Jodsilberschicht stellenweise etwas ein.

Die Methode der chemischen Versilberung ist natürlich für diesen Zweck ungünstig. Das einzig richtige wäre, durch Kathodenzerstäubung die Silberschicht herzustellen, dann hat man von vornherein eine glatte Oberfläche, und das lästige Nachpolieren fällt fort. Leider stand mir damals keine Einrichtung zur Kathodenversilberung zur Verfügung.

Die so hergestellten Deckgläser sind dann einfach mit Kanadabalsam auf Objektträger aufgelegt. Es werden zwar nicht alle Präparate ausgezeichnet, aber die Herstellung ist wenig mühevoll, so kann man sich die besten nachher aussuchen.

Das Verfahren hat natürlich nur einen Zweck bei sehr feiner Modellierung der Oberfläche, wo die Jodsilberschicht so dick ist, daß sie die Oberfläche vollständig einebnet. Das ist bei den drei genannten Diatomeen nur teilweise der Fall. Da das Jodsilber einen Brechungsexponenten von 2,3 hat und man den des Kieselsäurehydrats zu höchstens 1,5 annehmen kann, so ist das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten Jodsilber–Kieselsäure größer als das Verhältnis Kieselsäure–Luft. Die Präparate zeigen also mindestens dieselben Schattentiefen der Struktur wie in Luft, sind aber für die höchsten Beleuchtungsaperturen und stärksten Vergrößerungen brauchbar, während die Luftpräparate über der Apertur 1 versagen.

Ich habe noch gesagt, daß das Möllersche Präparationsverfahren für solche Testdiatomeen nicht besonders günstig sei. Den Grund wird man jetzt sofort einsehen. Die Diatomeen sind allerseits mit einer feinen Kollodiumhaut überzogen. Diese Kollodiumhaut hat etwa den gleichen Brechungsexponenten wie die Kieselsäure. Wenn die Haut auch noch so fein ist, so ebnet sie doch die Modellierung ein, während die Modellierung voll von dem Einschlußmittel, also dem Styrax oder der Quecksilberjodidlösung, ausgefüllt sein sollte. Wer sich die Mühe machen will, ein Präparat selbst herzustellen, kann sich leicht von der Richtigkeit überzeugen.

Herr Siedentopf beanstandet die Angaben von Bumm betreffs des Abstandes der beiden Gonokokkenkerne voneinander und warnt vor den

Angaben der Bakteriologen, die die Größe von Mikroben betreffen. Ich kann mich seiner Ansicht nicht anschließen. Wie soll der Bakteriologe wohl die Größe eines Spaltpilzes messen? Zur Verfügung stehen ihm das Mikroskop und die Farbe, oder das Mikroskop und statt der Farbe das Dunkelfeld. Die Messung wird er natürlich so ausführen, daß er ein Okularmikrometer mit Hilfe eines Objektivmikrometers eicht und nun mit dem Okularmikrometer die scheinbare Größe der Spaltpilze feststellt. Ich glaube nicht, daß ein Bakteriologe besonderen Wert darauf legen wird, daß diese Größenangaben von ihm absoluten Wert besitzen, er verfolgt wohl lediglich die Absicht, einem anderen Bakteriologen, der einen unbekannten Spaltpilz vor sich hat, mit Angaben des scheinbaren Aussehens und der scheinbaren Größe an die Hand zu gehen. Ich kann in dieser Arbeitsweise beim besten Willen keinen Verstoß gegen physikalische Grundsätze finden.

Herr Siedentopf hat zu Anfang die Gitterkonstante der Amphipleura zu 0,264 μ angegeben. Es wird kein Leser auf die Idee gekommen sein, daß Herr Siedentopf ein einzelnes Panzerchen isoliert und mit Mikrometerschraube oder Schublehre nachgemessen hat. Er hat sich derselben Methode bedient, die er beim Bakteriologen beanstandet. Er beschreibt diese Methode ja auch ausdrücklich und belegt sie mit Mikrophotogrammen. Also, was dem einen recht ist, sollte dem anderen billig sein. Er kann vom Bakteriologen nicht verlangen, daß er aus dem Eiter einen einzelnen Leukozyten heraussucht, ihn schlachtet, seinem Bauch einen Kokkus entnimmt und diesen mit den üblichen mechanischen Meßmitteln nachmißt. Ich glaube nicht, daß dem geschicktesten Menschen das gelingen würde. Außerdem wünscht der Bakteriologe seine Messung nur als relativen Wert betrachtet zu wissen, Herr Siedentopf braucht den Wert 0,264 μ aber als absoluten Wert im Sinne der Theorie. Ist dieser Wert nach oben oder unten absolut um ein gewisses Maß falsch, so fällt damit die Beweiskraft der ganzen Untersuchung.

Zusammenfassend ergeben meine Versuche also folgendes:

1. Wird eine Diatomee, deren Gitterung gerade bei schrägster Beleuchtung im Hellfeld wahrgenommen werden kann, im Dunkelfeld unter gleichen Bedingungen beleuchtet, so ist ihre Gitterung ebensogut zu sehen wie im Hellfeld.

2. Wird eine Diatomee in einem Einschlußmedium untersucht, das bei durchfallendem Lichte ihre Gitterung bei allseitig voller Apertur des Beobachtungsobjektivs im Hellfeld erkennen läßt, so ist die Gitterung bei allseitiger Beleuchtung im Dunkelfeld ebensogut zu sehen.

Bemerkung zu der Arbeit: Der Zeemaneffekt des Argonfunkenspektrums (Ar II)*.

Von **C. J. Bakker, T. L. de Bruin** und **P. Zeeman** in Amsterdam.

(Eingegangen am 28. Oktober 1928.)

Im Zusammenhang mit einer geringen Abweichung von dem g-Summensatz bei den Termen mit $j = 1$ des $4p$-Elektrons, die in unserer Arbeit gegeben wurde, haben wir uns damit beschäftigt, die mitgeteilten Messungen, die direkt an den Gitteraufnahmen mit einem Komparator vorgenommen sind, an Messungen von Photogrammen der magnetischen Aufspaltungen zu prüfen.

Bei dieser Untersuchung, welche mit einem photoelektrischen Photometer von Zeiss angestellt wurde, ist gefunden, daß in einigen Fällen die Messung des Photogramms von der Komparatormessung der Gitteraufnahmen abweicht. Die Differenz, die bei diesen beiden Meßmethoden auftritt, muß einer optischen Täuschung zugeschrieben werden**, wodurch sehr enge Dubletts ein wenig zu weit gemessen werden.

λ	Termkombination $x - y$		Zeemaneffekt	g_x theor.	g_x beob.	g_y theor.	g_y beob.
4889,06	$4s^2P_1$ – $4p^2P_1$	L	(0,00) 0,67				
		beob.	(0,17) 0,83	0,67	0,67	0,67	0,99***
		ber.	(0,16) 0,83				
4657,889	$4s^2P_2$ – $4p^2P_1$	L	**1,67** 1,00 **(0,33)** **(0,33)** 1,00 **1,67**				
		beob.	**1,50**^{5} 1,14^5 **(0,16**^{5}**)** **(0,16**^{5}**)** 1,21 **1,51**	1,33	1,33	0,67	0,99****
		ber.	**1,50** 1,16 **(0,17)** **(0,17)** 1,16 **1,50**				
4275,167	$4p^2P_1$ – $5s^2P_2$	L	**(0,33)** 1,00 **1,67**				
		beob.	**(0,22)** **1,64**^{5}	0,67	0,99	1,33	1,43†
		ber.	**(0,22)** 1,21 **1,65**				

* C. J. Bakker, T. L. de Bruin und P. Zeeman, ZS. f. Phys. **51**, 114, 1928.

** Vgl. schon Ch. E. St. John und L. W. Ware, Astrophys. Journ. **44**, 15, 1916; später W. H. Julius und M. Minnaert, Ann. d. Phys. **71**, 50, 1923 und a. a. O.

*** Der g-Wert 0,99 für den Term $4p\,^2P_1$ gibt eine bessere Übereinstimmung zwischen dem beobachteten und dem berechneten Zeemaneffekt.

**** Die Messung an dem Photogramm ist gegeben. Diese weicht von der Komparatormessung in unserer Abhandlung ab.

† Die Messung an dem Photogramm ist gegeben. Das Photogramm zeigt deutlich, daß die kurzwellige σ-Komponente von einer benachbarten Aufspaltung überlagert wird. Die Messung der langwelligen σ-Komponente gibt 1,64^5.

Aus dem Zeemaneffekt von den drei Spektrallinien, die hier nochmals wiedergegeben werden, folgt, daß der g-Wert des Terms $4p\,^2P_1$ auf 0,99 richtiggestellt werden muß.

In die Tabelle, die die g-Werte für die Terme des $4p$-Elektrons enthält, muß also für den Term $4p\,^2P_1$ der beobachtete g-Wert 0,99 eingetragen werden. Die g-Summe für die Terme mit $j = 1$ ist dann 5,34, also in vollkommener Übereinstimmung mit dem Wert des Landéschen g-Summensatzes.

Wir geben die Tabelle hier nochmals.

Terme des $4p$-Elektrons.

	$^4P_3$	$^4P_2$	$^4P_1$	$^4D_4$	$^4D_3$	$^4D_2$	$^4D_1$	$^4S_2$	$^2D_3$	$^2D_2$	$^2P_1$	$^2P_2$	$^2S_1$	
$j=1$ g_L	—	—	2,67	—	—	—	0,00	—	—	—	0,67	—	2,00	$\Sigma g_L = 5{,}34$
$j=1$ $g_{\text{beob.}}$			2,67				0,00				0,99		1,68	$\Sigma g_{\text{beob.}} = 5{,}34$
$j=2$ g_L	—	1,73	—	—	—	1,20	—	2,00	—	0,80	—	1,33	—	$\Sigma g_L = 7{,}06$
$j=2$ $g_{\text{beob.}}$		1,73				1,20		2,00		0,90		1,23		$\Sigma g_{\text{beob.}} = 7{,}06$
$j=3$ g_L	1,60	—	—	—	1,37	—	—	—	1,20	—	—	—	—	$\Sigma g_L = 4{,}17$
$j=3$ $g_{\text{beob.}}$	1,60				1,33				1,24					$\Sigma g_{\text{beob.}} = 4{,}17$
$j=4$ g_L	—	—	—	1,43	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\Sigma g_L = 1{,}43$
$j=4$ $g_{\text{beob.}}$				1,43										$\Sigma g_{\text{beob.}} = 1{,}43$

Laboratorium „Physica“ der Universität Amsterdam.

Berichtigung

zu der Arbeit: Über Wiedervereinigung positiver Ionen mit freien Elektronen*. Von R. d'E. Atkinson.

Die Fußnote *, S. 200, gehört nicht zur Zeile 4, sondern nach Zeile 14 an den Schluß des Satzes.

* ZS. f. Phys. **51**, 188—203, 1928.

Berichtigung

zu der Arbeit: Verbreiterung von Spektrallinien durch Selbstabsorption. Von H. C. Burger und P. H. van Cittert*.

Auf S. 650 ist der Text von Z. 3 v. o. bis Z. 5. v. u. „Für $\alpha = 0$ ... zu ziehen.“ nebst der zwischenstehenden Fig. 12 zu streichen.

* ZS. f. Phys. **51**, 638—651, 1928, Nr. 9/10.

(Mitteilung aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Metallforschung.)

Versuche über die Rekristallisation von Metallen. II.

Von **R. Karnop** und **G. Sachs** in Berlin-Dahlem.

Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 5. November 1928.)

Einfluß von Zwischenglühungen auf den Beginn der Rekristallisation und die Korngröße. — Verzögerung der Rekristallisation durch entgegengesetzte Verformungen. — Verzögerung der Rekristallisation durch Warmverformungen.

Wie wenig die Rekristallisationserscheinungen bisher geklärt sind, ergibt sich wohl am anschaulichsten daraus, daß es unmöglich ist, das Verhalten eines Metalls für einen Fall vorauszusagen, der sich von den üblichen technischen Verhältnissen etwas weiter entfernt. Dabei dürften für den Aufbau einer umfassenden Rekristallisationstheorie gerade solche Versuche von großer Bedeutung sein, bei denen der Versuch gemacht ist, die verschiedenen für die Rekristallisation maßgebenden Faktoren unabhängig voneinander zu variieren. In Fortsetzung der in unserer I. Mitteilung* gebrachten Untersuchungen mögen daher im folgenden weitere Versuche beschrieben werden, die einige neuartige Rekristallisationsgesetzmäßigkeiten zutage gefördert haben**.

Die Versuche sind durchweg an handelsüblichem Aluminium*** mit 99,3 % Al (0,4 % Fe, 0,2 % Si) durchgeführt worden. Soweit nichts Besonderes erwähnt, gelangte das Aluminium in Form gezogener Stangen von 3 bis 10 mm Stärke, danach bei 500 bis 550°**** eine Stunde geglüht und an der Luft erkaltet, zur Verwendung.

Da bei den weiteren Versuchen Proben verschiedener Korngröße zum Vergleich gelangten, war zunächst der Einfluß der Korngröße zu klären. Bekannt ist, daß die Rekristallisation um so später eintritt, je größer das Korn des Ausgangsmaterials ist. Systematische Untersuchungen hierüber

---

* R. Karnop und G. Sachs, ZS. f. Phys. **42**, 283—301, 1927. Dort finden sich auch ausführliche Literaturangaben.

** Von G. Masing (ZS. f. Metallkde. **12**, 457—498, 1920) liegen einige Versuche im Sinne unserer Arbeit vor. Die Versuche von Masing sind jedoch an den schon bei gewöhnlicher Temperatur rekristallisierenden Metallen Zinn und Zink gemacht und infolgedessen nicht ganz durchsichtig.

*** Den Vereinigten Aluminium-Werken A.-G. sind wir für Überlassung des Materials zu Dank verpflichtet.

**** Glühen der Proben bei 550° führte vielfach zur Entstehung sehr großer Kristalle, so daß dann 500° gewählt werden mußten (vgl. Frhr. v. Göler und G. Sachs, ZS. f. Metallkde. **19**, 90—93, 1927).

liegen bisher jedoch anscheinend nicht vor, ebensowenig wie über die Korngröße der neu gebildeten Kristalle.

Daher wurde eine Anzahl von Stäben um 3, 10 und 20 % gedehnt und auf 550° eine Stunde erhitzt. Die um 3 % gedehnten Stäbe bestanden danach aus einzelnen Kristallen, bei den um 10 % gedehnten ging eine 1 cm lange Strecke durch 3 bis 4 Kristalle, bei den um 20 % gedehnten durch rund 20 und beim Ausgangsmaterial durch rund 100 Kristalle.

Je ein Stab jeder Gruppe wurde, soweit möglich, um 3, 6, 12, 18 und 25 % gedehnt und je eine halbe Stunde stufenweise um 25° steigenden Temperaturen ausgesetzt. Das Ergebnis der Versuche ist in Tabelle 1 zusammengestellt.

Hinsichtlich des Rekristallisationseintritts zeigt sich, wie zu erwarten, daß die Temperatur um so höher liegt, je geringer der Reckgrad und je größer das Ausgangskorn ist.

Was die Korngröße anbetrifft, so zeigt sich nur beim feinkörnigsten Zustand (Fig. 1) die bekannte Gesetzmäßigkeit, daß bei geringen Reckgraden einzelne große Kristalle, bei hohen Reckgraden dagegen wieder ein feines Korn entsteht. Andeutungsweise ist diese Gesetzmäßigkeit noch bei den Stäben mit 20 Kristallen auf 1 cm zu erkennen (Fig. 2). Bei den grobkörnigen Stäben (Fig. 3) entstehen aber weder nach geringen Verformungen besonders große Kristalle, noch besonders kleine nach starken Verformungen. Hierbei ist allerdings zu beachten, daß die Stäbe sich bei der Dehnung ungleichmäßig verformen. Dadurch kann die Ausbildung ganz großer Kristalle unterbunden und die Korngrößenunterschiede können verringert sein.

Infolge der ungleichmäßigen Dehnung der Stäbe mit 3 bis 4 Kristallen auf 1 cm liegen auch deren Rekristallisationstemperaturen verhältnismäßig niedrig. Für feinere Untersuchungen können Stäbe mit weniger als etwa 20 Kristallen auf 1 cm ihrer Ungleichmäßigkeit wegen nicht verwendet werden.

Ganz allgemein ist noch zu beachten, daß die an der Oberfläche gelegenen Kristalle sich anders verhalten als die im Innern eingeschlossenen. Das Innere rekristallisiert in der Regel früher als die Oberflächenschicht. Bei Entstehung großer Kristalle ist daher die Oberflächenschicht häufig noch feinkörnig.

In der Technik hat man es normalerweise mit einem ziemlich feinkörnigen Material zu tun. Die Kristalle eines Stoffes, der keinerlei Zustandsänderungen im festen Zustand erleidet, scheinen auch unter eine gewisse Größe nicht herabzugehen. Das Verhalten des hier untersuchten

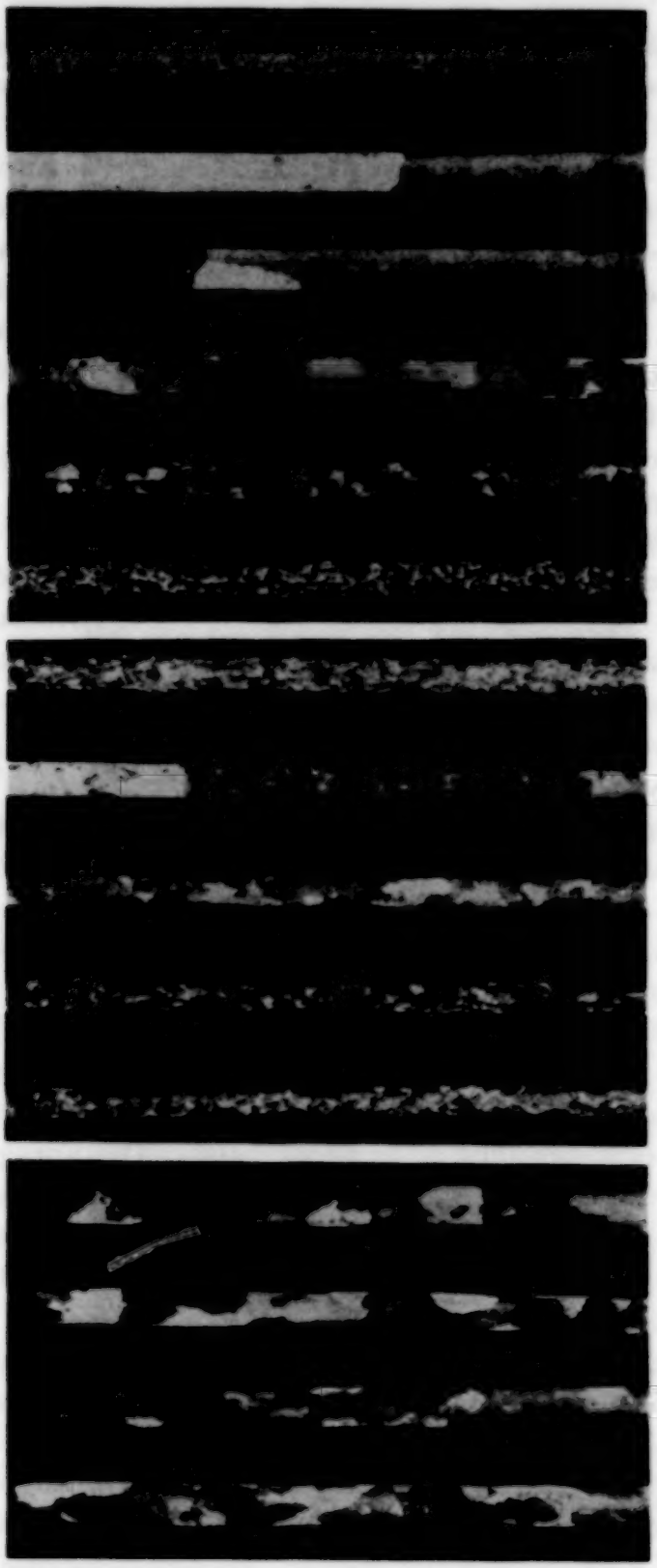


Fig. 1 bis 3. Einfluß der Ausgangskorngröße auf die Korngröße von rekristallisiertem Aluminium. (1,8 fach vergr.)

feinkörnigen Materials (Fig. 1) entspricht daher annähernd auch den Verhältnissen, wie sie in der Praxis und bei Untersuchungen anderer Forscher vorliegen.

A. Einfluß der Anlaßtemperatur. Für die Korngröße eines solchen Materials nach der Rekristallisation pflegt man in der Regel nur den Betrag der Verformung und die Höhe der Glühtemperatur als maßgebend anzusehen und die übrigen Faktoren zu vernachlässigen. Unter anderem wird auch meist stillschweigend vorausgesetzt, daß der Ausgangszustand des Materials, insbesondere die Glühtemperatur vor der Reckung, praktisch einflußlos ist. Da aber hierüber anscheinend noch nichts Sicheres bekannt ist, wurden einige Versuche zur Klärung dieses Einflusses durchgeführt.

Wenn ein Stab um einen gewissen Betrag gedehnt wird, dann wieder auf 550° erhitzt und von neuem gedehnt wird, so haben wir den normalen Fall vor uns, bei dem allein die letzte Verformung als wirksam angesehen wird. Fällt dagegen die Zwischenglühung fort, so ist die Rekristallisation von der Summe beider Verformungen abhängig.

Was geschieht nun, wenn für die Zwischenglühung eine tiefere Temperatur gewählt wird?

Von vornherein ist hierbei zu beachten, daß diese Temperatur entweder so hoch gewählt werden kann, daß die Rekristallisation abgeschlossen ist, d. h. durchweg neue Kristalle entstanden sind. Die Wahl einer höheren Temperatur hat dann nach Fig. 4 äußerlich keine wesentlichen Gefügeänderungen mehr zur Folge. Ist das Korn, wie im vorliegenden Falle, einigermaßen grob, so tritt selbst bei sehr hohen Glühtemperaturen kaum noch merkliche Sammelkristallisation ein. Dennoch zeigt Fig. 6, daß nach erneuter Dehnung die niedriger geglühten Stäbe anders als die hochgeglühten rekristallisieren. Die Korngröße wächst mit der Temperatur der Vorglühung an. Die Rekristallisationstemperatur der Stäbe ist dagegen nicht nachweislich verschieden (Tabelle 2). Der Korngröße nach (Tabelle 1) hätte der bei 367° vorgeglühte Stab bei etwa 450° rekristallisiert sein können.

Die Temperatur der Vorglühung kann aber auch so niedrig gewählt werden, daß eine Rekristallisation mit den bisherigen Hilfsmitteln nicht nachweisbar ist, obwohl schon eine deutliche Glühwirkung auf den mechanischen Widerstand, eine Entfestigung, eingetreten ist*. Dieser Abfall betrug im vorliegenden Falle (Tabelle 2) (gemessen an der

* G. Sachs und E. Schiebold, ZS. f. Metallkde. **17**, 400—402, 1925; R. Karnop und G. Sachs, a. a. O.

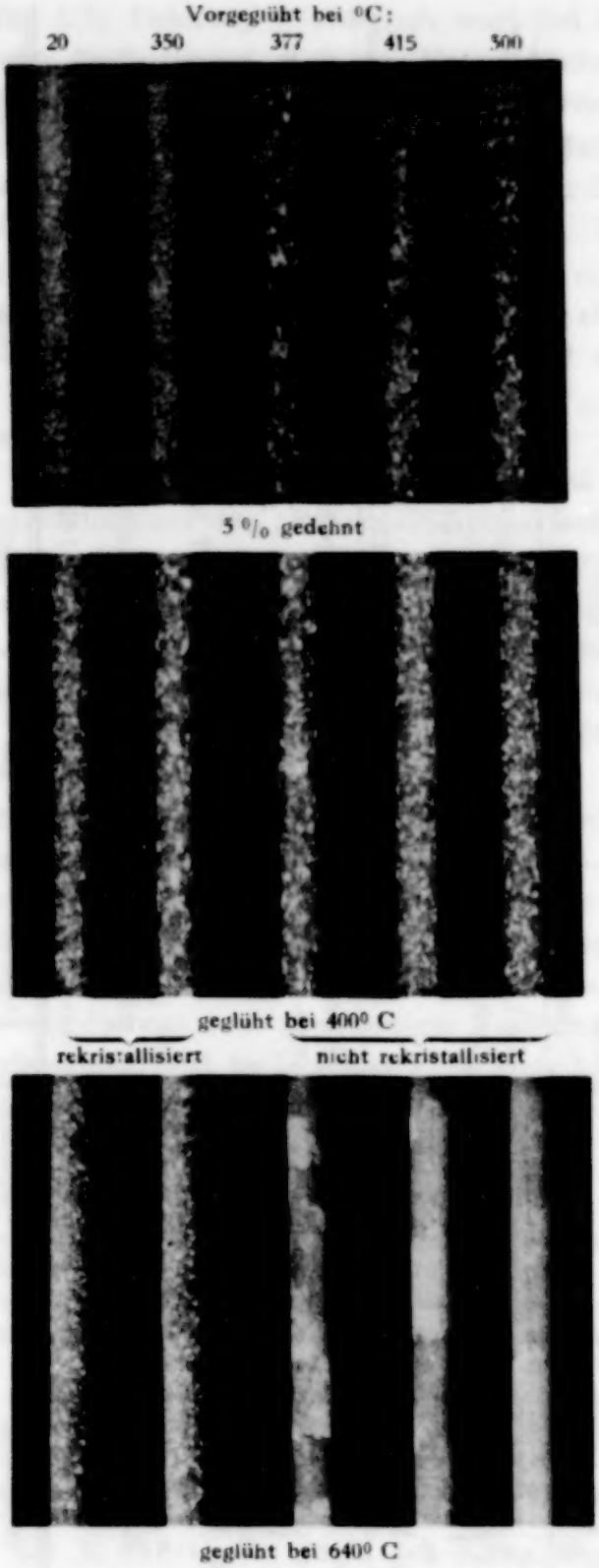


Fig. 4 bis 6. Einfluß von Zwischenglühungen bei verschiedenen Temperaturen auf die Rekristallisation von Aluminium. (1,8 fach vergr.)

Tabelle 1. Rekristallisation von Stäben verschiedener Korngröße.

Vorbehandlung	Dehnung:	3%	6%	12%	18%	25%
Gezogen und geglüht 550°, 1 Stunde (etwa 100 Kristalle auf 1 cm Länge)	Spannung	7,9 kg/mm²	10,9 kg/mm²	13,7 kg/mm²	15,4 kg/mm²	16,7 kg/mm²
	Rekristallisation	475° —	425° —	375° —	350° —	325° —
		500° + 1/2	450° +	400° + 3/4	375° +	350° +
		525° +		425° +		
	Korngröße	1/4 bis 1/6 . 1/cm	1/2 . 1/cm	5 bis 6 . 1/cm	12 . 1/cm	30 . 1/cm
20% gedehnt und geglüht 550°, 1 Stunde (etwa 20 Kristalle auf 1 cm Länge)	Spannung	7,5 kg/mm²	10,3 kg/mm²	13,2 kg/mm²	14,7 kg/mm²	15,8 kg/mm²
	Rekristallisation	650° —	500° —	425° —	375° —	350° —
			525° + 3/4	450° +*	400° +*	375° +*
			550° +			
	Korngröße		1/2 bis 1 . 1/cm	10 bis 12 . 1/cm	15 . 1/cm	15 bis 18 . 1/cm
10% gedehnt und geglüht 550°, 1 Stunde (3 bis 4 Kristalle auf 1 cm Länge)	Spannung	6,1 kg/mm²	7,6 kg/mm²	9,8 kg/mm²	10,4 kg/mm²**	
	Rekristallisation	650° —	525° —	425° —	425° —	
			550° + 3/4	450° + 1/2	450° +	
				475° +		
	Korngröße	Durchweg 5 bis 7 Kristalle auf 1 cm				

* Feine Kristalle an der Oberfläche. — ** 15 bis 16% gedehnt.
Es bedeutet: — nicht rekristallisiert; + rekristallisiert; + 1/2 zur Hälfte rekristallisiert.

Tabelle 2. Rekristallisation von Stäben nach verschiedener Vorglühung.

Behandlung	Vorglühung:	Ungeglüht	350°	367°	415°	500°
Gezogen; 500°, 1 Std. geglüht; 20% gedehnt	Spannung	15,5 kg/mm²	12,3 kg/mm²	8,8 kg/mm²	8,9 kg/mm²	9,5 kg/mm²
Geglüht bei versch. Temperatur, 1/2 Std.; 5% gedehnt	Rekristallisation	345° —	345° —	550° —	550° —	550° —
		365° +	365° + 1/2	600° +**	600° +*	600° +*
			400° +	640° +	640° +	640° +

* Kleine Kristalle an der Oberfläche. — ** Viele kleine Kristalle an der Oberfläche.
Es bedeutet: — nicht rekristallisiert; + rekristallisiert; + 1/2 zur Hälfte rekristallisiert.

Spannung, die für 5 % Dehnung erforderlich war) bei 350° etwa die Hälfte der gesamten Entfestigung, d. h. des Unterschiedes zwischen der Spannung bei ungeglühten und bei rekristallisierten Proben. Dabei lag die Temperatur mit 350° nur 17° tiefer als die Temperatur bei den ersten vollständig rekristallisierten und entfestigten Proben. Der Stab rekristallisierte jedoch, wie Tabelle 2 und Fig. 5 zeigen, fast so, wie wenn eine Zwischenglühung überhaupt nicht vorgenommen worden wäre. Vielleicht ist das Korn etwas gröber, die Rekristallisationsgrenze etwas höher als beim Stabe ohne Zwischenglühung; dieser Unterschied entspricht aber höchstens einer Entfestigung von vielleicht $^1/_{20}$ bis $^1/_{10}$ der gesamten möglichen Entfestigung.

Aus diesen Versuchen muß geschlossen werden, daß die eigentliche Ursache der Rekristallisation, der „Rekristallisationszwang", vor seiner Auslösung durch eine Zwischenglühung nur wenig beeinflußt wird. Mit der Rekristallisation tritt dann die hauptsächliche Auslösung dieses Zwanges ein; es bleiben aber noch Reste davon zurück, die erst mit steigender Glühtemperatur allmählich beseitigt werden. Dieser Restzwang äußert sich aber merkwürdigerweise nur in der Korngröße, nicht aber in der Rekristallisationstemperatur.

Gleichzeitig beweisen diese Versuche, daß eine Entfestigung wirklich ohne Rekristallisation vor sich gehen kann (Erholung)*.

B. Rekristallisation nach wechselnder Beanspruchung. Die Wirkung mehrerer aufeinanderfolgender Verformungen verschiedener Art und Richtung auf die Verfestigung und Rekristallisation ist keineswegs die gleiche wie die von zwei gleichartigen Verformungen derselben Größe. Die Verfestigung fällt im letzteren Falle stets höher aus**, und der Rekristallisationszwang wird sogar bei tordierten Aluminiumkristallen durch Retorsion in die Ausgangslage verringert***.

---

* Man könnte noch einwenden, daß die ersten Stadien der Rekristallisation ein Kornzerfall sind, wodurch ein äußerst feinkörniges Gefüge entstehen würde, dessen Existenz nicht nachweisbar ist. Es ist aber dann nicht einzusehen, weshalb ein solches Haufwerk sich fast genau so verhalten soll wie das Material ohne Zwischenglühung. Daß beim Anlassen zunächst eine Art Kornzerfall eintritt, wird ja wahrscheinlich gemacht durch die röntgenographisch nachweisbare Ausglättung des Gitters ohne äußere Orientierungseffekte (Frhr. v. Göler und G. Sachs, ZS. f. Metallkde. **19**, 410—411, 1927). Dieser Vorgang ist aber nach den vorliegenden Versuchen von der eigentlichen Rekristallisation durchaus zu trennen und für diese offenbar von untergeordneter Bedeutung.

** G. Sachs und E. Schiebold, ZS. d. Ver. d. Ing. **69**, 1557—1561 und 1601—1604, 1925; G. Sachs, ebenda **71**, 1511—1516, 1927.

*** G. Sachs, ZS. f. Metallkde. **18**, 209—212, 1926.

Es lag nun nahe, auch festzustellen, wie sich ein Probekörper bei einer Stauchung verhält, die auf eine gleich große Dehnung folgt. Es handelt sich also dabei um Verformungen, die äußerlich stets gleichmäßig über den ganzen Körper verteilt sind*. Ein tordierter und ein retordierter Kristall unterscheiden sich dagegen schon äußerlich stark darin, daß im tordierten Kristall das Gitter verkrümmt ist und an jeder Stelle des Stabes eine andere Lage hat, im retordierten dagegen äußerlich wieder parallel gerichtet ist.

Einige Proben wurden um 5% gedehnt, andere um 5% gestaucht und die gedehnten ebenfalls um 5% gestaucht. Die zum Dehnen und

5% gedehnt | 5% gestaucht | 5% gedehnt + 5% gestaucht

rekristallisiert bei:

470° C 470° C 510° C

Fig. 7. Einfluß von wechselnder Beanspruchung auf die Rekristallisation. (Nat. Größe.)

Stauchen des Ausgangsmaterials um 5%** erforderliche Spannung betrug etwa 6,2 kg/mm², die zum Stauchen des vorgedehnten um 5% 6,7 kg/mm². Die zusätzliche Verfestigung durch das Stauchen nach dem Dehnen ist also rund 8% und damit etwa halb so groß wie bei zusätzlicher Dehnung um den gleichen Betrag, bzw. Stauchung von 5 auf 10% (7,2 kg/mm²).

* Die Probekörper beim Stauchen hatten 10 mm Durchmesser und 15 mm Höhe. Durch Schmieren bei stufenweiser Belastung konnten die Probekörper einigermaßen zylindrisch gehalten werden. Die Rekristallisation war jedoch noch etwas unregelmäßig und bevorzugte gewisse Längszonen der Probekörper.

** Die genauen Zahlen waren 5,0% Höhenverminderung beim Stauchen und $\frac{5{,}0}{0{,}95}$ = 5,3% Verlängerung = 5,0% Querschnittsverminderung beim Dehnen. Bei den gedehnten und gestauchten Körpern wurde also genau die ursprüngliche Höhe wiederhergestellt.

Beim Ausglühen unter stufenweise um je 20° ($^1/_2$ Stunde) steigender Glühtemperatur waren die gedehnten und gestauchten Körper bei 450° zu einem großen Teile und bei 470° fast ganz rekristallisiert. Die nach dem Dehnen zurückgestauchten Körper waren dagegen bei 490° nur an einigen kleinen Stellen, und erst bei 510° zu einem großen Teile rekristallisiert. Bei Rückbildung einer Verformung wird also die Rekristallisationstemperatur stark heraufgesetzt, im vorliegenden Falle um etwa 50°.

Dabei waren aber nach Fig. 7 die Kristalle bei diesen Proben im Durchschnitt erheblich kleiner als bei den in einer Richtung verformten.

Auch bei dieser Versuchsreihe zeigt sich also, daß die Rekristallisationstemperatur durch Wechsel der Beanspruchungsrichtung im anderen Sinne beeinflußt wird als die Korngröße. Diese beiden Kennzeichen für einen Rekristallisationszwang sind also keineswegs gleichwertig.

C. Einfluß von Belastungen bei der Rekristallisation*. Eine weitere, bisher nicht beantwortbare Frage ist die nach dem Einfluß von Belastungen während der Rekristallisation.

Zu diesem Zwecke wurde eine Anzahl Proben um 20 bzw. 25 % gedehnt und nebeneinander eine belastete und eine unbelastete Probe in einem Ofen erhitzt. Der Ofen hatte von oben nach unten ein nicht unerhebliches Temperaturgefälle, so daß bei den in Frage kommenden Temperaturen die Proben am oberen Ende bis zu einer bestimmten Stelle im Ofen herab rekristallisierten. Durch Messungen bei verschiedenen Temperaturen ergab sich das Temperaturgefälle in der Mittelzone des Ofens zu etwa 3° auf 1 cm. Die angegebenen Temperaturen beziehen sich auf die Meßstelle, die in halber Höhe des Ofens dicht an der Wandung des Porzellanrohres lag. Erfahrungsgemäß ist die Temperatur in der Längsachse des Ofens etwas geringer, besonders wenn, wie hier, eine gute Abdichtung nicht möglich ist. Bei den vorliegenden Versuchen kommt es auf die tatsächliche Höhe der Temperatur, die Zeitdauer der Glühung usw. nicht an, da Proben unter ganz gleichartigen Bedingungen miteinander verglichen sind. Wir haben somit eine Art Differentialverfahren gebraucht. Die in Fig. 8 bis 10 wiedergegebenen Versuche sind so geleitet, daß die Stäbe bis zur Mitte des Ofens rekristallisierten. Die Stäbe wurden etwa eine viertel Stunde auf Temperatur gehalten.

Wie Fig. 8 bis 10 zeigen, rekristallisieren nun unter Belastung stehende Proben merklich später als unbelastete. Der Unterschied wächst

---

* Die Anregung zu diesen Versuchen verdanken wir früheren Erörterungen mit Herrn Professor W. v. Moellendorff.

mit zunehmender Belastung, und anscheinend schneller als diese. Eine Belastung von 0,5 kg/mm² hat eine Verschiebung der Grenze zwischen rekristallisiertem und nicht rekristallisiertem Bereich zur Folge (Fig. 8),

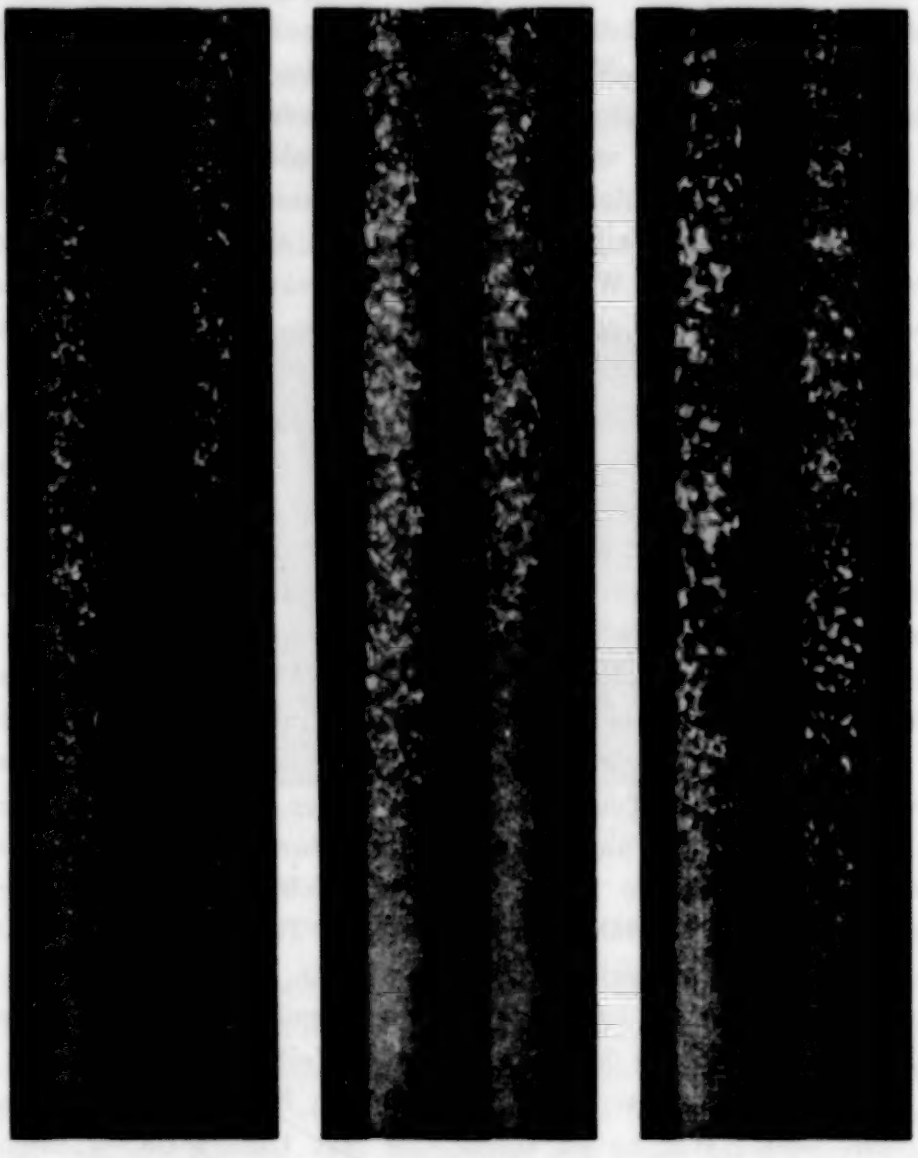


Fig. 8 bis 10. Einfluß von Belastungen während der Rekristallisation. (1,5 fach vergr.)

die einer Heraufsetzung der Rekristallisationstemperatur um etwa 5° entspricht, eine Belastung von 0,4 kg/mm² eine Verschiebung um etwa 2°.

Diese Abhängigkeit von der Belastung legt den Schluß nahe, daß es sich hierbei nicht um eine unmittelbare Wirkung der Belastung,

sondern um Wirkungen der dadurch hervorgerufenen Deformationen handelt. Bei den in Fig. 8 und 9 wiedergegebenen Proben konnten jedoch nur sehr geringe Verformungen eingetreten sein, die an der Grenze der Meßbarkeit lagen. Es wurde daher ein vorgedehnter Stab bei 390°

20 % kalt gedehnt | + 2 bis 3 % bei 390° C gedehnt

Fig. 11.
Einfluß einer Warmdehnung auf die Rekristallisation.
(Rekr. bei ∽ 410° C; 1,5fach vergr.)

20 % kalt gedehnt | + zerrissen bei 390° C (2 Ansichten)

Fig. 12.
Einfluß einer Warmdehnung auf die Rekristallisation.
(Rekr. bei ∽ 415° C; 1,5fach vergr.)

nochmals um etwa 2 bis 3 % (im fraglichen Bereich) gedehnt. Eine Rekristallisation war dabei nicht eingetreten. Die Folge war, wie Fig. 11 zeigt, eine so erhebliche Verminderung des Rekristallisationsvermögens,

daß der Stab unter gleichen Bedingungen wie die anderen Stäbe überhaupt nicht rekristallisierte.

Besonders anschaulich zeigt sich noch die Verringerung des Rekristallisationsvermögens durch zusätzliche Verformungen bei höheren Temperaturen an einem bei 390° zerrissenen Stab in Fig. 12. Erhitzung auf 410° ($^1/_2$ Stunde) bringt den bei Raumtemperatur um 20% gedehnten Vergleichsstab vollkommen zur Rekristallisation, während der warm zerrissene Stab im stark gedehnten Teile nur längs einer Zone und in dem ganz stark warm verformten Fließkegel rekristallisiert. Der kältere und daher wenig gedehnte Teil rekristallisiert dagegen fast wie der andere Stab.

Dabei zeigt noch Fig. 12, daß auch die Korngröße durch zusätzliche Warmverformungen vergröbert wird*.

Belastungen bei Temperaturen in der Nähe der Rekristallisationsgrenze haben also, soweit sie zu Verformungen führen, die Wirkung, daß dadurch der Rekristallisationszwang verringert wird. Dies äußert sich sowohl in einer Erhöhung der Rekristallisationstemperatur als auch einer Vergrößerung der neu entstehenden Kristalle. Dabei haben Warmverformungen für sich durchaus die Fähigkeit, eine Rekristallisation herbeizuführen, wenn auch in erheblich schwächerem Maße als Verformungen bei niedrigen Temperaturen**.

Wieweit die hier neu gefundenen Gesetzmäßigkeiten allgemeine Bedeutung besitzen, bedarf noch einer näheren Untersuchung. Wenn sie auch nicht im Widerspruch zu irgend einer Anschauung über die Rekristallisation stehen, so ist doch vorläufig keine Theorie vorhanden, die sie hätte voraussehen lassen. Man kann wohl sagen, daß die neuen Ergebnisse teilweise überraschend ausgefallen sind.

Wichtig erscheint besonders die Feststellung, daß das bei einer bestimmten Temperatur rekristallisierende Material eine sehr verschiedene Korngröße besitzen kann. Der Rekristallisationszwang, den eine Verformung in einem Stoff hervorruft, ist also durch zwei Komponenten gekennzeichnet, von denen die eine den Beginn der Rekristallisation, die andere die Häufigkeit der Bildung neuer Kristallkeime bestimmt. Ein

---

* In Fig. 12 ist die Größe der neu entstandenen Kristalle schlecht zu erkennen, da sie noch teilweise mit kleinen Kristallen bedeckt sind.

** R. Karnop und G. Sachs, a. a. O.

Bild, das diesen Forderungen gerecht wird, ist das einer Energieverteilung (Spannungsverteilung), die von Ort zu Ort nach statistischen Gesetzen in ihrer Größe wechselt und einerseits durch die Größe der Energiehäufungen, andererseits durch deren Verteilung gekennzeichnet ist*.

Für die Unterstützung unserer Untersuchungen sind wir der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft zu besonderem Danke verpflichtet.

---

* Vgl. G. Masing, a. a. O.; G. Sachs, Mech. Technol. d. Metalle, S. 220, Leipzig 1925.

Versuch über die Polarisationsfähigkeit eines Elektronenstrahls.

Von **Franz Wolf** in Danzig.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 18. Oktober 1928.)

Ein Elektronenstrahl müßte, falls die Elektronen magnetische Dipole sind, beim Durchgang durch ein Magnetfeld in einen gewissen Polarisationszustand geraten. Experimentelle Analyse eines solchen Strahls mit einer auf Elektronenreflexion beruhenden Anordnung zeigt keinen solchen Effekt.

Faßt man die Elektronen als magnetische Dipole auf, was sich beispielsweise sofort aus der Annahme des rotierenden Elektrons im Sinne von Goudsmit und Uhlenbeck ergibt, so ist es denkbar, daß, abgesehen von der einsetzenden Bahnkrümmung, die magnetischen Momente der Elektronen eines Strahls beim Durchgang durch ein magnetisches Feld die beiden Richtungen parallel oder antiparallel den Kraftlinien bevorzugen. Die Dipole könnten möglicherweise im wesentlichen nur diese beiden entgegengesetzten Richtungen im Raume einnehmen, und der Strahl müßte eine Art Polarisationszustand zeigen, wenn er ein Magnetfeld quer zur Kraftlinienrichtung durchsetzt*.

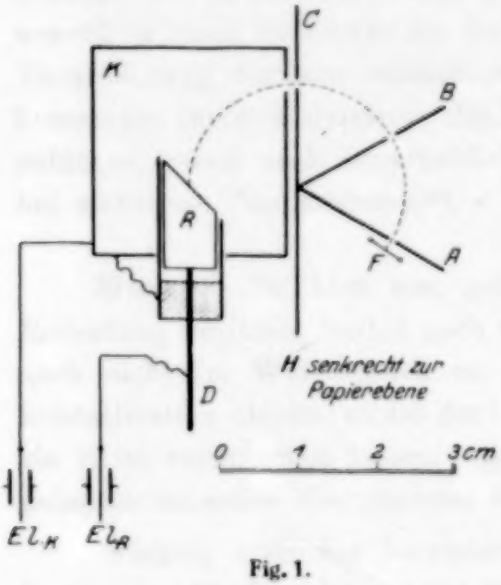


Fig. 1.

Sichere zahlenmäßige Voraussagen sind wegen unserer Unwissenheit über das Elektron nicht zu machen. Ich habe versucht, diesen Polarisationszustand experimentell aufzufinden, mußte aber feststellen, daß von einem solchen trotz verhältnismäßig großer Meßgenauigkeit mit der benutzten Anordnung keine Spur nachweisbar ist. Immerhin scheint mir der Versuch im Hinblick auf die Erforschung des Wesens der Elektronen interessant genug, um kurz mitgeteilt zu werden.

Glühelektrisch erzeugte Elektronen werden zwischen dem Wolframdraht *F*, Fig. 1, und der Lochblende *A* elektrisch beschleunigt und durch

* Bei klassischer Betrachtung könnte diese Richtwirkung allerdings durch die ungedämpften Pendelungen des Dipols verschleiert werden. Doch ist dieses Verhalten nach unserer heutigen Auffassung unwahrscheinlich.

ein homogenes, in Fig. 1 senkrecht auf der Papierebene stehendes Magnetfeld auf Kreisbahnen abgelenkt. Das Blendensystem A, B, C sondert einen Strahl einheitlicher Geschwindigkeit aus. Dieser Strahl soll gleichzeitig unter dem Einfluß des Magnetfeldes im obigen Sinne als polarisiert gelten, etwa so, daß die Elektronendipole im wesentlichen in die Richtung der magnetischen Kraft fallen. Als Analysator dieses Zustandes dient ein metallischer Reflektor R, der um eine in die Tangente der Elektronenbahn fallende Achse D drehbar ist. Der zylindrische Körper R ist unter 45° gegen die Mantellinien abgeschnitten und auf dieser Fläche spiegelglatt. Bei beliebiger Drehung des Reflektors um D fällt der Elektronenstrahl stets unter dem gleichbleibenden Einfallswinkel von 45° auf die Oberfläche auf. Nur die Lage der Dipole gegenüber der Reflektorfläche

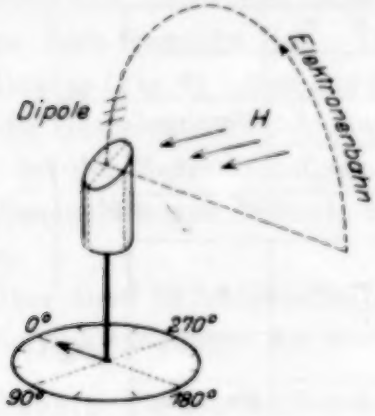


Fig. 2a.

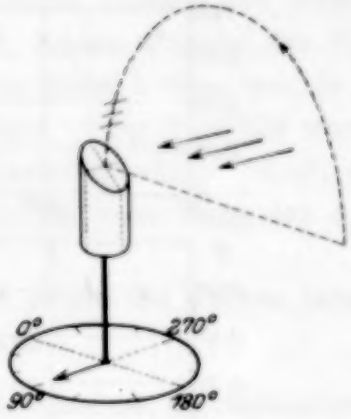


Fig. 2b.

beim Aufprall ändert sich durch Drehung um D. Bei der Stellung 0° in Fig. 2a ist nämlich die Dipolrichtung gegen die Fläche um 45° geneigt, während sie bei Einstellung 90° in Fig. 2b völlig in die Fläche fällt. Bei weiterer Verdrehung nach Stellung 180° und 270° wiederholen sich diese Fälle. Falls nun das Reflexionsvermögen der Metallfläche für Elektronen abhängig ist von der Neigung der Dipole gegen diese Fläche, so wäre für das Reflexionsvermögen bei fortgesetzter Drehung des Reflektors eine Kurve zu erwarten, die zwei Perioden pro Umdrehung macht, also etwa ein Verhalten vom Charakter der Kurve in Fig. 3.

Verwirklicht wurde diese Prüfung des Reflexionsvermögens am einfachsten durch Messung der auf dem Reflektor haftenden Elektronenmenge m, ausgedrückt in Einheiten der gesamten aus dem Blendensystem austretenden Menge M, also durch Bestimmung des Quotienten $q = \frac{m}{M}$. Zur Ausschaltung von Schwankungen in der Glühemission geschahen

beide hierfür nötigen Messungen gleichzeitig mit zwei Saitenelektrometern in der Schaltung der Fig. 1. Die reflektierte Menge selbst würde sich dann ergeben durch $1 - \frac{m}{M}$. Doch kann man ebensogut auch die haftende Menge q betrachten, da ja auch sie als Ergänzung zur Einheit zwei Perioden pro Umdrehung des Reflektors zeigen müßte.

Die Kurven in Fig. 4, 5 und 6 zeigen q als Funktion des Drehwinkels bei Reflektoren aus Messing, einer natürlichen Bleiglanzspalt-

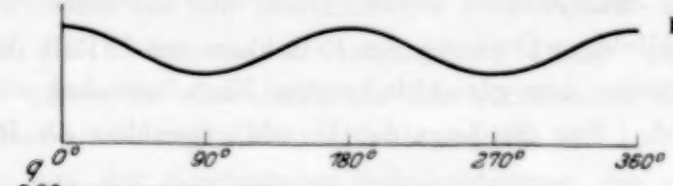


Fig. 3.

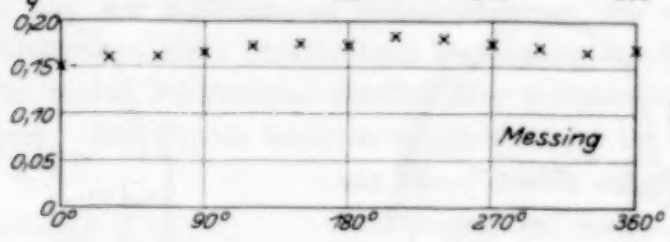


Fig. 4.

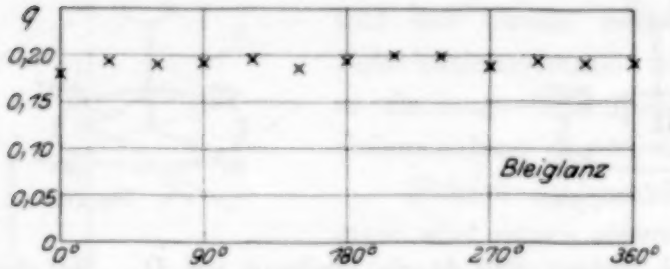


Fig. 5.

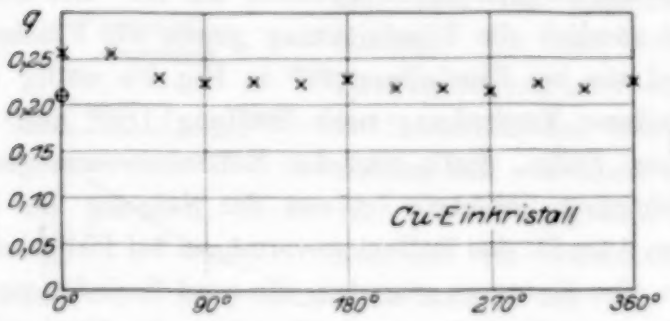


Fig. 6.

fläche und einem sorgfältig vorbehandelten Cu-Einkristall, den ich Herrn Dr. Hausser-Berlin verdanke. Kristalle wurden neben Messing deshalb herangezogen, um durch die Regelmäßigkeit im Bau ihrer Oberfläche die Schwankungen des Reflexionsvermögens möglicherweise zu vergrößern. Sämtliche Kurvenpunkte stellen Mittelwerte aus je 10 bis 12 wenig streuenden Einzelmessungen dar. Fig. 4 bezieht sich auf Elektronen von

10,05 Volt, die Fig. 5 und 6 auf solche von 9,24 Volt Geschwindigkeit, was den richtenden Magnetfeldern von 7,75 bzw. 7,43 Gauß entspricht. Bei kleineren Richtkräften zeigen die aufgenommenen Kurven ebenfalls keine Besonderheiten. Auf größere Felder läßt sich die Methode nicht anwenden, weil dann die Sekundärerzeugung von Elektronen einsetzt, die die Messungen gänzlich stört. Die Anordnung ist überhaupt außerordentlich empfindlich gegen Störungen aller Art. Sehr große Mühe macht allein schon die einwandfreie geometrische Justierung der verschiedenen Apparatteile. Letzte Reste solcher geometrischer Fehler machen sich in den Figuren 4, 5 und 6 bemerkbar. Außerdem ergeben die Messungen immer erst dann konstante Werte, wenn die anfänglich stets auf der Reflektorfläche lagernde Gasbeladung durch längeres, starkes Beschießen mit Elektronen unter gleichzeitigem Pumpen und Kühlen mit flüssiger Luft beseitigt ist. Die ersten beiden Punkte der Cu-Einkristallkurve (Fig. 6) fallen aus der übrigen Reihe heraus, weil in diesem Falle die Gasbeladung zu Anfang noch nicht völlig beseitigt war. Der am Schluß der Meßreihe aufgenommene Kontrollpunkt ⊕ bei 0^0, der aus fünf Einzelmessungen besteht, beweist die zu hohe Lage der Anfangspunkte.

Über diese Meßunsicherheiten hinaus zeigen die Kurven tatsächlich keinerlei Schwankungen der erwarteten Art.

Danzig, Physik. Institut der Techn. Hochschule, 30. September 1928.

Experimentelle Beiträge zur Radiometerfrage.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von **E. Brüche** in Berlin und **W. Littwin** in Danzig.

Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 28. September 1928.)

Es wurde ein Meßradiometer gebaut, bei dessen Konstruktion besonderer Wert darauf gelegt wurde, einfache und definierte geometrische und thermische Verhältnisse zu erlangen. Mit diesem Instrument wurden die Radiometerkurven der 12 Gase He, Ne, Ar, H_2, O_2, N_2, Luft, CO, NO, CO_2, N_2O und CH_4 unter verschiedenen Bedingungen durchgemessen. Die Hauptresultate sind folgende: Im Gebiet kleiner Drucke ist der Radiometereffekt ein Flächeneffekt, unabhängig von der Gasart und den geometrischen Verhältnissen, allein der in der Raumeinheit vorhandenen Anzahl von Molekeln proportional. Im Gebiet mittlerer Drucke tritt bei jedem Gase ein Maximum des Effekts auf, welches sich in Druck- und Höhenlage der freien Weglänge direkt proportional erweist. Im Gebiet großer Drucke ist der Effekt ein Randeffekt, der dem Quadrat der freien Weglänge direkt und dem Druck umgekehrt proportional ist.

Vorbemerkung. Vom Herbst 1926 bis Winter 1927/28 haben wir im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Danzig eine eingehende Radiometeruntersuchung durchgeführt, welche infolge unserer Übersiedlung in diesem Frühjahr (Brüche zum AEG-Forschungsinstitut Berlin, Littwin zum Meteorologischen Observatorium Danzig) bisher nicht veröffentlicht werden konnte*. Da wir auch jetzt noch nicht wissen, wann wir zur vollständigen Verarbeitung des großen Materials kommen werden, die Radiometerfrage aber, wie es eine Reihe neuerer theoretischer** und experimenteller*** Arbeiten zeigt, wieder mehr Interesse begegnet, haben wir uns zu einer längeren vorläufigen Mitteilung entschlossen. Diese Mitteilung soll die Grundgedanken der experimentellen Anordnung und Durchführung, die experimentellen Hauptergebnisse und die Hauptfolgerungen aus den experimentellen Ergebnissen behandeln.

---

* Ein Auszug dieser Untersuchung wurde von dem einen von uns (Littwin) der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Danziger Technischen Hochschule als Diplomarbeit am 7. Januar 1928 eingereicht.

** E. Einstein, Ann. d. Phys. **69**, 241, 1922; G. Hettner, ZS. f. Phys. **16**, 345, 1923; **27**, 12, 1924; **37**, 179, 1926; A. Einstein, ebenda **27**, 1, 1924; A. Sternthal, ebenda **39**, 341, 1926; Th. Sexl, Ann. d. Phys. **80**, 515, 1926; **81**, 179, 1926 und andere Arbeiten.

*** H. E. Marsh, E. Condon, L. B. Loeb, Journ. Opt. Soc. Amer. **11**, 257, 1925; H. E. Marsh, ebenda **12**, 135, 1926; J. Bleibaum, Dissertation Tübingen 1926. Es sei bemerkt, daß wir auf diese Dissertation, die in keiner Zeitschrift veröffentlicht worden ist, erst im Sommer 1928 bei Niederschrift unserer Arbeit durch das Zitat in folgender Mitteilung aufmerksam gemacht worden sind: ZS. f. Phys. **49**, 590, 1928.

Grundgedanken der experimentellen Anordnung und Durchführung.

Als wir zu Beginn unserer Untersuchungen die einschlägige Literatur durchsahen, schien es uns, daß man zwei naheliegende Wege zur Behandlung des Radiometerproblems nicht genügend verfolgt hatte: die Variation der Untersuchungsgase* und besonders die Vereinfachung der Versuchsbedingungen. Wir haben uns daher insbesondere diesen beiden Aufgaben zugewandt, während wir uns mit der modernen Anschauung des Randeffekts nur ergänzungsweise beschäftigten.

Ein Teil der bisher zu Meßzwecken benutzten Radiometer ist entweder vollständig oder doch im Prinzip dem des bekannten Demonstrationsflügelrades gleich. Es wird bei ihnen eine (meist einseitig berußte) Folie von einer Seite her bestrahlt. Dadurch tritt dann an ihren beiden Außenflächen ein Temperaturunterschied auf, der im verdünnten Gase eine Druckwirkung zur Folge hat. Gegen die Verwendung einer solchen Einrichtung zu Meßzwecken spricht besonders, daß man weder etwas Genaues über die Größe der sich ausbildenden Temperaturdifferenz aussagen kann, noch daß diese Temperaturdifferenz in ihrer Größe erhalten bleibt**, wenn der Gasdruck des wärmeableitenden Gases verändert wird. Gerade die Berücksichtigung dieser zuletzt genannten Erscheinung halten wir aber für besonders wichtig, wenn man einfache Versuchsbedingungen schaffen will, ein Gesichtspunkt, auf den uns bei einer Reihe experimenteller Arbeiten über diesen Gegenstand nicht genügend geachtet zu sein scheint.

Ganz allgemein strebten wir im Gegensatz zu den oben erwähnten Anordnungen dreierlei an: definierte geometrische Verhältnisse, definierte thermische Verhältnisse und ständige Aufrechterhaltung dieser Verhältnisse während der Messung.

Prinzip der Anordnung. Das Prinzip der Anordnung des von uns benutzten Meßradiometers ist schematisch in Fig. 1 dargestellt. Die drei planen Platinflächen von 0,01 mm Dicke (warme Fläche W, kalte Fläche K und trennende Fläche T) sind parallel zueinander angeordnet und in ihrer gegenseitigen Entfernung verstellbar. Fließt

---

* Die uns inzwischen bekannt gewordene, unter *** (s. vorige Seite) zitierte Arbeit von J. Bleibaum bedeutet in diesem Sinne einen großen Fortschritt.

** So ist hierin z. B. auch der Grund für das Auftreten einer schwer deutbaren Erscheinung, des „negativen Radiometereffekts", zu suchen. (Vgl. W. Gerlach und W. Westphal, Verh. d. D. Phys. Ges. **21**, 218, 1919 und W. Gerlach und A. Golson, Ann. d. Phys. **73**, 624, 1924.)

durch die dünne Folie W ein erwärmender elektrischer Strom, während die Folie K vermittelst guter Wärmeableitung auf normaler Temperatur gehalten wird, so wird sich zwischen W und K ein Temperaturgefälle ausbilden. Infolge der verschiedenen Temperaturen von W und K wird (jedenfalls in dem einfachsten Falle kleiner Drucke) von W her eine Schar schneller, von K her eine Schar langsamer Molekeln auf T aufprallen, so daß auf T eine Druckkraft in Richtung K resultiert. Diese auf die Flächeneinheit bezogene Kraft wollen wir Radiometerdruck nennen.

Bei einem System dieser Art werden ganz einfache Druck- und Temperaturverhältnisse nur bei unendlicher Plattenausdehnung vorhanden sein. Ist die Plattenausdehnung dagegen endlich wie in unserem speziellen Falle, so wird man nur in den mittleren Bereichen, in denen kein Randeinfluß mehr auftritt, mit genügender Definiertheit rechnen können. Aus diesem Grunde haben wir auch nicht die Kraftwirkung auf die ganze Trennfläche gemessen, sondern aus ihrer Mitte ein Stück von 1 cm² Größe, den Meßflügel M ($10 \times 10 \times 0{,}01$ mm), herausgeschnitten und mit einer besonderen Einrichtung zur Kraftmessung versehen. Dieser kleine vom „Schutzring“ umgebene Meßflügel war an einem dünnen Platindraht als Wagebalken angebracht. Bei einer Tendenz, sich aus der Ruhelage herauszubewegen, konnte durch Tordieren des Aufhängefadens mittels einer von außen zu bedienenden magnetischen Anordnung ein Gegenmoment erzeugt und so die Verstellung rückgängig gemacht werden. Es blieben also auch bei der Messung die einfachen geometrischen und thermischen Anfangsbedingungen vollständig erhalten. Zur Verdeutlichung des Gesagten ist in Fig. 2 eine Photographie der ganzen Anordnung nach Abnahme der Rezipientenglasglocke wiedergegeben. Es sind Flügel mit Schutzring, Warm- und Kaltfläche (letztere aus zufälligen Gründen kleiner als Warmfläche und Schutzring) und die magnetische Torsionseinrichtung zu erkennen.

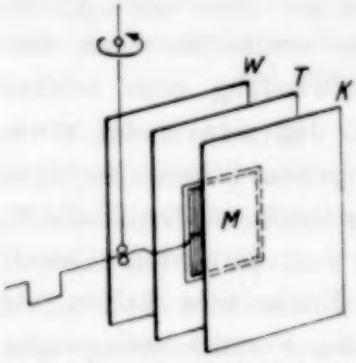


Fig. 1. Schema des Meßradiometers.

Prinzipielles zur Durchführung. Unser wichtigster Gesichtspunkt bei der Durchführung der Messungen ergibt sich aus folgender Überlegung: Lassen wir durch die Platinfolie W einen konstanten Strom fließen, so wird sich für jeden Druck infolge der Wärmeleitung des verschieden dichten Gases eine andere Temperatur einstellen.

Ebenso wie bei den Rußflügelradiometern wird also in der Kurve, welche die Druckabhängigkeit des direkt gemessenen Radiometereffekts darstellt, noch ein zweiter Einfluß stecken, welcher sekundärer Natur und daher mit dem gesuchten Radiometerdruck offensichtlich direkt nichts zu tun hat. Unsere Anordnung war nun so gewählt, daß wir diesen Einfluß ausschalten konnten. Zu diesem Zwecke wäre der Heizstrom stets so zu wählen, daß bei der Druckänderung die Temperatur von W erhalten bliebe. Bei der Mehrzahl der Versuche sind wir aus Bequemlichkeitsgründen etwas anders vorgegangen. Wir ließen nämlich den Heizstrom konstant, maßen jedoch die Temperatur an dem Spannungs-

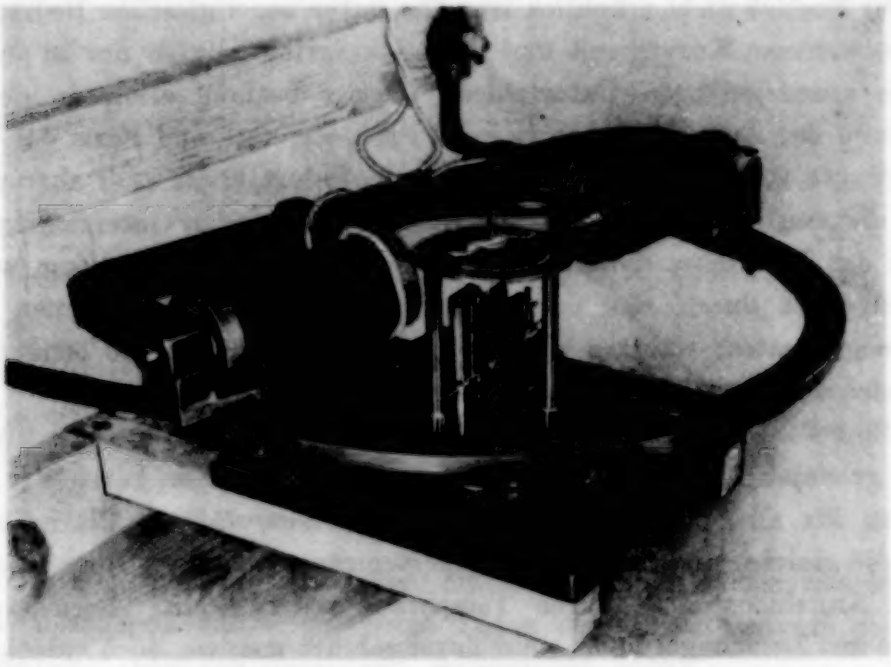


Fig. 2.

Photographische Ansicht des Meßradiometers bei abgenommener Rezipientenglocke.

abfall in der Heizfolie mittels besonderer Meßdrähte und einer empfindlichen Brückenschaltung und rechneten schließlich unsere direkt gemessenen Radiometerwerte auf bestimmte gleiche Temperatur von W um.

Die Messung eines Radiometerpunktes erfolgte also in folgenden Schritten:

a) Wahl der Versuchsbedingungen, z. B. Gas: H_2; Druck: $25 . 10^{-4}$ mm; Plattenabstände: 5 mm/5 mm; Heizstrom: 1,0 Amp. — Ausschlag des Meßflügels.

b) Zurückdrehen des Flügels in die ursprüngliche Lage. — Ablesung des Torsionswinkels am Torsionskopf. — Nachregulieren nach gewisser Wartezeit, sobald Temperaturausgleich eingetreten ist.

c) Messung des Spannungsabfalls in der Heizfolie mit der Brücke und Errechnung der Folientemperatur.

d) Errechnung des Radiometerdrucks für 1^0 Temperaturdifferenz unter Benutzung von b) und c).

Abweichungen vom Prinzip. Wir glaubten ursprünglich — wie es auch in der Darstellung des Prinzips beibehalten ist —, daß die Anordnung der Trennfläche als Schutzring für den Meßflügel sehr wichtig sei. Im Laufe der Untersuchung überzeugten wir uns indessen davon, daß der Einfluß nicht erheblich ist. Die unter sonst gleichen Bedingungen aufgenommenen Kurven mit und ohne Schutzring zeigten nur in gewissen Fällen einen geringen Unterschied. Dieser bestand allein in der Veränderung der Kurvenhöhe um wenige Prozente, während Form der Radiometerkurve und Drucklage praktisch ungeändert blieben. Daher werden auch die von uns gefundenen, später zu besprechenden Gesetzmäßigkeiten durch das Fortlassen der Trennwand nicht beeinflußt. Nachdem wir uns hiervon noch durch eine besondere Meßreihe mit verschiedenen Gasen überzeugt hatten, wählten wir für die Hauptmessungen die bequemer zu behandelnde Anordnung ohne Trennwand.

Eine Fehlerquelle muß noch kurz erwähnt werden, die möglicherweise einen gewissen Einfluß auf unsere Messungen gewonnen hat. Wir haben nämlich für alle unsere Messungen angenommen, daß die Platinfläche K stets die gleiche, und zwar die Zimmertemperatur habe. Eine Kontrolle dieser Annahme, etwa durch Temperaturmessung mit Thermoelement, konnte aus Zeitmangel nicht mehr durchgeführt werden, doch sprechen die Resultate dafür, daß der Fehler jedenfalls nicht groß geworden ist.

Wir wollen an dieser Stelle noch ausdrücklich bemerken, daß wir uns zwar bemüht haben, definierte Messungen durchzuführen, doch sind wir uns wohl bewußt, keine fehlerfreie Präzisionsuntersuchung ausgeführt zu haben.

Experimentelle Hauptergebnisse.

Mit der in vorstehendem Abschnitt skizzierten Anordnung wurden nach Ausführung verschiedener Vorversuche und der notwendigen Eichungen Messungen der Radiometerkraft in folgenden Variationen ausgeführt:

a) Druckvariationen, b) Abstandsvariationen,
c) Gasvariationen, d) Flügelvariationen.

Zu a) Druckvariationen. Die Radiometerkurven wurden im allgemeinen in dem Druckbereich von $^5/_{1000}$ bis $^5/_{10}$ mm Quecksilbersäule durch eine große Zahl von Einzelmengen festgelegt, während wir sie in einigen Ausnahmefällen sogar über das ganze unmittelbar zugängliche Druckgebiet von $^1/_{10000}$ bis 760 mm verfolgten. Eine besonders sorgfältig festgelegte unreduzierte Kurve für Luft, die sich über den normalen Bereich erstreckt (Abstände beiderseits rund 10 mm), zeigt Fig. 3. Sie ist wie üblich über der logarithmischen Druckskale aufgetragen, wodurch gleich gute und gleich genaue Übersicht über alle Druckbereiche erreicht wird (gleiche prozentuale Genauigkeit in der Abszisse). Bemerkt sei zu

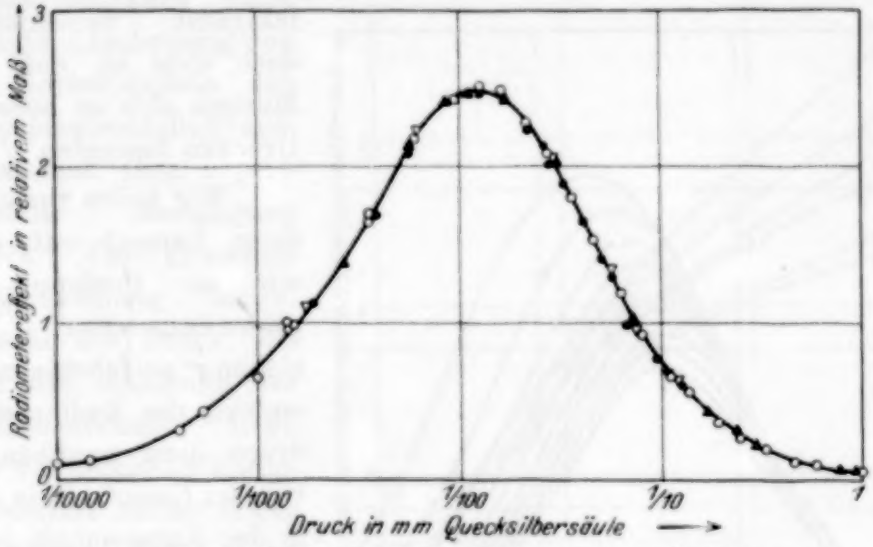


Fig. 3. Unreduzierte Radiometerkurve mit Meßpunkten.

der Kurve noch, daß die durch die verschiedenartigen Zeichen markierten Punkte Messungen an verschiedenen Tagen darstellen, wodurch die gute Reproduzierbarkeit der Messungen verdeutlicht wird*.

Zu b) Abstandsvariationen. Derartige Variationen der Abstände zwischen Flügel, kalter und warmer Fläche wurden in verschiedenen Gasen durchgeführt. Eine besonders eingehend aufgenommene Reihe reduzierter Kurven zeigt Fig. 4**. Bei diesen Messungen betrug der Abstand zwischen Flügel und kalter Fläche 13 mm, während der Abstand der warmen Fläche vom Flügel von Kurve zu Kurve verändert wurde, und zwar von 0,5 bis 9,5 mm in Sprüngen von 1 mm. Die Kurvenschar

* Wir zeigen hier so ausführlich die Genauigkeit der Messungen, um in späteren Fällen, wo die Angabe von Punkten darstellerisch ungünstig (wie bei mehreren Kurven in einem Diagramm) oder schwierig (wie bei reduzierten Kurven, die sich aus zwei Punktfolgen zusammensetzen) ist, die Einzelpunkte fortlassen zu können.

** Vgl. Anm. *.

zeigt, daß eine Annäherung der warmen Fläche bei kleinen Drucken praktisch einflußlos ist, während der Effekt bei großen Drucken das Mehrfache wird, wenn der Abstand von 10 auf z. B. 0,5 mm verkleinert wird. Für die Druck- und Höhenlage des Maximums bedeutet das eine Verschiebung zu größeren Werten.

Zu c) Gasvariationen. Ausgedehnt wurden die Messungen auf die 12 Gase: He, Ne, Ar, H_2, O_2, N_2, Luft, CO, NO, CO_2, N_2O und CH_4. Die Messungen wurden sogleich reduziert, wodurch sich die Maxima der Höhe und der Drucklage nach verschoben. Die Verschiebung erfolgte für die verschiedenen Gase entsprechend der verschiedenen Wärmeleitfähigkeit verschieden, doch stets so, daß die Maxima sich zu höheren Drucken bewegten.

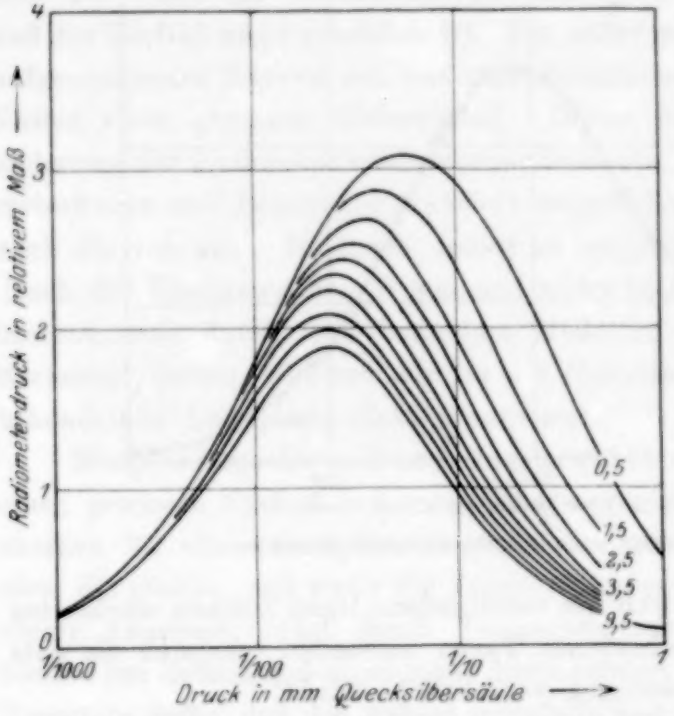


Fig. 4. Einfluß der Abstandsänderung zwischen Meßfläche und warmer Wand.

Wir teilen zunächst einen Versuch mit, den wir zur Prüfung der „Knudsenschen Beziehung" ausführten, nach welcher der Radiometerdruck dann unabhängig von der Gasart allein der in der Raumeinheit vorhandenen Anzahl von Molekeln proportional sein soll, wenn die freie Weglänge gegenüber den Raumdimensionen groß ist. Die bei kleinen Drucken (also vor dem Maximum) gelegenen Anfangsäste der reduzierten Radiometerkurven* sind in Fig. 5 einfach linear aufgetragen. Die Darstellung zeigt das Zusammenlaufen des Kurvenbündels bei Annäherung an den Nullpunkt und den schließlichen Übergang in eine einzige Kurve, deren Tangente die Knudsengerade ist. Allein die gestrichelt angedeuteten Kurven von H_2 und He scheinen eine gewisse Sonderstellung einzunehmen, was wahrscheinlich mit dem Akkommodationskoeffizienten in Zusammenhang steht. Dafür spricht, daß dieser zu schwache Anfangs-

* Vgl. über die Fortlassung von Meßpunkten S. 323, Anm. *.

anstieg von He und H_2 steiler wurde, nachdem wir sämtliche Platinteile mit Platinmohr elektrolytisch beschlagen hatten. Sieht man von der Sonderstellung dieser beiden Gase ab, so können unsere Messungen an der großen Zahl sonstiger Gase (Ne, Ar, O_2, N_2, Luft, CO, CO_2, N_2O, CH_4) als Bestätigung der Knudsenschen Beziehung angesehen werden.

In dem Maximumgebiet, d. h. in dem Gebiet mittlerer Drucke, war zunächst ohne Reduktion der Temperaturdifferenz kein Zusammenhang mit irgendwelchen Gaskonstanten erkennbar. Ein solcher zeigte sich dagegen sogleich, nachdem auf gleiche Temperaturdifferenz umgerechnet worden war, wodurch unsere eingangs stark betonte Anschauung von der Notwendigkeit, den „Temperatureinfluß" auszuschalten, ihre experimentelle Bestätigung findet. Der gefundene Zusammenhang lautet: Sowohl der Druck, bei dem das Maximum der Radiometerkurve liegt, wie die maximale Radiometerkraft ist der freien Weglänge des Gases direkt proportional. Es zeigt das Fig. 6, in der für eine bestimmte Reihe zusammengehöriger Kurven (Abstände: $\overline{MK} = 9{,}5$ mm, $\overline{MW} = 9{,}5$ mm) die Drucklagen des maximalen Radiometereffekts (Abszissen der Maxima von Fig. 5) und ihre Größen (Ordinaten der Maxima von Fig. 5) in relativem Maße über der freien Wellenlänge aufgetragen sind. Die Versuchspunkte lassen, obwohl sie zum Teil etwas streuen*, die linearen Zusammenhänge deutlich erkennen.

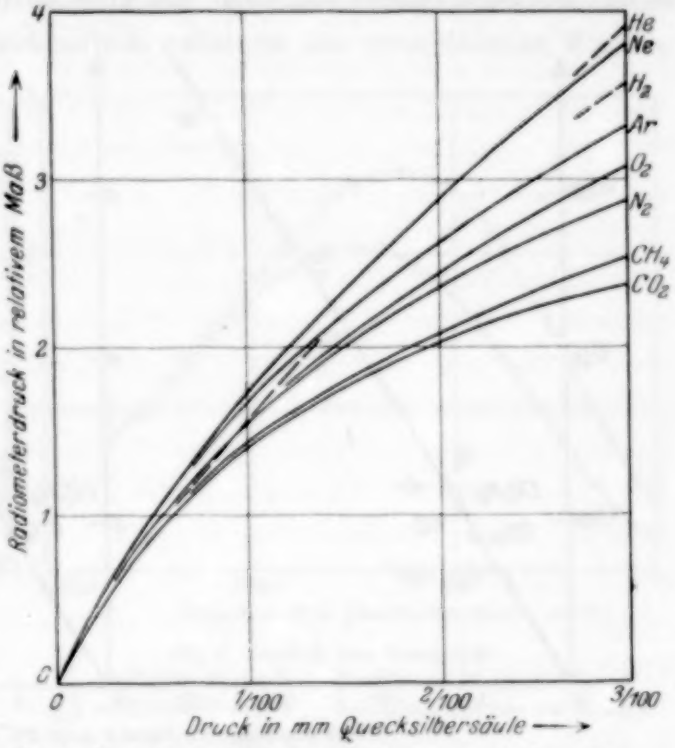


Fig. 5. Verlauf der Radiometerkurven verschiedener Gase bei großem Druck.

* Wir glauben nicht, daß dieser Streuung eine besondere Bedeutung zugemessen werden darf, vielmehr vermuten wir den Einfluß von Versuchsfehlern. So wäre z. B. an die schon eingangs (S. 322) erwähnte Fehlerquelle zu denken, die in einer unberücksichtigten Erwärmung der „kalten" Fläche besteht. Gerade für diese letzte Fehlermöglichkeit spricht, daß die Punkte von H_2 und He besonders herausfallen.

Zu d) Flügelvariationen. Die Flügelvariationen, die wir, wie erwähnt, nur als Ergänzung ausführten, bestanden in folgendem: Bei einer Reihe von Versuchen änderten wir die bei den meisten Messungen blanken Oberflächen der Platinfolien, indem wir Platinmohr auf ihr niederschlugen. Eine wesentliche Veränderung der Kurven erhielten wir nicht. — Bei einem weiteren Versuch ersetzten wir den Platin- durch einen Glimmerflügel gleicher Fläche. Auch hier fanden wir die Kurven kaum geändert. — Versuche mit derart schief in den Schutzring eingesetzten Platinflügeln, daß der Flügel nur mit der mittleren Horizontalen in der Schutzringebene lag, während er oben und unten aus dieser Ebene

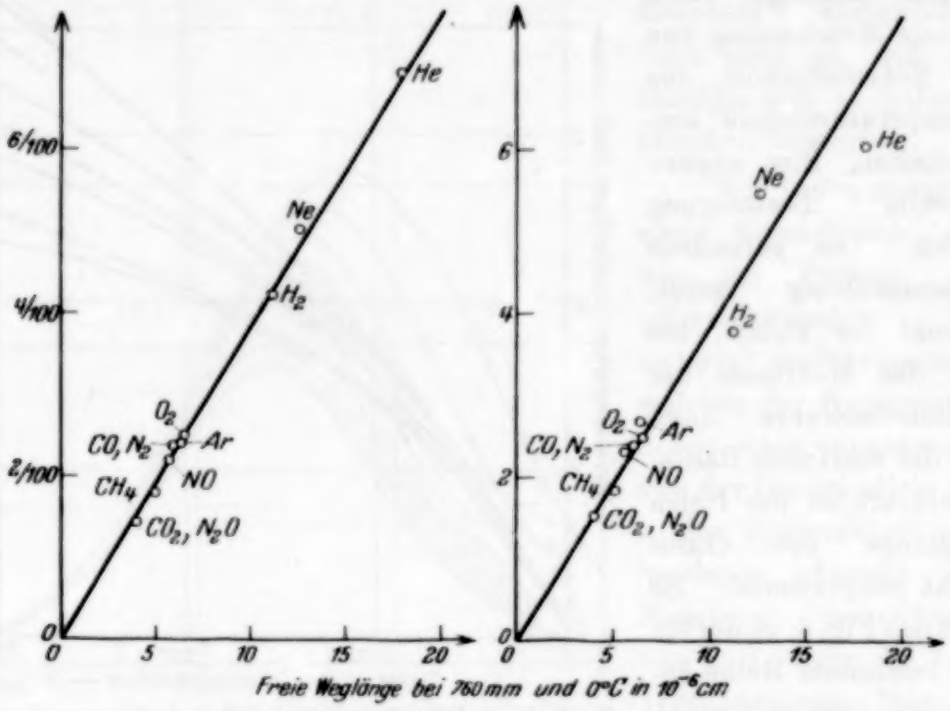


Fig. 6.
Drucklage in Millimetern Höhenlage in relativem Maß
der Maxima reduzierter Radiometerkurven in Abhängigkeit von der freien Weglänge.

herausgedreht war, ergaben ebenfalls keine merklichen Unterschiede. — Allein die Vergrößerung des Flügelrandes gegenüber der Flügelfläche erwies sich von Bedeutung. Zu diesem Versuch hatten wir aus dem Flügel schmale Streifen von etwa 1 mm Breite herausgeschnitten, so daß der Flügel eine kleinere Fläche, aber einen größeren Rand erhielt. Wir fanden bei Umrechnung auf gleiche Flügelfläche*, wie es die reduzierten

* Diese Umrechnung ist natürlich, da der Effekt von der Absolutgröße des Flügels nicht einfach abhängt, nicht exakt, scheint uns aber zur Veranschaulichung des Randeinflusses besonders günstig zu sein.

Kurven der Fig. 7 zeigen, daß der Effekt bei größerem Rande dann wesentlich größer wird, wenn man ins Gebiet höherer Drucke kommt, während bei kleinsten Drucken kein Einfluß bemerkbar ist.

Hauptfolgerungen aus den experimentellen Ergebnissen.

Gebiet kleiner Drucke und freie Weglänge. Wie bereits gezeigt wurde, bestätigen unsere Kurvenäste im Gebiet kleiner Drucke die Knudsensche Beziehung, nach welcher der Radiometereffekt unabhängig von der Natur der Gasmolekeln linear mit dem Drucke wächst. Diese einfache Abhängigkeit kann natürlich nur so lange erfüllt sein, als die Molekeln ohne viel Zwischenstöße zwischen den verschiedenen Wänden hin und her pendeln, d. h. solange die freie Weglänge gegenüber den Raumdimensionen groß ist. Diese Grenze der Beziehung zeigen unsere Kurven in mehrfacher Weise bei den Gas- und Abstandsvariationen. Zunächst ergibt die Fig. 5, daß die Abweichung der Radiometerkurve von der Knudsenschen Gerade bei Gasen großer Weglänge (z. B. Ne mit $\lambda = 9{,}6$ cm bei 10^{-3} mm Druck) erst bei relativ hohen Drucken, bei Gasen kleiner freier Weglänge (z. B. CO_2 mit $\lambda = 3{,}0$ cm bei 10^{-3} mm Druck) schon bei relativ kleinen Drucken erfolgt. Dasselbe zeigt Fig. 6 durch die Maximumslagen und -höhen, denn eine Kurve wird ein in Abszisse und Ordinate um so höher gelegenes Maximum haben, je länger sie sich der vom Koordinatenursprung zu höchsten Werten ansteigenden Knudsengeraden anschmiegt. Betrachten wir schließlich die Abstandsvariationen in Fig. 4. Die Darstellung ist hier ganz entsprechend wie in Fig. 5, nur daß die Auftragung logarithmisch erfolgt ist. Aus der „Knudsenschen Geraden“ ist eine logarithmische Linie geworden, in die alle Kurven bei Übergang zu kleinen Drucken schließlich einmünden, und zwar bei um so kleineren Drucken, je größer der Abstand ist. Es verhält sich also ähnlich: Großer

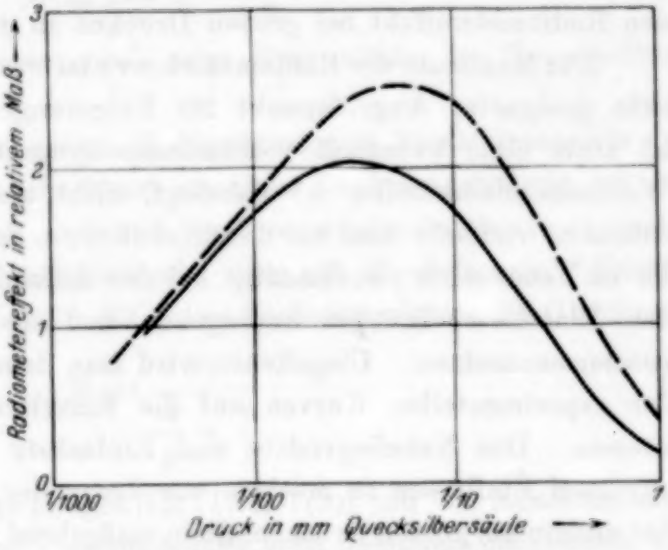


Fig. 7. Einfluß der Randgröße.
□ = Fläche 60 mm², Randlänge 30 mm (———)
⊟ = Fläche 60 mm², Randlänge 104 mm (— — —)

Abstand bei großer freier Weglänge und kleiner Abstand bei kleiner freier Weglänge, d. h. es kommt auf das Verhältnis von Abstand zu freier Weglänge an.

Gebiet großer Drucke und freie Weglänge. Wie eingangs ausgeführt, hofften wir, durch unsere Messungen, bei denen wir auf geometrische und thermische Definiertheit besonderen Wert legten, erstens zu einfachen experimentellen Zusammenhängen und zweitens zu prinzipiellen Aussagen über den Radiometereffekt bei hohen Drucken zu kommen. Nachdem die erste Hoffnung bezüglich der Zusammenhänge sich erfüllt hat, wollen wir jetzt versuchen, auf der Grundlage dieser experimentellen Zusammenhänge zu den weiterhin erhofften Aussagen über den Radiometereffekt bei großen Drucken zu gelangen.

Das Maximum der Radiometerkurve ist unserer Ansicht nach zunächst kein geeigneter Angriffspunkt für Folgerungen. Die Radiometerkurve ist trotz einer eventuell vorhandenen Symmetrie, die den Ansatz einer Wahrscheinlichkeitskurve* nahelegt, nicht als etwas Einheitliches aufzufassen, vielmehr muß sie durch mehrere Erscheinungen bedingt sein. Es ist daher auch zweckmäßig, bei der Aufstellung einer Gleichung von den Einzelerscheinungen auszugehen und sie zu der Radiometerkurve zusammenzusetzen. Umgekehrt wird man dann eventuell aus den Daten der experimentellen Kurven auf die Einzelerscheinungen rückschließen können. Das Naheliegendste und Einfachste ist es, die Annahme von nur zwei Einflüssen zu machen, von denen der eine bei kleinen Drucken, der andere bei großen Drucken allein maßgebend ist, während das Maximum durch ihre Zusammenwirkung entsteht. Wir benutzen dazu die Kenntnis über das Anfangsgebiet, d. h. das Knudsensche Gesetz und unsere experimentell gefundenen Zusammenhänge über die Maxima.

a) Für das Gebiet kleiner Drucke gilt das Knudsensche Gesetz:

$$R\big|_{\lim p \to 0} = \frac{p}{a}, \tag{1}$$

wobei R den Radiometerdruck, p den Gasdruck bedeutet und $1/a$ die Neigung der Knudsengeraden ist.

b) Für das Gebiet mittlerer Drucke gelten die experimentell gefundenen Beziehungen der Maximumsgröße R_m und Maximumslage p_m zur freien Weglänge λ mit A und B als Proportionalitätskonstanten:

$$R_m = A \cdot \lambda, \quad p_m = B \cdot \lambda. \tag{2}$$

* Vgl. z. B. W. Westphal, ZS. f. Phys. 1, 92, 1920.

c) Für das Gebiet hoher Drucke* nimmt erfahrungsgemäß der Effekt immer mehr und mehr, und zwar asymptotisch ab.

Die Abhängigkeiten a) und b) sind durch die Gleichungen (1) und (2) formelmäßig festgelegt und daher unmittelbar verwendbar. Die Abhängigkeit c) müssen wir dagegen erst in eine mathematische Gestalt bringen. Es kämen hauptsächlich in Betracht die Exponentialfunktion und die Polytrope. Wählen wir willkürlich die letztere in der einfachsten Form der Hyperbel (Polytropenexponent 1). Wir nehmen also die einfachste (einkonstantige) Formel an, sind uns jedoch bewußt, daß diese Annahme ihre eigentliche Berechtigung nur durch den Erfolg finden kann. Der Ansatz lautet:

$$R|_{\lim p \to \infty} = \frac{b}{p}, \tag{3}$$

wobei b die möglicherweise noch vom Gase abhängige Hyperbelkonstante ist.

Zur Darstellung der ganzen Radiometerkurve kombinieren wir nun die Gleichungen (1) und (3) derart zu einer Funktion, daß sie bei Annäherung an die Grenze $p = 0$ und $p = \infty$ wieder in die Grenzgesetze (1) und (3) übergeht. So erhalten wir, wenn wir die einfachste** Kombinationsmöglichkeit wählen, für die ganze Radiometerkurve die Gleichung:

$$R = \frac{1}{\frac{a}{p} + \frac{p}{b}}. \tag{4}$$

Die beiden Grenzgleichungen [Gl. (1) und (3)] und ihre Kombinationen [Gl. (4)] sind in Fig. 8 zur Verdeutlichung noch besonders dargestellt, und zwar sowohl im doppeltlinearen als auch im logarithmisch-linearen System.

---

* Natürlich beziehen sich die Bezeichnung „hohe Drucke" bzw. das Symbol „$p \to \infty$" nur auf dasjenige Druckgebiet, das unserem Untersuchungsgebiet nicht allzu fern liegt. Es kann sehr wohl sein, daß bei noch höheren Drucken, z. B. bei Atmosphärendruck abermals andere Gesetzmäßigkeiten gültig werden.

** Eine allgemeinere Zusammensetzung, deren Spezialzahl $n = 1$ [Gleichung (4)] ist, lautet:

$$R = \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{a}{p}\right) + \left(\frac{p}{b}\right)^n}}.$$

Die neu eingeführte dritte Konstante n macht es möglich, eine noch wesentlich weitgehendere Angleichung an die experimentelle Kurve zu erreichen. Im besonderen läßt es sich durch geeignete Wahl von n erreichen, daß das Maximum — je nach Bedarf — spitzer oder flacher wird, ohne daß die nach beiden Seiten absteigenden Äste merklich verändert werden. Von der Durchführung einer derartigen verfeinerten Darstellung glaubten wir indessen unter Hinblick auf die Versuchsfehler absehen zu sollen. (Vgl. S. 325, Anm. *.)

Es ist bemerkenswert, daß Gleichung (4) die Bedingung der Symmetrie, die die Radiometerkurve nach Westphal* im linear-logarithmischen Diagramm zeigen soll, ebenfalls erfüllt. Eine Veränderung von b (a ist ja nach Knudsen für alle Gase als konstant anzunehmen) bedingt nur eine Verschiebung des Maximums nach Höhe und Drucklage bei Erhaltung der Symmetrie**.

Wie diese sehr einfache Beziehung die experimentelle Kurve darstellt, zeigt Fig. 9, in die ausgezogen eine experimentelle, gestrichelt eine durch Formel dargestellte Kurve eingetragen ist, die der experimentellen durch geeignete Wahl der Konstanten möglichst angeglichen wurde. Die

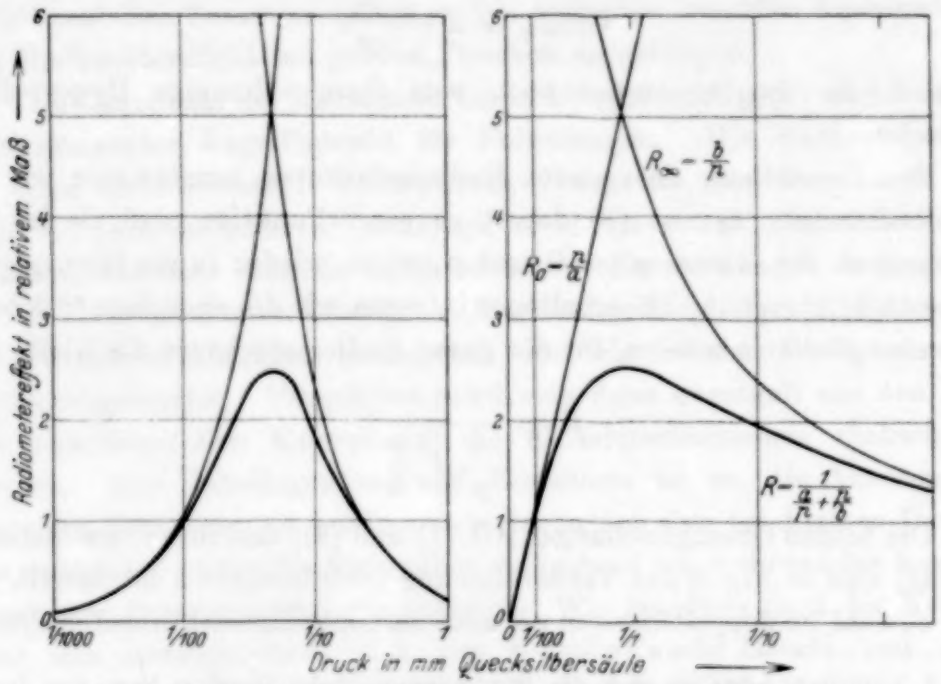


Fig. 8. Die aus Gerade und Hyperbel zusammengesetzte Radiometerkurve im logarithmisch-linearen Diagramm, im linear-linearen Diagramm.

Übereinstimmung beider Kurven ist mit Rücksicht auf die vielen Möglichkeiten von Versuchsfehlern (Temperaturreduktion usw.) recht zufriedenstellend***.

---

* H. Westphal, ZS. f. Phys. **1**, 92, 1920.

** Anm. bei der Korrektur. Bei genauerer Durchsicht der theoretischen Literatur finden wir, daß schon Hettner (ZS. f. Phys. **27**, 21, 1924) unsere Gleichung (4) in entsprechender Überlegung aufgestellt und auf die Symmetrie der durch sie dargestellten Funktion in logarithmischer Darstellung hingewiesen hat. Daß diese Formel über diese Eigenschaft hinaus Wirklichkeitssinn hat, konnte er aus Mangel an Material natürlich nicht feststellen.

*** Vgl. Anm. ** auf voriger Seite.

Damit haben wir nun die Möglichkeit, auf den Radiometereffekt bei hohen Drucken zu schließen. Zunächst folgen rein rechnerisch durch Differentiation usw. aus der Gleichung (4) die Koordinaten des Maximums zu:

$$p_m = \sqrt{a \cdot b}, \qquad R_m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}. \tag{5}$$

Daraus erhält man für die Konstanten der Grenzgesetze:

$$a = \frac{p_m}{2 R_m}, \qquad b = 2 p_m \cdot R_m. \tag{6}$$

Unter Einführung der experimentell gefundenen Maximumbeziehungen [Gleichung (2)] wird:

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{A}, \qquad b = 2 A \cdot B \cdot \lambda^2, \tag{7}$$

d. h. wir erhalten infolge der eigentümlichen Kombinationen von p_m und R_m in den letzten Gleichungen (7) für a die nach Knudsen verlangte

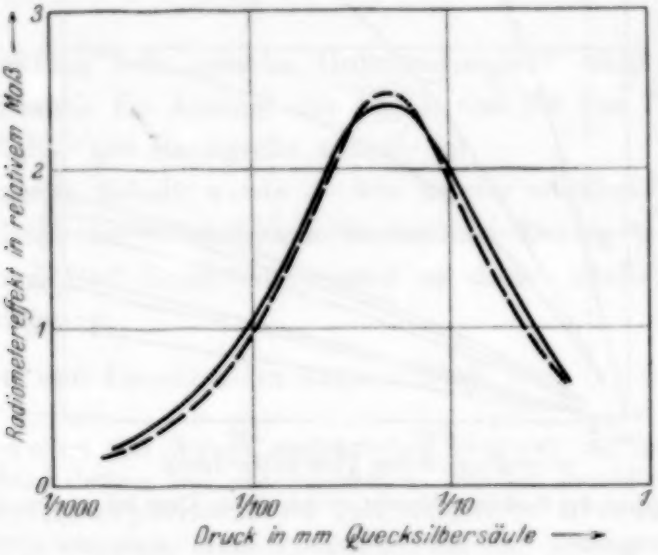


Fig. 9. Darstellung einer experimentellen (———) Radiometerkurve durch die Gleichung (— — —).

Unabhängigkeit vom Gase. Dagegen kristallisiert sich für b eine einfache Gasabhängigkeit heraus. Wir sehen jetzt auch, daß wir sowohl für R_m als auch für p_m eine gleiche funktionale Abhängigkeit von λ finden mußten, damit die Knudsenbedingung erfüllt werden konnte.

Unsere beiden Grenzgesetze werden somit:

$$R\big|_{\lim p \to 0} = \frac{2A}{B} p, \tag{8}$$

$$R\big|_{\lim p \to \infty} = 2 A B \frac{\lambda^2}{p} \tag{9}$$

und das Gleichungssystem unserer Radiometerkurven:

$$R = \frac{1}{\frac{a}{p} + \frac{p}{c\lambda^2}}, \tag{10}$$

wobei jetzt a und c vom Gase unabhängige Konstanten sind.

Nachdem wir die durch Gleichung (9) dargestellte einfache Gesetzmäßigkeit für die Radiometerkraft bei hohen Drucken aus den Maximumdaten abgeleitet haben, erscheint auch eine unmittelbare Prüfung dieser Beziehung an den Werten hoher Drucke wünschenswert. Diese Prüfung läßt sich sehr einfach in folgender Weise durchführen: Trägt man die

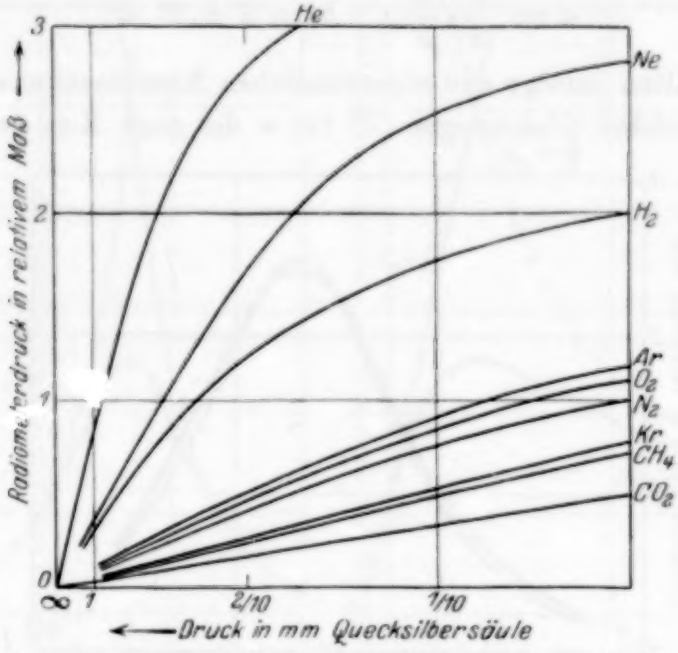


Fig. 10. Verlauf der Radiometerkurven verschiedener Gase bei großem Druck.

Kurvenäste bei hohem Druck über $1/p$ auf, so müssen aus den Hyperbeln Geraden werden, deren Neigung λ^2 proportional sein muß, d. h. man muß bei Bildung des Verhältnisses von Neigung $\left(\frac{dR}{d\,1/p}\right)$ und Quadrat der freien Weglänge λ^2 eine Konstante erhalten; in Fig. 10 ist diese Auftragung durchgeführt und in der zugehörigen Tabelle ist das Verhältnis gebildet. Man erkennt, daß tatsächlich $\left(\frac{dR}{d\,1/p}\right) : \lambda^2$ praktisch konstant ist.

Es ist also gelungen, durch die sehr einfachen Überlegungen und Ansätze unsere Radiometerkurven mit einer zweikonstantigen Formel darzustellen und auf rein experimentellem Wege eine Gleichung für

Gas	$\left(\frac{dR}{d\,1/p}\right)_{p=\infty}$	λ bei 760 mm in 10^{-6} cm	λ^2	$\left(\frac{dR}{d\,1/p}\right):\lambda^2$
CO_2 . . .	16	3,97	15,8	$1{,}0 \cdot 10^8$
Kr	27	4,87	23,7	1,1
CH_4 . . .	25	4,93	24,3	1,0
N_2	40	5,99	35,9	1,1
Ar	51	6,35	40,4	1,3
O_2	47	6,47	41,8	1,1
H_2	15	11,2	126	1,2
Ne	18	12,6	159	1,1
He	40	18,0	325	1,2

den Radiometerdruck in dichten Gasen anzugeben, die in gewisser Beziehung der Knudsenformel für stark verdünnte Gase entspricht. Die erhaltene Beziehung lautet in Worten:

Der Radiometereffekt bei hohen Drucken ist dem Quadrat der freien Weglänge direkt und dem Drucke umgekehrt proportional.

In Einklang mit neueren Untersuchungen* steht sowohl dieses Resultat als auch die Aussage der Fig. 5, daß für den Radiometereffekt in diesem Gebiet die Randgröße wichtig ist.

Vorliegende Arbeit wurde — wie bereits erwähnt — im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Danzig ausgeführt. Wir danken Herrn Prof. Ramsauer auch an dieser Stelle für Ratschläge und Unterstützung.

Berlin und Danzig, im August 1928.

* Wir wollen hier keinen ausführlichen Vergleich mit den auf S. 318 angemerkten theoretischen und experimentellen Arbeiten durchführen, sondern nur kurz auf diejenige experimentelle Untersuchung (J. Bleibaum, Dissertation Tübingen 1926) eingehen, deren Problemstellung und Lösungsweg der unserigen am nächsten steht. In dieser Arbeit wird zwar ebenfalls auf den Einfluß der Wärmeleitung bei verschiedenen Drucken und verschiedenen Gasen hingewiesen, doch wird die ältere Anordnung des berußten und bestrahlten Flügels beibehalten, der sich aus der Ruhelage herausbewegt. Trotzdem gelingt es, das von uns allgemein nachgewiesene Grenzgesetz großer Drucke für Spezialfälle dadurch nachzuweisen, daß von zwei Gaspaaren zufällig ähnlicher Wärmeleitfähigkeit die Kurvenäste bei großen Drucken verglichen werden. Eine quantitative Aussage über die Maximumlagen [unsere Gleichung (2)] und eine Formel für die Radiometerkurven [unsere Gleichung (9)] kann wegen der fehlenden Temperaturreduktion nicht angegeben werden. Dagegen werden wertvolle Versuche über den negativen Radiometereffekt und besonders zur Frage des Randeffekts durchgeführt.

Ähnliche Eigenschaften und ähnliche Radiometerkurven von $N_2 - CO$ und $CO_2 - N_2O$.

Von **E. Brüche** in Berlin und **W. Littwin** in Danzig.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 20. Oktober 1928.)

Auf die Ähnlichkeit der physikalischen Eigenschaften und des Aufbaues der im Titel genannten Paare von Molekeln ist mehrfach* hingewiesen worden. Diese Ähnlichkeiten, die durch die benachbarte Stellung der Elemente C, N, O im periodischen System bedingt sind, seien durch folgende, als Beispiele herausgegriffene Daten** erläutert:

	N_2	CO	CO_2	N_2O
Molekulargewicht:	28,0	28,0	44,0	44,0
Wärmeleitfähigkeit b. 0° C und 760 mm	$56 \cdot 10^{-6}$	$53 \cdot 10^{-6}$	$32 \cdot 10^{-6}$	$35 \cdot 10^{-6}$
Koeffizient der inneren Reibung bei 0° C . .	$167 \cdot 10^{-6}$	$165 \cdot 10^{-6}$	$140 \cdot 10^{-6}$	$138 \cdot 10^{-6}$
Freie Weglänge bei 0° C und 760 mm	$599 \cdot 10^{-8}$	$584 \cdot 10^{-8}$	$397 \cdot 10^{-8}$	$387 \cdot 10^{-8}$

Als ein weiteres neues Beispiel können die Druckkurven des bekannten Rußflügelradiometers dienen. Diese Kurven, deren Gestalt durch eine Reihe verschiedener Erscheinungen bestimmt wird, stellen gleichsam die Zusammenfassung einer längeren Tabelle (siehe oben) dar und scheinen uns so ein umfassendes, besonders anschauliches Beispiel für die Ähnlichkeit in den Eigenschaften dieser Gasgruppen zu sein. Wir teilen daher hier bisher unveröffentlichte Radiometerkurven*** mit, die mit einem primitiven Rußflügelradiometer (durch Bestrahlung mit einer kleinen Glühlampe betrieben) erhalten wurden. Das linke Teilbild der Figur zeigt zunächst die unter gleichen Bedingungen aufgenommenen Kurven

---

* F. Weigert, Abbegs Handbuch der anorg. Chemie III, 2, S. 138, 1909; I. Langmuir, Journ. Amer. Chem. Soc. **41**, 866, 1919; H. G. Grimm, Handb. d. Phys. XXIV, S. 466, 1927; E. Brüche, Ann. d. Phys. **83**, 1108, 1927.

** Daten aus Landolt-Börnstein 1923.

*** Die Kurven wurden bei Vorversuchen zu folgender Arbeit gemessen: E. Brüche und W. Littwin, ZS. f. Phys. **52**, 318—333, 1928.

acht verschiedener Gase. Die sehr große Verschiedenartigkeit dieser Kurven läßt die daneben dargestellten, praktisch vollständig zusammen-

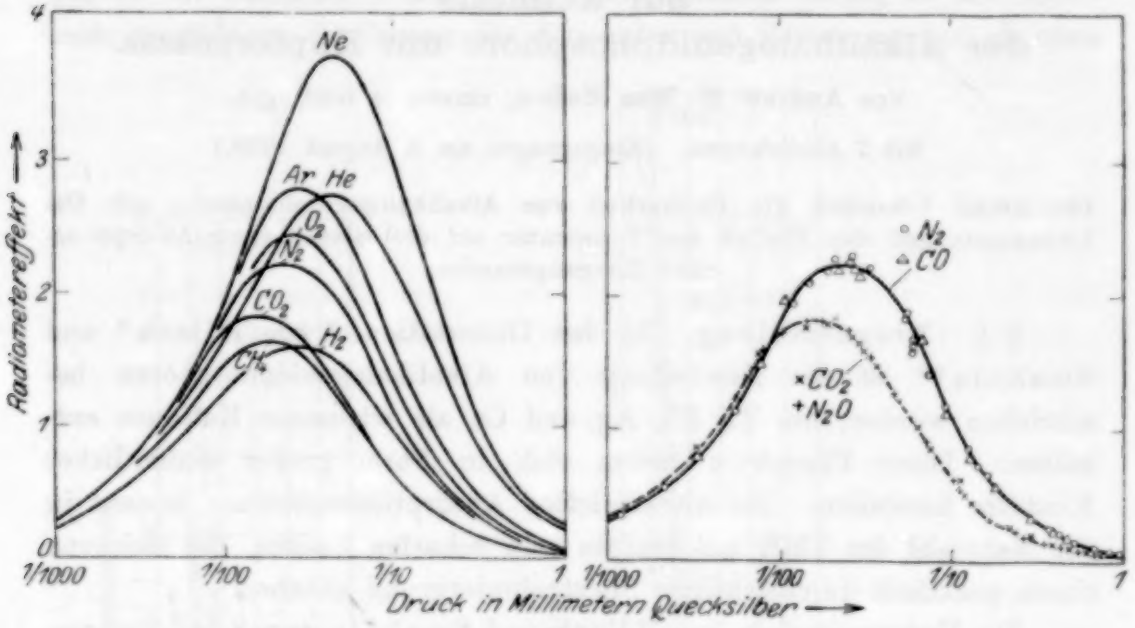


Fig. 1.

fallenden Kurven von N_2 und CO einerseits, von CO_2 und N_2O andererseits um so deutlicher die übereinstimmenden Eigenschaften demonstrieren.

Berlin und Danzig, im Oktober 1928.

Zur Kenntnis der Alkalihalogenidphosphore mit Kupferzusatz.

Von **Andrew M. Mac Mahon**, zurzeit in Göttingen.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 2. August 1928.)

Die Arbeit behandelt die Haltbarkeit von Alkalihalogenidphosphoren mit Cu-Ionenzusatz und den Einfluß der Temperatur auf die Gestalt ihrer Absorptions- oder Erregungsbanden.

§ 1. Fragestellung. In den Dissertationen von Hilsch* und Smakula** ist die Herstellung von Alkalihalogenidphosphoren beschrieben worden, die Tl, Pb, Ag und Cu als wirksame Kationen enthalten. Diese Phosphore lassen sich in Form großer einheitlicher Kristalle herstellen. Ihr ultraviolettes Absorptionsspektrum besteht in der Mehrzahl der Fälle aus einigen sehr scharfen Banden, die sich von einem praktisch durchsichtigen Spektraluntergrund abheben.

Die Untersuchungen von Hilsch und Smakula waren bei Zimmertemperatur ausgeführt worden. In der Dissertation von Lorenz*** sind dann für eine Reihe Tl- und Pb-haltiger Alkalihalogenidphosphore die Absorptionsspektra im Temperaturbereich von -193 bis $+500^0$ untersucht worden. Lorenz hat in allen Fällen eine Verschmälerung der Absorptionsbanden mit sinkender Temperatur und eine geringfügige Verschiebung nach kürzeren Wellen gefunden. Die Halbwertsbreite der Absorptionsbande sinkt bei -193^0 auf 4 bis 7 $m\mu$ herunter.

Die vorliegende Arbeit hatte den Zweck, die Temperaturabhängigkeit der Absorptionsspektra von Cu-haltigen Phosphoren zu untersuchen. Nach unveröffentlichten Beobachtungen über die Emission dieser Phosphore bestand der Verdacht, daß diese Banden komplex seien und sich bei tiefer Temperatur auflösen lassen würden.

Bei der Ausführung der Messungen ergab sich ein unerwartetes Nebenergebnis: Eine schlechte Haltbarkeit solcher Phosphore, für die bereits Smakula das Vorliegen starker mechanischer Gitterstörungen betont hatte.

Die Versuchsanordnung glich weitgehend der von Lorenz benutzten, so daß ich auf dessen Arbeit zurückverweisen kann.

---

* R. Hilsch, ZS. f. Phys. **44**, 860, 1927.
** A. Smakula, ebenda **45**, 1, 1927.
*** H. Lorenz, ebenda **46**, 558, 1927.

§ 2. Die Haltbarkeit Cu-haltiger Phosphore. Smakula hat die Absorption Cu-haltiger NaCl- und KCl-Phosphore ausgemessen. Bei seinen Phosphoren mit hoher Konzentration gelang es mir nicht, trotz sorgfältiger Justierung der Apparatur und Benutzung der gleichen

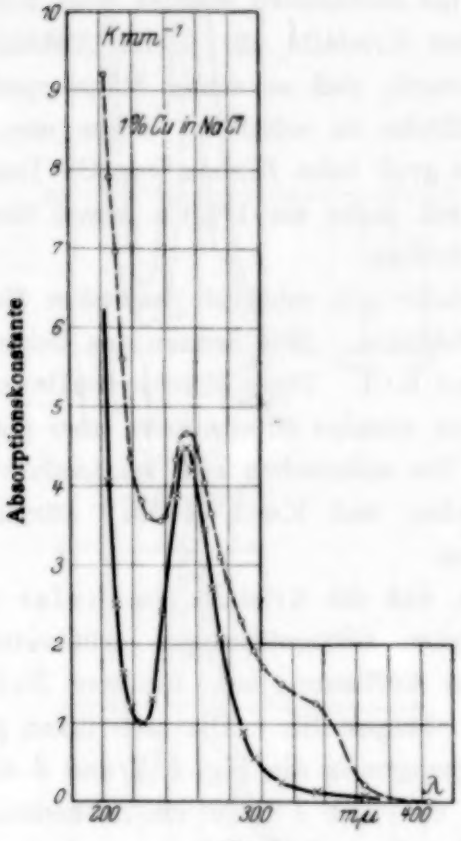


Fig. 1.

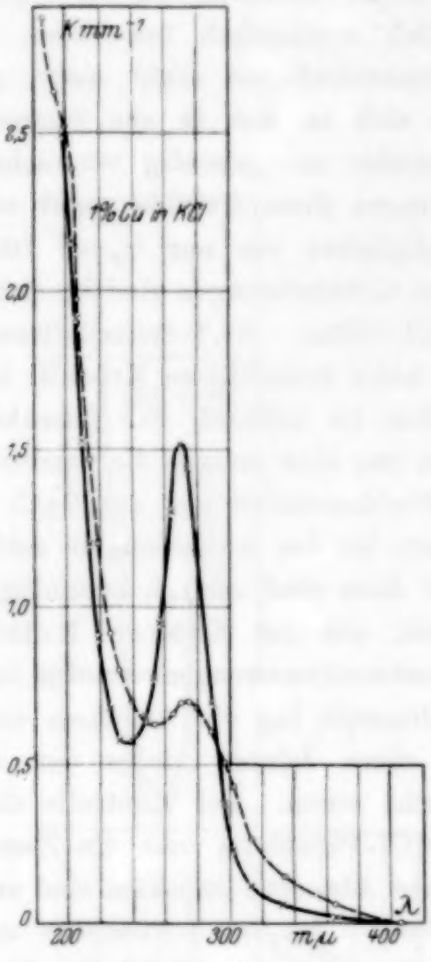


Fig. 2.

Fig. 1.
– – – Smakulas Kristall Nr. 1089, benutzte Dicken d = 0,30, 0,45 und 1,42 mm.
——— 2 Tage alter Kristall Nr. 2000, d = 0,53 mm.

Fig. 2.
– – – Smakulas Kristall Nr. 1115, d = 0,30 und 0,63 mm.
——— 3 Tage alter Kristall Nr. 2001, d = 1,38 mm.

Kristallstücke, seine Messungen zu reproduzieren. Ich erhielt vielmehr die Banden viel weniger ausgeprägt, man betrachte die gestrichelten Kurven in den Fig. 1 und 2. Hingegen war im Falle eines NaCl-Kristalles mit nur 0,3 % Cu die Übereinstimmung von Smakulas und meinen Messungen befriedigend. Ich fand, wie die ausgezogene Kurve in Fig. 6 zeigt, ebenso wie Smakula ein hohes Maximum.

Als Erklärung für die Abweichungen konnte nur eine zeitliche Änderung der Kristalle in Frage kommen. Schon in der Arbeit von Smakula war mit großem Nachdruck darauf hingewiesen worden, daß sich Cu-Ionen sehr viel schlechter als Tl- und Pb-Ionen in NaCl- und KCl-Gitter einbauen lassen. Diese Störungen machen sich schon äußerlich mechanisch bemerkbar. Es gelingt bei den erforderlichen Cu-Konzentrationen nicht mehr, große Einkristalle zu erhalten. Es setzen sich an dem in den Schmelzfluß tauchenden Kühler eine Reihe miteinander unregelmäßig verwachsener Kristalle an. Beim Abkühlen zerspringen diese Gebilde meist so stark, daß es schon Mühe macht, Kristallplatten von nur $^1/_9$ cm^2 Oberfläche zu erhalten. Diese mechanischen Gitterstörungen sind besonders groß beim Einbau von Cu-Ionen in KCl-Gitter. KCl-Schmelzflüsse mit mehr als 1 % Cu lassen überhaupt keine brauchbaren Kristalle herstellen.

Nun ist bekannt, daß Mischkristalle mit schlecht passenden Bausteinen nur eine geringe Haltbarkeit besitzen. Wir nennen das Beispiel der Mischkristallbildung aus NaCl und KCl. Diese Mischkristalle zersplittern bei der Abkühlung in zahllose winzige Bruchstücke, aber nicht einmal diese sind zeitlich beständig. Sie entmischen sich im Laufe von Monaten, wie das Krüger, Reinkober und Koch-Holm* kürzlich mit Reststrahlmessungen verfolgt haben.

Demnach lag die Annahme nahe, daß die Kristalle Smakulas im Laufe eines Jahres infolge der starken Gitterstörungen größtenteils entmischt waren. Zur Kontrolle dieser Auffassung habe ich neue NaCl- und KCl-Phosphore mit Cu-Zusatz hergestellt. Die an ihnen gemessenen Absorptionsspektra sind ausgezogen in die Fig. 1, 2 und 3 eingezeichnet. Im NaCl-Phosphor mit 0,3 und 1 % Cu im Schmelzfluß habe ich an den neuen Kristallen die Messungen Smakulas reproduzieren können. Die verbleibenden Abweichungen liegen innerhalb der Fehlergrenzen der benutzten Konzentrationen. Bei einem KCl-Phosphor (Fig. 2) mit 1 % Cu bekomme ich hingegen jetzt ein noch schärferes Maximum, als es Smakula erhalten hatte. Auch dies Ergebnis ist unschwer zu deuten. Ich habe diesen hochkonzentrierten und besonders gestörten KCl-Kristall drei Tage nach seiner Herstellung untersucht, Smakula hingegen seinen Kristall im Alter einiger Wochen.

§ 3. Der Temperatureinfluß auf die Absorptionsspektra Cu-haltiger Phosphore. Nachdem die begrenzte Haltbarkeit der hoch-

* Ann. d. Phys. (4) 85, 110, 1928.

konzentrierten Cu-haltigen Phosphore festgestellt war, habe ich den Temperatureinfluß auf das Absorptionsspektrum an Kristallen untersucht, die nur wenige Tage alt waren. Die Fig. 3 bis 5 enthalten die Ergebnisse einiger

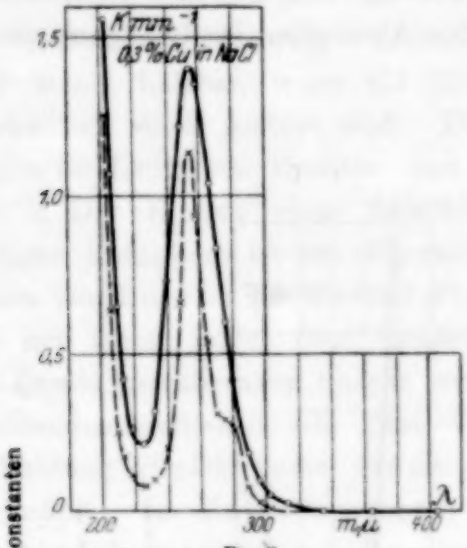


Fig. 3.

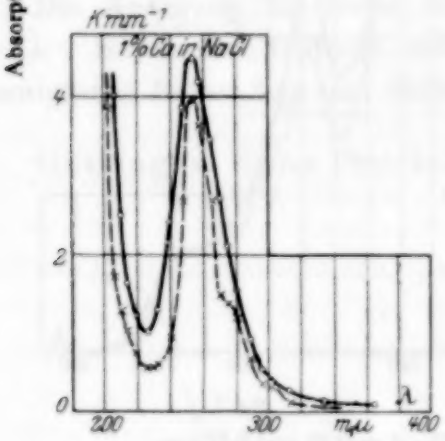


Fig. 4.

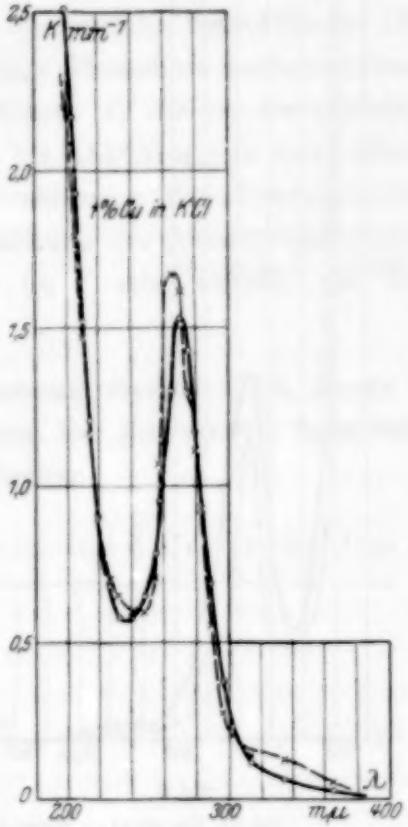


Fig. 5.

Absorptionskonstanten

Fig. 3. Kristall Nr. 2002, 3 Tage alt, $d = 1{,}72$ mm.
—— Zimmertemperatur.
— — — — 190°.

Fig. 4. Kristall Nr. 2000, 2 Tage alt, $d = 0{,}53$ mm.
—— Zimmertemperatur.
— — — — 190°.

Fig. 5. Kristall Nr. 2001, 3 Tage alt, $d = 1{,}38$ mm.

typischer Messungen. Gemeinsam ist den NaCl- und KCl-Phosphoren eine Auflösung der Banden in zwei bzw. drei Teilbanden bei tiefer Temperatur. Gemeinsam ist den Banden in beiden Fällen eine Verschmälerung bei der Abkühlung. Gemeinsam ist ihnen endlich eine geringfügige Verschiebung

der Hauptbande nach kürzeren Wellen durch die Abkühlung. Ein wichtiger Unterschied zeigt sich aber im Einfluß der Temperatur auf die Höhe der Absorptionskonstanten. Der KCl-Phosphor mit Cu-Zusatz zeigt genau das gleiche Verhalten, wie die von Lorenz untersuchten Phosphore mit Tl- und Pb-Zusatz: Die Absorption im Bandenmaximum

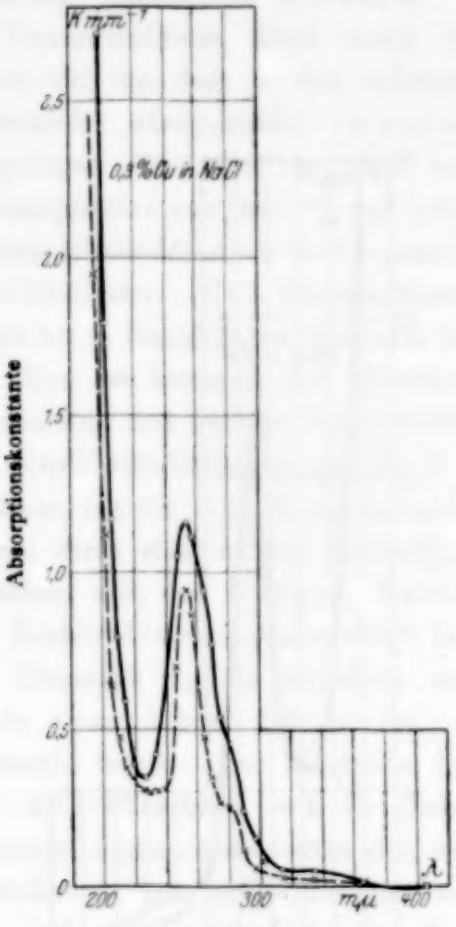


Fig. 6.

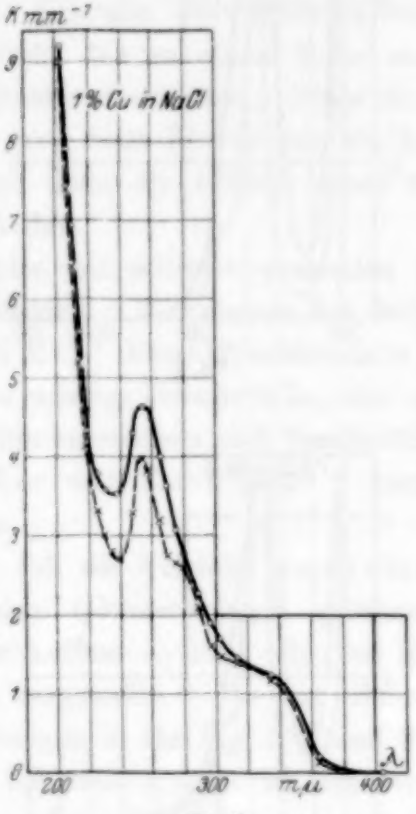


Fig. 7.

Fig. 6. Smakulas Kristall Nr. 1085, $d = 0{,}30$ und 0,57 mm.
——— Zimmertemperatur.
– – – – 190°.

Fig. 7. Smakulas Kristall Nr. 1089, $d = 0{,}30$, 0,45 und 1,42 mm.
——— Zimmertemperatur.
– – – – 190°.

steigt mit wachsender Temperatur. In den NaCl-Phosphoren hingegen tritt das umgekehrte ein. Hier wird die von Cu herrührende Bande mit sinkender Temperatur niedriger. Es bestätigt sich der Hinweis von Lorenz, daß die einzelnen Absorptionsbanden der Alkalihalogenidphosphore ebenso induviduelle Eigentümlichkeiten zeigen, wie sie für die Erregungsbanden der Sulfidphosphore seit langem bekannt sind.

Der in den Fig. 3 bis 5 dargestellte Temperatureinfluß ist vollständig reversibel. Er ist auch keineswegs auf frisch hergestellte Phosphore beschränkt. Um das zu zeigen, gebe ich in den Fig. 6 und 7 noch analoge Messungen an den alten Kristallen Smakulas.

Zusammenfassung. 1. NaCl- und KCl-Phosphore mit Cu-Zusatz sind wenig haltbar, wenn die Gitter durch höhere Cu-Konzentration mechanisch stark gestört sind. Die Erregungsbanden dieser Phosphore zeigen im Laufe von Monaten eine starke Verflachung.

2. Der Einfluß einer Abkühlung auf die Absorptionsbanden Cu-haltiger Phosphore ist im allgemeinen der gleiche, wie ihn die Dissertation von Lorenz für Tl- und Pb-haltige Phosphore nachgewiesen hat. Als neu treten jedoch zwei Tatsachen hinzu: a) die relativ breiten, von Cu-Zusatz herrührenden Banden werden bei Abkühlung in zwei oder drei Teilbanden aufgelöst. b) Eine Verschmälerung der Bandenbreite bei Abkühlung ist nicht immer mit einer Erhöhung der Absorptionskonstanten verknüpft. In NaCl-Phosphoren mit Cu-Zusatz werden die Banden bei Abkühlung schmäler und niedriger.

Die Anregung zu dieser Untersuchung verdanke ich Herrn Prof. Pohl. Herrn Dr. Hilsch und Herrn Dr. Flechsig habe ich für mannigfache Ratschläge und Hilfe zu danken.

Göttingen, Erstes Physikalisches Institut d. Universität, Juni 1928.

Über das Vorhandensein zweier verschiedener magnetischer Drehvermögen in einem einachsigen Kristall längs der Achse und längs einer Achsennormale.

Von **Jean Becquerel** in Paris.

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 16. August 1928.)

Das magnetische Drehungsvermögen eines einachsigen Kristalls wird in Richtungen schief zur optischen Achse bestimmt. Der benutzte Kristall (Tysonit) ist für diese Versuche sehr geeignet, da seine magnetische Drehung sehr groß und seine Doppelbrechung sehr klein ist. Eine Konstruktion von Henri Poincaré ermöglicht es, das eigentliche Drehvermögen von dem kombinierten Effekt aus Drehvermögen und Doppelbrechung abzutrennen. Es wird gezeigt, daß das magnetische Drehvermögen des Tysonits abnimmt, wenn der Winkel zwischen einfallendem Strahl und optischer Achse zunimmt. Wenn man annimmt, daß es zwei magnetische Drehvermögen gibt, und zwar längs der Achse und senkrecht dazu, so ergibt sich sofort eine Verallgemeinerung des Verdetschen Gesetzes in guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen.

Bisher ist das magnetische Drehvermögen einachsiger Kristalle in Richtungen, die nicht mit der Achse zusammenfallen, nicht sehr weitgehend untersucht worden, weil die Drehung im allgemeinen von der Doppelbrechung verdeckt wird, sowie die Wellennormale sich etwas von der optischen Achse entfernt. Jedoch gibt es seltene Erden enthaltende Kristalle mit großem magnetischen Drehvermögen, unter denen der Tysonit [(La, Ce, Nd + Pr) F_3] gleichzeitig das größte Drehvermögen und die schwächste Doppelbrechung ($n_0 = 1{,}6168$, $n_E = 1{,}6095$ ($\pm 0{,}0005$) für die Wellenlänge 5350 Å) aufweist*. Dies Mineral erschien daher zum Studium der magnetischen Rotationspolarisation schiefwinklig zur Achsenrichtung besonders geeignet.

Zunächst wollen wir daran erinnern, daß das magnetische Drehvermögen in negativem Sinne des Tysonits (ebenso wie das anderer Kristalle seltener Erden) paramagnetischen Ursprungs ist, was durch die einfache, seit langem beobachtete** Tatsache bewiesen wird, daß die Drehung mit sinkender Temperatur erheblich zunimmt, und zwar ungefähr umgekehrt proportional der absoluten Temperatur T (wenigstens solange man nicht zu den tiefsten Temperaturen übergeht): Die Ähnlichkeit mit dem Curieschen Gesetz ist deutlich. Demnächst werden Unter-

* Nach Messungen von P. Gaubert.

** Jean Becquerel, Le Radium **5**, 16, 1908; Derselbe und H. Kamerlingh Onnes, Comm. Leiden Nr. 103; Le Radium **5**, 228, 1908.

suchungen veröffentlicht werden, die zusammen mit Herrn Professor W. J. de Haas in Leiden ausgeführt wurden; sie zeigen, daß bei den mit flüssigem Helium erreichbaren Temperaturen (von 4,2° abs. bis 1,39° abs.) das magnetische Drehvermögen des Tysonits eine Funktion von H/T ist; es hört auf, dem äußeren Felde H proportional zu sein, um einem Sättigungswert zuzustreben: das ist der vollständige Beweis dafür, daß das Phänomen einer paramagnetischen Orientierung zugeschrieben werden muß; natürlich muß sich der paramagnetischen eine diamagnetische Drehung überlagern*, die aber (wenigstens beim Tysonit) gegenüber der paramagnetischen Drehung bei sehr tiefen Temperaturen vernachlässigt werden kann und auch bei Zimmertemperatur noch schwach ist.

In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um Versuche bei Zimmertemperatur.

1. Anordnung.

Die benutzte Versuchsanordnung war die folgende. Ein dünnes Plättchen aus Tysonit ($e = 1{,}866$ mm), das seinerzeit sorgfältig von Hrn. Werlein mit Oberflächen senkrecht zur Achse geschliffen worden ist, wird zwischen die Pole eines kleinen Weissschen Elektromagnets gebracht. Es ist mittels einer Platinfassung an dem Ende eines Glasstabes befestigt, dessen oberer Teil als Zeiger über einem Teilkreis dient. Durch Ausprobieren wird nun die Anordnung so einjustiert, daß beim Drehen des Zeigers die optische Achse des Kristalls horizontal bleibt. Um zu erkennen, ob diese Bedingung erfüllt ist, polarisiert man das einfallende Licht so, daß der elektrische Vektor vertikal steht**; läßt man das austretende Licht durch einen mit dem Polarisator gekreuzten Analysator gehen, so muß die Auslöschung für jede Plättchenstellung erhalten bleiben.

Nachdem das Plättchen so einjustiert und der Polarisator so festgestellt war, daß er immer einen vertikalen elektrischen Vektor lieferte, habe ich zur Messung der Drehung einen Halbschattenanalysator (zerschnittenes Nicol nach Cornu) benutzt. Der Schnitt wird auf den sehr breiten Spalt eines Spektroskops abgebildet; dreht man den Analysator,

---

* Siehe über diese Frage die theoretischen Abhandlungen von R. Ladenburg, ZS. f. Phys. **34**, 898, 1925; **46**, 168, 1927.

** Es ist übrigens unnötig, die einfallende Welle genau vertikal zu machen: es kommt nur darauf an, das Plättchen so zu justieren, daß bei einer Drehung des Glasstabes die optische Achse senkrecht zur einfallenden Schwingung bleibt.

so krümmt sich die Trennungslinie der beiden nebeneinander liegenden Felder, was aber die Beobachtungen nicht stört.

Als Lichtquelle wurde ein Quecksilberbogen benutzt; obgleich das Drehvermögen mit wachsender Wellenlänge abnimmt, wurde doch die grüne Linie ($\lambda = 5460{,}7$) verwendet, weil sie intensiver ist als die blaue oder violette.

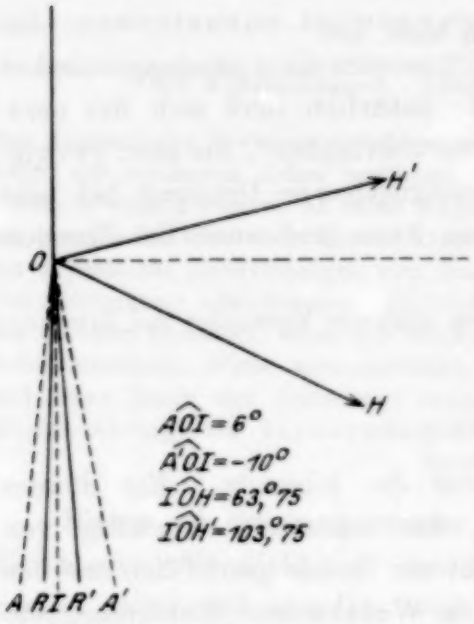


Fig. 1.

Der Elektromagnet schließlich befand sich auf einer beweglichen, mit Teilkreis versehenen Unterlage, wodurch die Feldrichtung eingestellt werden konnte.

Der Winkel zwischen Kristallachse und einfallendem Lichtbündel wurde von 10° in einer Richtung bis 8° in der entgegengesetzten variiert; auch dem Felde wurden verschiedene Richtungen gegeben, deren Winkel mit der Verlängerung des einfallenden Strahles zwischen 63,75° und 103,75° lagen, so wie es Fig. 1 darstellt: der Elektromagnet wurde also aus der zum Lichtbündel senkrechten Richtung nach der einen sowohl wie der anderen Seite gedreht.

2. Justierung der Kristallachse parallel zum einfallenden Bündel.

Der einfachste Weg, die Achse dem einfallenden Bündel parallel zu stellen, ist offenbar, die Auslöschung zwischen gekreuztem Polarisator und Analysator zu beobachten, wenn sie unter 45° mit der Horizontalen stehen. Dies Verfahren ist aber wegen der schwachen Doppelbrechung des Kristalls nicht sehr genau. Daher ist die folgende Methode vorzuziehen:

Das einfallende Licht wird unter 45° zur Horizontalen polarisiert; der Analysator wird direkt hinter dem Spalt des Spektroskops angebracht und mit dem Polarisator gekreuzt; an dem Spalt selbst befindet sich ein Babinetscher Kompensator so, daß sein Mittelstreifen senkrecht zum Spalt verläuft und ihn ungefähr in der Mitte schneidet. Diese Anordnung liefert bekanntlich, wenn kein doppelbrechendes Plättchen eingeschaltet ist, ein „Fächerspektrum“; die Mittelfranse liefert einen schwarzen Streifen, der das ganze Spektrum senkrecht zu den Spektrallinien durch-

läuft; die übrigen Streifen sind gekrümmt und nähern sich einander auf der Seite kleiner Wellenlängen, da der Abstand zweier aufeinanderfolgender Streifen mit der Wellenlänge kleiner wird (Fig. 2).

Schaltet man das Kristallplättchen ein, und läßt man seine Achse sich in einer horizontalen Ebene drehen, so behalten die Streifen ihre ganze Schärfe, aber sie wandern. Nachdem man zunächst die Kristallachse ungefähr parallel zum einfallenden Bündel gemacht hat, visiert man den mittleren Streifen mit dem okularen Fadenkreuz an; dann dreht man, ohne das Fadenkreuz zu rühren, den Kristall bei horizontal bleibender Achse in einer Richtung; man liest auf dem Teilkreis die Stellungen a, b, c, d, ... des Zeigers ab, für die die Streifen nacheinander auf dem Fadenkreuz den Mittelstreifen ersetzen. Dann bringt man den Kristall in seine

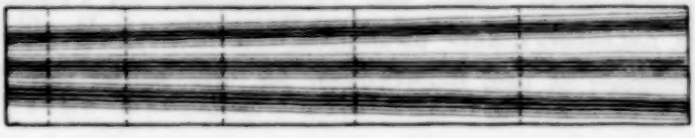


Fig. 2.

ursprüngliche Lage und dreht ihn in entgegengesetztem Sinne; man liest die Stellungen a', b', c', d', ... ab, für die die Streifen das Fadenkreuz passieren.

Ist das Plättchen genau senkrecht zur Achse geschliffen, so liegen die Ablesungen a und a', b und b' usw. symmetrisch, d. h. daß die Mittel der Ablesungen a und a', b und b' usw. die gleichen sein müssen und die „Nullage" angeben, für die die Kristallachse dem einfallenden Bündel parallel liegt. Tatsächlich weichen die verschiedenen beobachteten Mittel nur um einige Zehntelgrade voneinander ab und liefern keine systematischen Verlagerungen mit wachsendem Einfallswinkel*. Dies Ergebnis beweist, daß das Plättchen praktisch als senkrecht zur Achse betrachtet werden kann. Das allgemeine Mittel, das durch Beobachtung von fünf oder sechs Streifen erhalten wurde (und, je nachdem es notwendig war, mit zwei oder drei Meßreihen), scheint mit keinem größeren Fehler als $0{,}1^0$ für die „Nullage" behaftet zu sein.

Da man jetzt also den Teilstrich des Kreises kennt, der der „Nullage" entspricht, kennt man auch für jede vorgegebene Kristallage den Winkel zwischen Achse und Bündel, der gleichzeitig den Einfallswinkel darstellt.

---

* Eine statistische Prüfung der mit zehn Meßserien erhaltenen Abweichungen zwischen dem Mittel der Lagen a und a' einerseits und den Mitteln der Lagen b und b', c und c' usw. andererseits hat gezeigt, daß diese Abweichungen zufällig sind.

3. Messung der Phasendifferenz für schrägen Einfall.

Die Kompensatormethode erlaubt die Phasendifferenz φ_0 zwischen den beiden vom Plättchen ausgesandten Wellen für jeden vorgegebenen Einfallswinkel und jede beliebige Wellenlänge zu messen. Während der Kristall sich in der „Nullage" befindet, bringt man das Fadenkreuz auf den Schnittpunkt des mittelsten Streifens mit der Spektrallinie, für die man die Messung ausführen will; man dreht das Plättchen um den Winkel i und mißt die Verschiebung des Streifens; der Quotient aus dieser Verschiebung und dem Abstand zweier aufeinanderfolgender Streifen stellt die Phasendifferenz dar. Man kann so die Kurve $\varphi_0 = f(i)$ konstruieren. Für kleine Einfallswinkel läßt sich diese Kurve durch eine Parabel darstellen.

Wir werden später sehen, daß die Kenntnis der Phasendifferenz als Funktion des Einfallswinkels unumgänglich notwendig zur Bestimmung des Drehvermögens in den Richtungen ist, die schief zur Achse stehen.

4. Magnetische Rotationspolarisation längs der Achse. Prüfung des Kosinusgesetzes.

Wenn die Achse dem einfallenden Bündel parallel ist, muß man das Gesetz von Verdet finden:

$$\varrho = \varrho_A H \cos \Theta$$

(Θ ist der Winkel zwischen Strahl und Feld). Die Prüfung geschah dadurch, daß der Elektromagnet von 5° zu 5° gedreht wurde; der Kurvenverlauf der Rotation ϱ als Funktion der Stellungen des Elektromagnets, wie sie auf dem Teilkreis seiner Unterlage abgelesen wurden, liefert mit guter Genauigkeit (auf wenigstens 0,1°) die Stellung, für die die Rotation verschwindet, d. h. für die das Feld senkrecht zum Strahlenbündel ist. Daraus läßt sich der Winkel Θ für jede Stellung des Elektromagnets ableiten.

Ein Ventilator sorgte dafür, daß der Kristall auf Zimmertemperatur blieb; diese wurde während der Versuche mehrmals abgelesen, und die Messungen wurden mittels des Proportionalitätsgesetzes zu $1/T$ auf 293° abs. reduziert.

Die folgende Tabelle bringt die Ergebnisse:

Θ	63,63°	68,63°	73,63°	78,63°	83,63°	88,63°	89,63°	93,63°	98,63°
Gemessene Rotation	− 12,71	− 10,53	− 8,08	− 5,63	− 3,13	− 0,70	− 0,15	+ 1,78	+ 4,26
Berechnete Rotation	− 12,71	− 10,42	− 8,06	− 5,61	− 3,16	− 0,69	− 0,18	+ 1,80	+ 4,27

Die obere Zeile bringt die gemessenen und auf 293° abs. reduzierten Drehungen, die zweite die mittels des Kosinusgesetzes unter der Annahme berechneten, daß die stärkste gemessene Drehung genau richtig ist. Es folgt daraus

$$\varrho_A H = -28{,}61.$$

Das Feld H wurde mit dem Grassotschen Fluxmeter zu 24830 Gauß ermittelt; führt man diesen Wert ein, so ergibt sich die Verdetsche Konstante zu

$$V_A = \frac{\varrho_A}{e} = -6{,}175 \cdot 10^{-3}\ \text{grad/cm}.$$

Wohlverstanden liefern die Messungen bei longitudinaler Beobachtung unter Verwendung von durchbohrten Polschuhen (die vorangehenden Versuche wurden mit massiven Polschuhen ausgeführt) innerhalb der Meßgenauigkeit für H die gleiche Konstante.

5. Magnetische Drehung schiefwinklig zur Achsenrichtung. Das Gesetz der Erscheinung. Bestimmung des Drehvermögens längs einer Achsennormale.

Da der Kristall nur schwach doppelbrechend war und überdies der Winkel zwischen einfallendem Strahl und Achse (die zum Plättchen senkrecht steht) bei unseren Versuchen 10° nicht überstieg, können wir so vorgehen, als ob die Normalen der beiden gebrochenen Wellen in einer gemeinsamen Richtung zusammenfielen, und wollen sie als gebrochenen Strahl bezeichnen.

Wäre die magnetische Drehung des Kristalls richtungsunabhängig, so würde der Feldeffekt immer dann verschwinden, wenn der gebrochene Strahl senkrecht zum Felde verläuft.

Das folgende Ergebnis zeigt, daß es in Wirklichkeit anders ist.

Wenn die Feldrichtung mit der Normalen zum einfallenden Bündel in einem oder dem anderen Sinne einen Winkel einschließt, der weniger als 4° beträgt, so findet sich immer eine Kristallrichtung mit kleinerem Einfallswinkel als 8°, für die jeder Feldeffekt verschwindet. Der Versuch hat gezeigt, daß für zwei Feldrichtungen, die einen Winkel von 5° einschlossen, die Winkeldifferenz der beiden Achsenrichtungen, die der Drehung Null bei diesen Feldern entsprachen, 10,25° betrug.

Es läßt sich leicht berechnen, daß, wenn der Feldeffekt dann verschwände, wenn der gebrochene Strahl senkrecht zum Felde verläuft, der Winkel zwischen den beiden Achsenrichtungen merklich größer sein würde. Betrüge in der Tat der Winkel zwischen den gebrochenen Strahlen in den

beiden Stellungen 5°, zählen wir die Brechungswinkel positiv im Uhrzeigersinn von der Achse aus, so haben wir

$$i_2 - r_2 - (i_1 - r_1) = 5^0;$$

der Winkel zwischen beiden Achsenrichtungen ist $i_2 - i_1$, und da der Einfallswinkel klein genug ist, um $i = nr$ zu setzen, so hat man

$$i_2 - i_1 = \frac{n}{n-1} 5^0.$$

Da der ordentliche Brechungsindex des Tysonits für 5350 Å 1,6168 und für 5893 Å 1,6128 beträgt, können wir für die grüne Quecksilberlinie bei 5460 Å den Wert 1,616 ansetzen. So finden wir

$$i_2 - i_1 = 13{,}1^0.$$

Die Abweichung von fast 3° vom Versuchsresultat übersteigt weit die möglichen Fehler, denn das Verschwinden des Feldeffekts oder, was

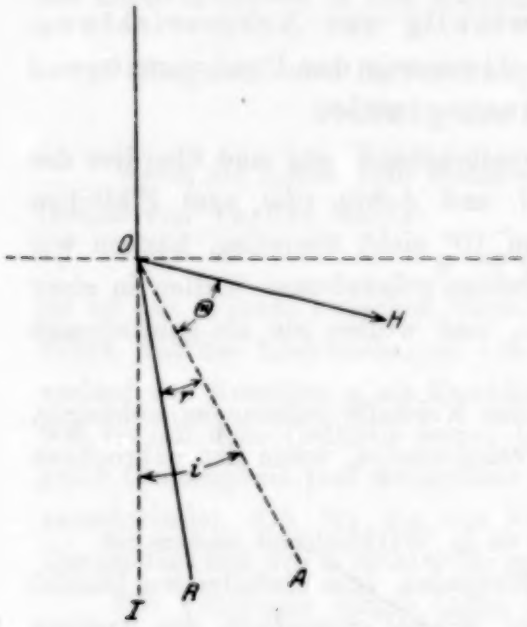


Fig. 3.

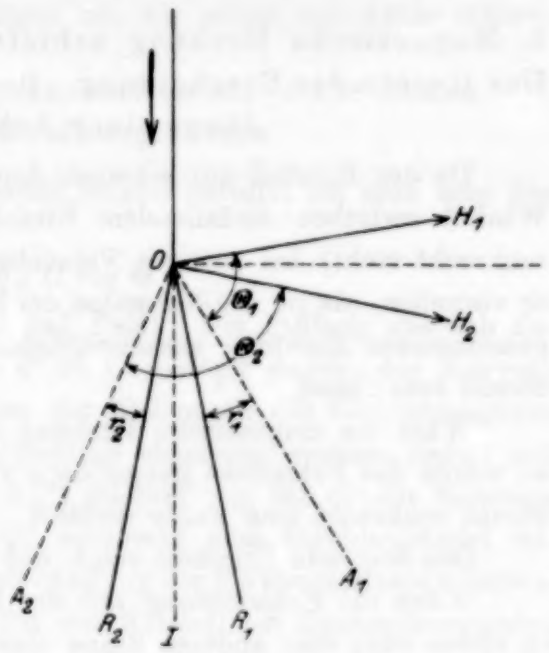


Fig. 4.

dasselbe bedeutet, der Richtungswechsel des Effekts ist leicht beobachtbar: er schließt höchstens einen Fehler von $^1/_4$ Grad für die Kristallstellung ein. Es muß darauf hingewiesen werden, daß der Versuch in der oben beschriebenen Form weder die Bestimmung der „Nullage" des Kristalls noch die der Stellung des Elektromagnets verlangt, für die das Feld senkrecht zum einfallenden Strahle verläuft. Die einzige auszuführende Beobachtung ist die des Richtungswechsels der Drehung durch eine leichte Drehung des Kristalls.

Das Drehungsvermögen muß also richtungsabhängig sein. Aus Symmetriegründen werden wir dazu geführt, eine magnetische Drehung parallel zur Achse und eine solche normal zur Achse ins Auge zu fassen, die das Drehvermögen in einer anderen Richtung bestimmen.

Das Gesetz der Erscheinung ist leicht zu erraten durch einfache Verallgemeinerung des Verdetschen Gesetzes. Es liegt in der Tat nahe, anzunehmen, daß man die Feldkomponenten längs der Achse und senkrecht dazu nehmen und dann die Drehungen, die man in diesen beiden Richtungen erhalten würde, auf den gebrochenen Strahl projizieren muß.

Seien r und Θ der Brechungswinkel bzw. der Winkel zwischen Achse und Feld, positiv im Antiuhrzeigersinn von der Achse OA aus gerechnet (Fig. 3). Sind V_A und V_N die Hauptkonstanten, so muß man, wenn die durchstrahlte Dicke $\frac{e}{\cos r}$ ist, haben:

$$\varrho = V_A \frac{e}{\cos r} H \cos\Theta \cos r + V_N \frac{e}{\cos r} H \sin\Theta \sin r,$$

was wir

$$\varrho = \varrho_A H \cos\Theta + \varrho_N H \sin\Theta \operatorname{tg} r \tag{1}$$

schreiben wollen.

Wenn dies Gesetz exakt gilt, so läßt sich ϱ_N durch die Beobachtung der verschwindenden Drehung für zwei Feldrichtungen bestimmen. Die Drehung ist Null für

$$\operatorname{tg}\Theta \operatorname{tg} r = -\frac{\varrho_A}{\varrho_N}.$$

Für kleine r und Θ nahe bei $\pi/2$ können wir $\operatorname{tg} r$ durch r und $\operatorname{tg}\Theta$ durch den reziproken Wert $1/\alpha$ des Komplementwinkels von Θ ersetzen und schreiben

$$\frac{r}{\alpha} = -\frac{\varrho_A}{\varrho_N};$$

auch können wir mit genügender Näherung $i = nr$ setzen; für zwei Wertepaare i_1, Θ_1 und i_2, Θ_2, für die die Drehung verschwindet (Fig. 4), erhalten wir

$$\frac{i_2}{\alpha_2} = \frac{i_1}{\alpha_1} = \frac{i_2 - i_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{i_2 - i_1}{\Theta_1 - \Theta_2}.$$

ψ sei der Winkel, den die Feldrichtung mit der Richtung des verlängerten einfallenden Strahles einschließt; dann haben wir

$$\Theta = \psi + i$$

und infolgedessen

$$\frac{i_2}{\alpha_2} = \frac{i_1}{\alpha_1} = \frac{i_2 - i_1}{-(i_2 - i_1) + (\psi_1 - \psi_2)},$$

und schließlich

$$\frac{\varrho_A}{\varrho_N} = -\frac{r}{\alpha} = -\frac{1}{n}\frac{i}{\alpha} = \frac{1}{n}\frac{i_2 - i_1}{(i_2 - i_1) - (\psi_1 - \psi_2)}.$$

Für $\psi_1 - \psi_2 = 5^0$ haben wir $i_2 - i_1 = 10{,}25^0$ beobachtet; mit $n = 1{,}616$ gibt das

$$\varrho_N = 0{,}828\,\varrho_A$$

mit einem möglichen Fehler von $\pm 4{,}5\,\%$, da jede Lage der verschwindenden Drehung ungefähr auf $^1/_4$ Grad rechts oder links von der wahren Lage bestimmt ist.

Bemerkenswert ist, daß da ϱ_N dasselbe Vorzeichen wie ϱ_A hat, das Drehvermögen senkrecht zur Achse denselben Sinn wie das Drehvermögen parallel zur Achse hat (sogenannter negativer Drehungssinn).

6. Experimentelle Prüfung.

Zur Prüfung des angegebenen Gesetzes muß man zusehen, ob die nach Formel (1) berechneten Drehungen mit dem Versuch übereinstimmen.

In dieser Formel ist die Drehung ϱ unabhängig von dem Einfluß der Doppelbrechung gedacht: sie stellt nicht die gemessene Größe dar. Bei den Versuchen bestimmt man durch Einstellen auf gleiche Helligkeit der beiden Felder des zerschnittenen Nicols die Drehung der großen Achse des elliptischen Lichtes, die durch Übereinanderlagerung von Drehung und Doppelbrechung verursacht wird. Man muß daher zur Prüfung des Gesetzes die Drehungen der großen Achse berechnen und sie mit den Messungen vergleichen.

Die Lösung liefert die sphärische Darstellung von Poincaré, deren kurze Skizzierung an dieser Stelle nützlich erscheint.

Betrachten wir für eine gegebene Strahlung und eine gegebene Fortpflanzungsrichtung alle elliptischen Schwingungen, die durch Ellipsen aller möglichen Exzentrizitäten dargestellt und in der Wellenebene verschieden orientiert seien. Eine unter ihnen sei in das Rechteck $ABCD$ eingeschrieben (Fig. 5), dessen Seiten ihren Achsen parallel sein sollen.

Wir wollen zwei feste Achsen OX und OY wählen, und wir bezeichnen mit $L/2$ den Winkel ($\leqq \pi$), im Antiuhrzeigersinn gerechnet, den die große Achse $O\xi$ der Ellipse mit der positiven Richtung von OX einschließt, und mit $l/2$ den Winkel ($\leqq \pi/4$), den $O\xi$ mit jeder der

Diagonalen des Rechtecks bildet. Wir wollen übereinkommen, diesen Winkel von $O\xi$ aus im Uhrzeigersinn zu rechnen, wenn die Ellipse rechtsläufig ist, und im Antiuhrzeigersinn, wenn sie linksläufig ist (Fall der Zeichnung).

Abgesehen von der Intensität ist so ein elliptisches Licht vollständig beschrieben.

Betrachten wir nun (Fig. 6) die Kugel mit dem Radius 1, wählen wir zwei Pole P_g und P_d und einen Ausgangsmeridian $P_g \times P_d$. Ein Punkt M dieser Kugeloberfläche definiert die Lage, die Form und den Drehungssinn einer Ellipse durch seine Länge $L = X\,C\,m$, von 0 bis 2π von X aus im Antiuhrzeigersinn gezählt, und seine Breite $l = m\,M$, von 0 bis $\pi/2$ vom Äquator aus auf dem Meridian $P_d\,m\,P_g$ gezählt. Befindet

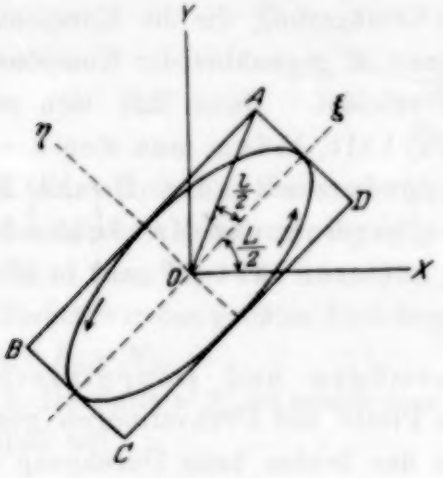


Fig. 5.

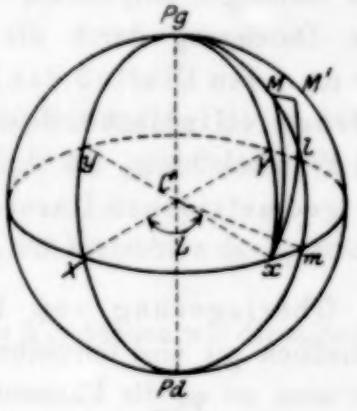


Fig. 6.

M sich auf der nördlichen Halbkugel mit dem Pol P_g, ist die Ellipse linksläufig, auf der südlichen Halbkugel ist die Ellipse rechtsläufig.

Es ist klar,

1. daß jeder Punkt des Äquators geradlinig polarisiertes Licht darstellt; zwei gegenüberliegende Punkte des Äquators zwei aufeinander senkrecht stehende Schwingungen bedeuten; daß allgemeiner die Endpunkte irgend eines Durchmessers zwei Ellipsen gleicher Exzentrizität, aber mit vertauschten Achsen und umgekehrtem Umlaufssinn, darstellen;

2. daß die Pole P_g und P_d links- bzw. rechtszirkular polarisiertes Licht bedeuten;

3. daß Punkte auf dem gleichen Parallelkreis Ellipsen gleicher Exzentrizität und gleichen Umlaufsinnes, aber verschiedener Orientierung entsprechen.

Drehvermögen. Nach dieser letzten Bemerkung ist die Darstellung des Drehvermögens unmittelbar gegeben: Stellen wir uns eine für die vorgegebene Fortpflanzungsrichtung nicht doppelbrechende Platte vor, die ein Drehvermögen besitzt.

Eine einfallende elliptische Schwingung M dreht sich ohne Deformation: Man stellt also die Drehung ϱ dadurch dar, daß man den Punkt M um den Winkel 2ϱ um die Pollinie rotieren läßt.

Doppelbrechung. Nun sei eine doppelbrechende Platte ohne Drehvermögen vorgegeben. Die beiden geradlinig polarisierten Schwingungen, die sich ohne Änderung in der betrachteten Richtung fortpflanzen werden, sind durch zwei diametral gegenüberliegende Punkte x und y des Äquators dargestellt. x sei die durch die Platte verzögerte Schwingung und φ_0 die positive in Perioden gemessene Verzögerung, die die Komponente x einer beliebigen elliptischen Schwingung M gegenüber der Komponente y beim Durchgang durch die Platte erleidet. Dann läßt sich zeigen, daß man den Einfluß der Platte erhält, indem man den die einfallende elliptische Schwingung darstellenden Punkt M um den Winkel $2\pi\varphi_0$ im Antiuhrzeigersinn um die Achse $x \rightarrow y$ der geometrischen Darstellung rotieren läßt (M geht in M' über, Fig. 6).

Überlagerung von Drehvermögen und Doppelbrechung. Schließlich sei eine doppelbrechende Platte mit Drehvermögen gegeben. Wie oben sei φ_0 die Phasendifferenz der beiden beim Durchgang durch die Platte in der betrachteten Fortpflanzungsrichtung geradlinig polarisierten Schwingungen x und y (x verzögert), die ohne Veränderung bei nicht vorhandenem Drehvermögen hindurchgelassen wurden, die also bei unseren Versuchen bei der Fortpflanzung geradlinig polarisiert bleiben, wenn das Feld Null ist. Man stellt den Einfluß dieser Platte dar, indem man die Drehungen $2\pi\varphi_0$ um $x \rightarrow y$ und 2ϱ um die Polachse zusammensetzt, d. h. den Punkt M sich um einen Winkel

$$2\pi\varphi = \sqrt{4\pi^2\varphi_0^2 + 4\varrho^2} \qquad (2)$$

um eine schräge Achse $N_d N_g$ drehen läßt, die die Diagonale des über 2ϱ und $2\pi\varphi_0$ errichteten Rechtecks bildet (Fig. 7). N_d und N_g entsprechen den Airyschen Ellipsen, die unverändert hindurchgelassen werden.

Kommen wir nun auf unsere Versuche zurück. Da die optische Achse in allen ihren Lagen senkrecht zur einfallenden Schwingung steht, bleibt diese ohne Magnetfeld geradlinig; im Kristall bildet sie den ordent-

lichen Strahl. Wir stellen sie durch den äquatorialen Punkt x dar (Fig. 7). Unter dem Einfluß eines gegebenen Feldes und für eine gegebene Richtung der optischen Achse hat sich der Punkt x um eine bestimmte schiefe Achse $N_d N_g$ gedreht und ist in x' übergegangen. Die mit dem Halbschattenanalysator gemessene Größe ist die Drehung der großen Ellipsen-

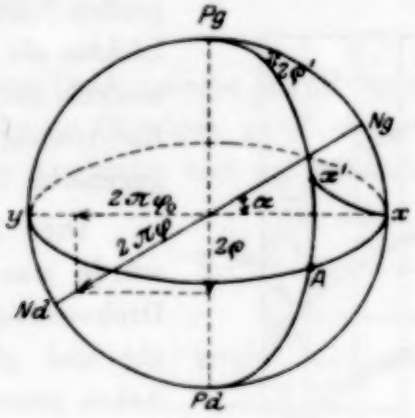


Fig. 7.

achse; diese Drehung, die wir mit ϱ' bezeichnen wollen, ist die Hälfte des durch die Meridiane $P_g x P_d$ und $P_g x' P_d$ gebildeten Flächenwinkels.

Ziehen wir den größten Kreisbogen $x' N_g$ und betrachten das sphärische Dreieck $P_g x' N_g$:

1. Die Seite $x' N_g$ ist gleich dem Bogen $x N_g$; nennen wir diese Seite a, so haben wir

$$\operatorname{tg} a = \frac{\varrho}{\pi \varphi_0}. \tag{3}$$

2. Der Winkel in N_g ist $\pi - 2\pi\varphi$.

3. Die Seite $P_g N_g$ ist gleich $\pi/2 - a$.

Die Formeln der sphärischen Trigonometrie führen zu der Beziehung

$$\operatorname{ctg} P_g \equiv \operatorname{ctg} 2\varrho' = \frac{\cos^2 a + \cos 2\pi\varphi \sin^2 a}{\sin 2\pi\varphi \sin a}, \tag{4}$$

die mittels der Winkel a und $2\pi\varphi$ den Zusammenhang zwischen dem zusammengesetzten Effekt ϱ' von magnetischer Drehung und Doppelbrechung und der eigentlichen magnetischen Drehung ϱ liefert.

Nehmen wir an, daß die Formel (1) das Gesetz der Erscheinung darstellt; wir haben daraus ϱ_N schon abgeleitet (§ 5). Da wir $\varrho_A H$ und $\varrho_N H$ kennen, können wir ϱ für jede Feldrichtung und jede Richtung der Kristallachse berechnen. Da andererseits φ_0 bekannt ist, weil die Kurve $\varphi_0 = f(i)$ aufgenommen worden ist (§ 3), erlauben die Formeln (2) und (3)

$2\pi\varphi$ und a zu ermitteln; schließlich gibt Formel (4) die Drehung ϱ' der großen Ellipsenachse.

Auf diesem Wege sind die ausgezogenen Kurven von Fig. 8 berechnet worden. Sie stellen also theoretische Kurven dar, die dem durch Formel (1) gegebenen Gesetz entsprechen; sie geben die Drehung der großen Achse des elliptischen Lichtes als Funktion des Einfallswinkels für die verschiedenen dem Elektromagnet in den Versuchen gegebenen Stellungen.

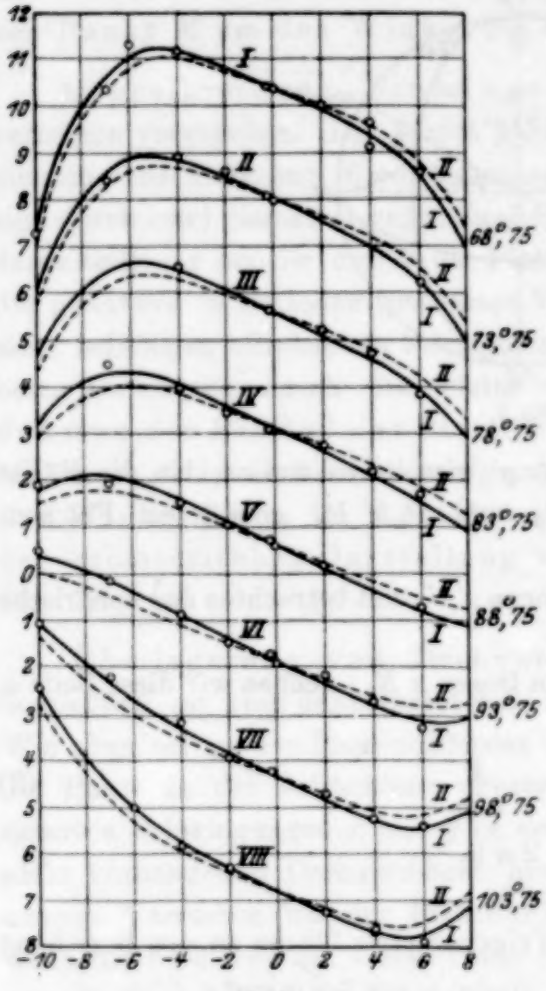


Fig. 8.
Die Abszissen sind die Einfallswinkel in Graden. Die Ordinaten sind die Drehungen ϱ' der großen Achse. Die Zahlen rechts geben für jede Kurve den Winkel zwischen der Richtung des Feldes H und der des verlängerten einfallenden Strahles.

Die gestrichelten Kurven würde man erhalten, wenn das Drehvermögen richtungsunabhängig und gleich dem längs der Achse gemessenen wäre.

Die Kreise stellen die Messungen dar*. Obgleich die Unterschiede zwischen den beiden Kurvenscharen nicht sehr groß sind und die Versuchsfehler stellenweise von der gleichen Größenordnung wie diese Unterschiede sein können, zeigt sich doch, daß die ausgezogenen Kurven den Messungen besser entsprechen.

Besonders muß darauf hingewiesen werden, daß die gestrichelte Kurve (VI) unmöglich ist, weil sie die Drehung Null für $i = -9{,}8^0$ verlangt, während der Versuch keinen Zweifel darüber läßt, daß die Drehung ihren Sinn zwischen -7^0 und -8^0 ändert. Diese einfache Tatsache beweist, daß das Drehvermögen nicht unabhängig von der Richtung ist.

---

* In der Zeichnung haben die Rotationen mit demselben Richtungssinn, wie wenn die Achse dem einfallenden Bündel parallel ist, und bei nach dieser Richtung gedrehtem Felde positive Ordinaten.

Vorausgreifend kann ich schon mitteilen, daß die bei tiefen Temperaturen gemessenen außerordentlich großen Drehungen eine ausgezeichnete Bestätigung des angegebenen Gesetzes liefern. Genauer gesagt bestätigen diese Versuche, da die Drehungen dem Felde nicht mehr proportional sind, eine Verallgemeinerung dieses Gesetzes, und man findet die Formel (1) für kleine Werte von H/T.

Meinen herzlichsten Dank spreche ich Herrn Louis Matout, sous-Directeur du laboratoire de Physique au Museum, aus, dessen Hilfe mir bei der Aufstellung der Apparatur und der Ausführung der Versuche sehr wertvoll gewesen ist.

Die Wellenmechanik des rotierenden Elektrons und die Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes.

Von **J. Frenkel** in Leningrad.

(Eingegangen am 25. September 1928.)

Es wird versucht, im Anschluß an eine frühere Notiz die Grundgleichungen der Wellenmechanik eines Elektrons als Verallgemeinerung der Maxwellschen Feldgleichungen und der entsprechenden d'Alembertschen Gleichungen aufzustellen. Durch eine kleine Modifikation des früher gemachten Ansatzes erhält man auf diese Weise ein System von acht Gleichungen, die sich paarweise zu den vier Gleichungen der Diracschen Theorie vereinigen lassen. Die quadratischen Größen, welche die Ladungs- und Stromdichte bestimmen, erweisen sich dabei als sehr analog mit der Energiedichte und dem Poyntingschen Vektor. Eine Verallgemeinerung des Energieimpulstensors läßt sich aber nicht vollziehen, so daß die Analogie zwischen den Elektronenwellen und den elektromagnetischen Wellen sehr beschränkt bleibt.

Einleitung. In einer früher erschienenen Notiz* habe ich versucht, die Wellenmechanik des rotierenden Elektrons auf Grund von zwei verschiedenen Korrespondenzbetrachtungen zu entwickeln, nämlich auf Grund der Korrespondenz zwischen den korpuskular- und wellenmechanischen Gleichungen einerseits und auf Grund der Korrespondenz zwischen der Lichtquantentheorie und der elektromagnetischen Lichttheorie andererseits. Der Sinn der zweiten Analogiebetrachtung bestand darin, das magnetische und das elektrische Moment des „rotierenden" Elektrons als korpuskulare Äquivalente von zwei Wellengrößen aufzufassen, die der magnetischen und elektrischen Feldstärke entsprechen sollten. Diese zwei Wellenvektoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ können relativistisch als die Komponenten eines Sechservektors $\psi_{\alpha\beta} = -\psi_{\beta\alpha}$ behandelt werden und sollen den Skalar ψ der Schrödingerschen Theorie des „nichtrotierenden" Elektrons ersetzen.

Im Anschluß an die Wellentheorie des Lichtes drückte ich die Größen $\psi_{\alpha\beta}$ durch die Komponenten eines „Viererpotentials" Z_α (früher mit ψ_α bezeichnet) nach den Formeln

$$\psi_{\alpha\beta} = u_\alpha Z_\beta - u_\beta Z_\alpha \tag{1}$$

aus, mit dem verallgemeinerten Differentialoperator

$$u_\alpha = \frac{h}{j}\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - \frac{e}{c}\Phi_\alpha \tag{1a}$$

* ZS. f. Phys. **47**, 799, 1928.

und erhielt als Verallgemeinerung der ersten und zweiten Gruppe der Maxwellschen Feldgleichungen:

$$u_\alpha \psi_{\beta\gamma} + u_\gamma \psi_{\alpha\beta} + u_\beta \psi_{\gamma\alpha} = f_{\alpha\beta} Z_\gamma + f_{\gamma\alpha} Z_\beta + f_{\beta\gamma} Z_\alpha, \tag{2}$$

$$u_\beta \psi_{\alpha\beta} = u_\alpha \psi + \mu_0^2 c^2 Z_\alpha \tag{3}$$

mit

$$f_{\alpha\beta} = -\frac{he}{cj} F_{\alpha\beta} = \frac{he}{cj}\left(\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta}\right)$$

($F_{\alpha\beta}$ — Sechservektor des elektromagnetischen Feldes) und

$$\psi = u_\alpha Z_\alpha. \tag{4}$$

Durch Einsetzen von (1) in (3) ergeben sich die folgenden verallgemeinerten d'Alembertschen Gleichungen für die Komponenten des Vierervektorpotentials Z_α:

$$(u_\beta^2 + \mu_0^2 c^2) Z_\alpha + f_{\alpha\beta} Z_\beta = 0. \tag{5}$$

Diese Gleichungen glaubte ich als die Grundgleichungen der Wellenmechanik des „rotierenden" Elektrons ansehen zu dürfen, wobei ihre weitgehende Ähnlichkeit mit denjenigen Gleichungen, die durch eine wellenmechanische Umformung der relativistischen Bewegungsgleichungen eines rotierenden Elektrons erhalten worden sind, klargemacht wurde.

Inzwischen ist dasselbe Problem von Dirac in einer scheinbar ganz verschiedenen Art und Weise gelöst worden*. Indessen hat Darwin gezeigt, daß die Diracschen Gleichungen in eine Form gebracht werden können, die eine gewisse Analogie mit den Maxwellschen Gleichungen aufweist**. Diese Beziehung zwischen den wellenmechanischen Gleichungen eines „Elektrizitätsquantums" und den elektromagnetischen Feldgleichungen, die man als wellenmechanische Gleichungen von Lichtquanten ansehen darf, muß wahrscheinlich eine grundlegende physikalische Bedeutung haben. Es scheint mir deshalb nicht überflüssig, auf diese Frage zurückzukommen, d. h. die Wellengleichungen des Elektrons als Verallgemeinerung der Maxwellschen Gleichungen aufzustellen. Eine geringe Modifikation der von mir früher gemachten Ansätze wird uns sofort zu den Diracschen Gleichungen führen, wobei die physikalische Bedeutung der dort auftretenden Größen ψ_α klar werden wird.

§ 1. Aufstellung der Grundgleichungen. Die Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum lassen sich folgendermaßen schreiben:

$$\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{f}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0,$$

* Proc. Roy. Soc. (A) **117**, 610, 1928.
** Ebenda (A) **118**, 654, 1928.

wo $\tilde{f}_{\alpha\beta}$ den zu $f_{\alpha\beta}$ dualen Tensor bedeutet:

$$\tilde{f}_{23} = f_{14},\ \tilde{f}_{31} = f_{24},\ \tilde{f}_{12} = f_{34};\quad \tilde{f}_{14} = f_{23},\ \tilde{f}_{24} = f_{31},\ \tilde{f}_{34} = f_{12}.$$

Das zweite Gleichungssystem ist also äquivalent mit

$$\frac{\partial f_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial f_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} = 0.$$

Wir wollen zunächst die einfachste Verallgemeinerung dieser Gleichungen aufsuchen, die dem Falle eines Elektrizitätsquantums e mit verschwindender Ruhmasse ($\mu_0 = 0$) entspricht. Es liegt also nahe, die Größe $f_{\alpha\beta}$ durch $\psi_{\alpha\beta}$ und den Operator $\partial/\partial x_\beta$ durch u_β zu ersetzen; ferner muß man auf den rechten Seiten statt 0 die Komponenten von zwei Vierervektoren s_α bzw. $\tilde{s}_\alpha$ (welche der elektrischen bzw. der magnetischen Stromdichte entsprechen) einführen. Dies gibt

$$u_\beta \psi_{\alpha\beta} = s_\alpha,\quad u_\beta \tilde{\psi}_{\alpha\beta} = \tilde{s}_\beta.$$

Man kann nun die Vektoren s_α und $\tilde{s}_\beta$ als (verallgemeinerte) Gradienten von zwei skalaren Größen ψ bzw. $\tilde{\psi}$ definieren. Man erhält dabei in der Tat zwei Systeme von je vier Gleichungen für die acht unbekannten Größen $\psi_{\alpha\beta} = -\psi_{\beta\alpha}$, ψ und $\tilde{\psi}$:

$$u_\beta \psi_{\alpha\beta} = u_\alpha \psi, \tag{6}$$

$$u_\beta \tilde{\psi}_{\alpha\beta} = u_\alpha \tilde{\psi}. \tag{6a}$$

Das erste Gleichungssystem fällt mit meinen früheren Gleichungen (3) bei $\mu_0 = 0$ zusammen. Das zweite ist aber von den entsprechenden Gleichungen (2), die sich als Identitäten aus dem Ansatz (1) ergeben, formell verschieden. Wir verzichten also auf die Einführung eines Vierervektorpotentials Z_α und versuchen die verallgemeinerten d'Alembertschen Gleichungen (zweiter Ordnung) für die Größen $\psi_{\alpha\beta}$, ψ, $\tilde{\psi}$ aufzustellen.

Durch Anwendung der Operation u_α auf (6) und (6a), mit Rücksicht auf $\psi_{\alpha\beta} = -\psi_{\beta\alpha}$ und auf die Identitäten

$$u_\alpha u_\beta - u_\beta u_\alpha = f_{\alpha\beta}, \tag{7}$$

erhält man zunächst die Gleichungen

$$u_\alpha^2 \psi = \tfrac{1}{2} f_{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta}, \tag{8}$$

$$u_\alpha^2 \tilde{\psi} = \tfrac{1}{2} f_{\alpha\beta} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2} \tilde{f}_{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta}, \tag{8a}$$

deren erste mit meiner früheren Gleichung (57a) (l. c) zusammenfällt (bei $\mu = 0$).

Um die entsprechenden Gleichungen für die $\psi_{\alpha\beta}$ aufzufinden, führen wir den antisymmetrischen Einheitstensor vierten Ranges $t_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (Tensor

von Levi-Civita) ein, welcher die Verknüpfung zwischen den Komponenten von zwei dualen Tensoren nach den Formeln

$$\tilde{\psi}_{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\psi_{\gamma\delta} \tag{9}$$

vermittelt. Es lassen sich dabei die Gleichungen (6a) in der Form

$$t_{\alpha\beta\gamma\delta}\,u_\beta\,\psi_{\gamma\delta} = u_\alpha\,\tilde{\psi}$$

oder

$$u_\alpha\,\psi_{\beta\gamma} + u_\gamma\,\psi_{\alpha\beta} + u_\beta\,\psi_{\gamma\alpha} = -\,t_{\alpha\beta\gamma\delta}\,u_\delta\,\tilde{\psi} \tag{9a}$$

schreiben.

Man hat ferner nach (6):

$$\begin{aligned} u_\gamma\,u_\alpha\,\psi &= u_\gamma\,u_\beta\,\psi_{\alpha\beta} = (u_\gamma\,u_\beta - u_\beta\,u_\gamma)\,\psi_{\alpha\beta} + u_\beta\,(u_\gamma\,\psi_{\alpha\beta}) \\ &= f_{\gamma\beta}\,\psi_{\alpha\beta} - u_\beta\,(u_\alpha\,\psi_{\beta\gamma} + u_\beta\,\psi_{\gamma\alpha} + t_{\alpha\beta\gamma\delta}\,u_\delta\,\tilde{\psi}) \\ &= f_{\gamma\beta}\,\psi_{\alpha\beta} - u_\beta^2\,\psi_{\gamma\alpha} - (u_\beta\,u_\alpha - u_\alpha\,u_\beta)\,\psi_{\beta\gamma} - u_\alpha\,(u_\beta\,\psi_{\beta\gamma}) \\ &\quad - t_{\alpha\beta\gamma\delta}\,u_\beta\,u_\delta\,\tilde{\psi}, \end{aligned}$$

d. h. wegen

$$u_\beta\,\psi_{\beta\gamma} = -\,u_\gamma\,\psi$$

und

$$t_{\alpha\beta\gamma\delta}\,u_\beta\,u_\delta\,\tilde{\psi} = t_{\alpha\delta\gamma\beta}\,u_\delta\,u_\beta\,\tilde{\psi} = -\,t_{\alpha\beta\gamma\delta}\,u_\delta\,u_\beta\tilde{\psi}:$$

$$\begin{aligned} u_\beta^2\,\psi_{\gamma\alpha} &= f_{\gamma\beta}\,\psi_{\alpha\beta} - f_{\beta\alpha}\,\psi_{\beta\gamma} - u_\gamma\,u_\alpha\,\psi + u_\alpha\,u_\gamma\,\psi \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\,t_{\alpha\beta\gamma\delta}\,(u_\beta\,u_\delta - u_\delta\,u_\beta)\,\tilde{\psi} \end{aligned}$$

oder schließlich

$$u_\beta^2\,\psi_{\gamma\alpha} = f_{\gamma\beta}\,\psi_{\alpha\beta} - f_{\beta\alpha}\,\psi_{\beta\gamma} + f_{\alpha\gamma}\,\psi + \tilde{f}_{\alpha\gamma}\,\tilde{\psi}.$$

Wir wollen dieses Gleichungssystem in die Form

$$u_\gamma^2\,\psi_{\alpha\beta} + (f_{\alpha\gamma}\,\psi_{\gamma\beta} - f_{\beta\gamma}\,\psi_{\gamma\alpha}) + f_{\alpha\beta}\,\psi + \tilde{f}_{\alpha\beta}\,\tilde{\psi} = 0 \tag{10}$$

umschreiben. Ein Vergleich mit dem Gleichungssystem (58), das ich in meiner früheren Arbeit erhalten hatte, zeigt, daß es (bei $\mu_0 = 0$) damit identisch wird, falls man den dort mit $O_{\alpha\beta}$ bezeichneten Ausdruck mit $\tilde{f}_{\alpha\gamma}\,\tilde{\psi}$ identifizieren könnte (man beachte, daß die dort auftretende Divergenz $u_\gamma\,\psi_\gamma$ — oder $u_\gamma\,Z_\gamma$ — mit ψ identisch ist).

Es sei daran erinnert, daß die Gleichungen (10) den relativistischen Gleichungen

$$\frac{1}{\varkappa}\,\frac{d\,m_{\alpha\beta}}{d\,\tau} = F_{\alpha\gamma}\,m_{\gamma\beta} - F_{\beta\gamma}\,m_{\gamma\alpha}$$

für die Rotationsbewegung des korpuskularen Elektrons entsprechen [vgl. (2) l. c.], während die Gleichungen (8) oder (8a) als die wellenmechanische Darstellung der Translationsbewegung aufgefaßt werden können. Was die Ruhmasse des Elektrons anbetrifft, so läßt sie sich sehr einfach berücksichtigen, und zwar durch Ergänzung des Opera-

tors $u_\alpha^2 (= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)$ mit dem zusätzlichen Term $\mu_0^2 c^2$. Setzt man zur Abkürzung

$$u_\alpha^2 + \mu_0^2 c^2 = D, \tag{11}$$

so lauten die vollständigen wellenmechanischen Gleichungen des Elektrons:

$$\left.\begin{aligned} D\,\psi + \frac{e\,h}{2\,c\,j}\,F_{\alpha\beta}\,\psi_{\alpha\beta} &= 0, \\ D\,\widetilde{\psi} + \frac{e\,h}{2\,c\,j}\,\widetilde{F}_{\alpha\beta}\,\psi_{\alpha\beta} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{11a}$$

$$D\,\psi_{\alpha\beta} = \frac{e\,h}{c\,j}\,[(F_{\alpha\gamma}\,\psi_{\gamma\beta} - F_{\beta\gamma}\,\psi_{\gamma\alpha}) + F_{\alpha\beta}\,\psi + \widetilde{F}_{\alpha\beta}\,\widetilde{\psi}]. \tag{11b}$$

§ 2. **Vergleich mit der Diracschen Theorie.** Man kann sich leicht überzeugen, daß die obigen Gleichungen mit denjenigen von Dirac vollkommen äquivalent sind. — Um dies einzusehen, wollen wir zunächst wieder auf den Spezialfall $\mu_0 = 0$ zurückkehren, d. h. die ursprünglichen Gleichungen (6) und (6a) betrachten.

Mit den Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} \psi &= M_0, \quad \widetilde{\psi} = i\,N_0, \\ \psi_{23} &= M_1, \quad \psi_{31} = M_2, \quad \psi_{12} = M_3, \\ \psi_{14} &= i\,N_1, \quad \psi_{24} = i\,N_2, \quad \psi_{34} = i\,N_3, \\ u_1 &= p_1, \quad u_2 = p_2, \quad u_3 = p_3, \quad u_4 = i\,p_4, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

d. h.

$$p_4 = -\frac{1}{c}\left(\frac{h}{j}\,\frac{\partial}{\partial t} + e\,\varphi\right),$$

nehmen diese Gleichungen die folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} p_2 N_3 - p_3 N_2 + p_4 M_1 &= p_1 N_0, \\ p_3 N_1 - p_1 N_3 + p_4 M_2 &= p_2 N_0, \\ p_1 N_2 - p_2 N_1 + p_4 M_3 &= p_3 N_0, \\ p_1 M_1 + p_2 M_2 + p_3 M_3 &= p_4 N_0; \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

$$\left.\begin{aligned} p_2 M_3 - p_3 M_2 - p_4 N_1 &= p_1 M_0, \\ p_3 M_1 - p_1 M_3 - p_4 N_2 &= p_2 M_0, \\ p_1 M_2 - p_2 M_1 - p_4 N_3 &= p_3 M_0, \\ p_1 N_1 + p_2 N_2 + p_3 N_3 &= -p_4 M_0. \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

Es liegt nun nahe, die obigen acht Gleichungen miteinander paarweise zu kombinieren nach dem Schema:

$$\begin{aligned} j\,A_1 - A_2, \quad & j\,A_3 + B_4, \\ -B_1 - j\,B_2, \quad & -B_3 + j\,A_4. \end{aligned}$$

Dabei lassen sie sich zu vier Gleichungen vereinigen von der Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}(p_1 + j\,p_2)\,\psi_1 - p_3\,\psi_2 + p_4\,\psi_4 &= 0,\\ (p_1 - j\,p_2)\,\psi_2 + p_3\,\psi_1 + p_4\,\psi_3 &= 0,\\ (p_1 + j\,p_2)\,\psi_3 - p_3\,\psi_4 + p_4\,\psi_2 &= 0,\\ (p_1 - j\,p_2)\,\psi_4 + p_3\,\psi_3 + p_4\,\psi_1 &= 0,\end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

wo die Größen $\psi_1, \ldots \psi_4$ die folgende Bedeutung haben:

$$\left.\begin{aligned}\psi_1 &= N_3 - j\,N_0, \quad \psi_2 = N_1 + j\,N_2,\\ \psi_3 &= j\,M_3 + M_0 = j\,(M_3 - j\,M_0),\\ \psi_4 &= j\,M_1 - M_2 = j\,(M_1 + j\,M_2).\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Es soll nicht angenommen werden, daß diese Vereinigung von (A) und (B) in (C) einer Vereinigung von acht reellen Größen M, N in vier komplexen $\psi_1, \ldots \psi_4$ entspricht. Man kann leicht zeigen, daß die Größen M und N selbst komplex sein müssen (dies folgt aus dem komplexen Charakter der Operatoren $p_1, \ldots p_4$); sie lassen sich deshalb keineswegs als die reellen oder imaginären Anteile von komplexen Größen auffassen.

Die Gleichungen (C) zerfallen in natürlicher Weise [entsprechend ihrer Entstehung aus (A) und (B) nach dem angeführten Schema] in zwei Paare, nämlich $C_{1,2}$ einerseits und $C_{3,4}$ andererseits. Will man nun diese Gleichungen durch Einführung der Elektronenmasse derart vervollständigen, daß in den sich daraus ergebenden d'Alembertschen Gleichungen (zweiter Ordnung) der Differentialoperator $D = u_a^2 + \mu_0^2 c^2$ statt u_a^2 erscheinen soll, so genügt es, in dem ersten Paare den Operator p_4 durch

$$p_4' = p_4 - \mu_0 c$$

und in dem zweiten durch

$$p_4'' = p_4 + \mu_0 c$$

zu ersetzen. Man erhält dabei die Diracschen Gleichungen in der Darwinschen Form:

$$\left.\begin{aligned}(p_1 + j\,p_2)\,\psi_1 - p_3\,\psi_2 + (p_4 - \mu_0 c)\,\psi_4 &= 0,\\ (p_1 - j\,p_2)\,\psi_2 + p_3\,\psi_1 + (p_4 - \mu_0 c)\,\psi_3 &= 0,\\ (p_1 + j\,p_2)\,\psi_3 - p_3\,\psi_4 + (p_4 + \mu_0 c)\,\psi_2 &= 0,\\ (p_1 - j\,p_2)\,\psi_4 + p_3\,\psi_3 + (p_4 + \mu_0 c)\,\psi_1 &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Die ihnen äquivalenten „verallgemeinerten Maxwellschen Gleichungen“ (erster Ordnung) für die Größen $\psi_{\alpha\beta}$, ψ, $\tilde{\psi}$ ergeben sich aus unseren

ursprünglichen Gleichungen (6) und (6a) durch eine ähnliche Änderung der Operatoren u_α. Und zwar gilt, wenn man

$$\left.\begin{aligned} u'_\alpha = u''_\alpha = u_\alpha \ (\alpha = 1, 2, 3), \quad u'_4 = u_4 - i\mu_0 c, \\ u''_4 = u_4 + i\mu_0 c \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

setzt,

$$\left.\begin{aligned} u'_\beta \widetilde{\psi}_{\alpha\beta} = u''_\alpha \widetilde{\psi}, \\ u''_\beta \psi_{\alpha\beta} = u'_\alpha \psi. \end{aligned}\right\} \tag{15a}$$

In dreidimensionaler vektorieller Schreibweise lauten die Gleichungen (15a):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p} \times \mathfrak{R} + p'_4 \mathfrak{M} = \mathfrak{p} N_0, \quad \mathfrak{p} . \mathfrak{M} = p''_4 N_0, \\ \mathfrak{p} \times \mathfrak{M} - p''_4 \mathfrak{R} = \mathfrak{p} M_0, \quad \mathfrak{p} . \mathfrak{R} = - p'_4 M_0. \end{aligned}\right\} \tag{15b}$$

Sie sind also tatsächlich identisch mit den Gleichungen (2) und (3) der Darwinschen Arbeit (mit einem unwesentlichen Unterschied der Bezeichnungen).

Es ist zu beachten, daß diese Gleichungen, im Gegensatz zu den daraus folgenden „d'Alembertschen" Gleichungen (11a, b) keine relativistisch invariante Gestalt haben. In dieser Hinsicht behalten sie eine gewisse Analogie mit den Maxwellschen Gleichungen für ein homogenes Medium, dessen Dielektrizitätskonstante ε und magnetische Permeabilität μ von 1 verschieden sind. Setzt man nämlich $p'_4 = p_4 \mu$, $p''_4 = p_4 \varepsilon$, $M_0 = N_0 = 0$ und interpretiert die Vektoren $\mathfrak{M}$ und $-\mathfrak{R}$ als die magnetische bzw. die elektrische Feldstärke, so erhält man aus (15b) die bekannten elektromagnetischen Feldgleichungen für ein solches Medium.

§ 3. Quadratische Größen. In meiner früheren Arbeit habe ich die Meinung geäußert, daß die statistische Dichte des den Elektronenwellen zugeordneten korpuskularen Größenkomplexes sich durch den reellen Teil des dem elektromagnetischen Impulsenergietensor analogen Tensors $T_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\gamma} \psi^*_{\gamma\beta} + \frac{1}{4} \delta_{\alpha\beta} \psi_{\gamma\gamma'} \psi^*_{\gamma\gamma'}$ ausdrücken läßt. Insbesondere habe ich für die Ladungs- und Stromdichte die folgenden der elektromagnetischen Energiedichte bzw. dem Poyntingschen Vektor analogen Ausdrücke vorgeschlagen:

$$\varrho = \frac{e}{2} (|M|^2 + |N|^2), \quad \mathfrak{j} = \frac{e}{2} (\mathfrak{R} . \mathfrak{M}^* + \mathfrak{R}^* . \mathfrak{M}). \tag{16}$$

Diese Vermutung hat sich nun vom Standpunkte der Diracschen Theorie als ungefähr richtig erwiesen in dem Sinne, daß die exakten Ausdrücke für ϱ und $\mathfrak{j}$ als Funktionen der Diracschen Größen $\psi_1, \ldots \psi_4$ in einer zu (16) analogen Form dargestellt werden können.

Es gilt nämlich nach Darwin

$$\varrho = e(\psi_1 \psi_1^* + \psi_2 \psi_2^* + \psi_3 \psi_3^* + \psi_4 \psi_4^*),$$
$$j_1 = -e(\psi_1 \psi_4^* + \psi_1^* \psi_4 + \psi_2 \psi_3^* + \psi_2^* \psi_3)$$

(die zwei anderen Komponenten der Stromdichte wollen wir nicht aufschreiben). Setzt man hier die Ausdrücke (13) ein, so erhält man

$$\varrho = e(|M|^2 + |N|^2 + |M_0|^2 + |N_0|^2) \tag{16a}$$

und

$$\left.\begin{aligned} j_1 = {} & e\Re(M_2^* N_3 - M_3^* N_2 + M_1^* N_0 - M_0^* N_1) \\ & - e\Im(M_1^* N_3 + M_3^* N_1 - M_2^* N_0 - M_0^* N_2). \end{aligned}\right| \tag{16b}$$

Falls die Größen M, N sämtlich reell wären, hätte man einfach

$$\mathfrak{j} = e(\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} + \mathfrak{M} N_0 - M_0 \mathfrak{N}).$$

Damit j_1 auch im Falle komplexer Werte dieser Größen die erste Komponente eines dreidimensionalen Vektors darstellen könnte, muß das zweite Glied in (16a) identisch verschwinden. Ich habe nicht versucht einzusehen, ob die entsprechenden Beziehungen mit den Grundgleichungen für die betreffenden Größen verträglich sind. Das scheint nicht unmöglich zu sein, denn diese acht Grundgleichungen (15a) sind tatsächlich den vier Gleichungen (14) äquivalent.

Es ist interessant zu bemerken, daß die oben definierten Größen j_1, j_2, j_3, ϱ einen Vierervektor bilden und nicht die vierte Spalte eines Tensors zweiten Ranges, wie dies für die entsprechenden elektromagnetischen Größen (Poyntingscher Vektor, Energiedichte) der Fall ist. Man kann leicht zeigen, daß der Impulsenergietensor sich nicht in dem hier betrachteten Sinne verallgemeinern läßt und daß die den Komponenten der Maxwellschen Spannungen entsprechenden verallgemeinerten Größen entweder vollständig fehlen, oder wenigstens keine Erhaltungsbeziehung von der Art $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{j} = 0$ zulassen.

Man sieht also, daß zwischen den Elektronenwellen und den elektromagnetischen Wellen keine vollständige Analogie besteht und daß die ersteren nur mit gewissen Beschränkungen als eine Verallgemeinerung der letzteren behandelt werden können. Dementsprechend scheint es nicht zweckmäßig, statt der vier Diracschen Größen $\psi_1, \ldots \psi_4$ die acht ebenfalls komplexen Größen M, N einzuführen.

Leningrad, Phys.-Techn. Röntgeninstitut, August 1928.

Präzisionsmessungen in der K-Serie der Elemente 30 Zn bis 44 Ru.

Von **Bengt Edlén** in Uppsala.

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 8. Oktober 1928.)

Mit dem Präzisions-Tubusspektrometer von Siegbahn und Larsson sind die K-Linien α_2, α_1, β_3, β_1 und β_2 der Elemente Zn, As, Se, Br, Rb, Sr, Y, Zr, Nb und Ru (außer Zn β_3, As β_3, Se β_3 und Br β_3) in erster Ordnung ausgemessen worden.

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung der Präzisionsmessungen im kurzwelligen Gebiet der K- und L-Serien, die seit 1926 mit dem neuen Siegbahnschen Tubusspektrometer von verschiedenen Autoren ausgeführt worden sind. Die Messungen in der K-Serie umfassen jetzt die Elemente von 24 Cr bis 50 Sn mit Ausnahme von 31 Ga, 32 Ge, 48 Cd und 49 In.

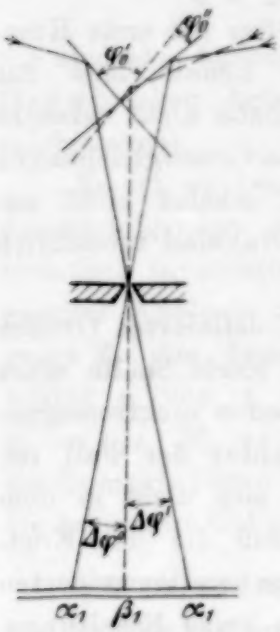


Fig. 1.

Das Spektrometer und dessen Einjustierung, sowie das Hochspannungsaggregat sind früher eingehend beschrieben worden*. Als Gitter wurde der Kalkspatkristall P. K. 2 benutzt. Die Tubuslänge betrug 622,11 mm. Die Spaltbreite war 0,02 bis 0,03 mm.

Der Glanzwinkel der Linie α_1 wurde nach der Siegbahnschen Umlegungsmethode bestimmt. Die Linie β_1, deren Expositionsdauer im allgemeinen mehrere Stunden betrug, wurde, nach Drehen des Kristalls, zusammen mit einer symmetrischen Doppelaufnahme der α_1 exponiert (Fig. 1). $180^0 - \varphi_0'$ und φ_0'' sind die Drehungswinkel des Kristalls zwischen der β_1-Exposition und den beiden α_1-Aufnahmen. $\Delta\varphi'$ und $\Delta\varphi''$ sind die aus den Linienabständen auf der Platte berechneten Korrektionswinkel mit geeignetem Zeichen. Wenn die Glanzwinkel der Linien durch α_1 und β_1 bezeichnet werden, erhält man aus Fig. 1

$$\alpha_1 + \beta_1 = \varphi_0' + \Delta\varphi',$$
$$\alpha_1 - \beta_1 = \varphi_0'' + \Delta\varphi'',$$

woraus

$$2\beta_1 = (\varphi_0' - \varphi_0'') + (\Delta\varphi' - \Delta\varphi'')$$

* A. Larsson, Phil. Mag. (7) **3**, 1136, 1927; G. Kellström, ZS. f. Phys. **41**, 516, 1927.

oder wenn

$$\varphi_0' - \varphi_0'' = 2\varphi_0 \quad \text{und} \quad \Delta\varphi' - \Delta\varphi'' = 2\Delta\varphi,$$
$$\beta_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi.$$

Aus derselben Platte wird also nebst der α_1-Bestimmung auch eine Messung der β_1 erhalten. α_2 wurde relativ zu α_1, β_3 und β_2 relativ zu β_1 gemessen. Hierbei wurde die Differentialform der Braggschen Gleichung

$$\Delta\lambda = 2d\cos\varphi\,\Delta\varphi$$

benutzt.

Die Glanzwinkel sind auf 18° reduziert. Da der lineare Ausdehnungskoeffizient des Kalkspats senkrecht zu den reflektierenden Atomebenen $1{,}04 \cdot 10^{-5}$ ist, wird der Korrektionswinkel in Sekunden

$$d\varphi = 2{,}15\,(t - 18)\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Die Temperatur wurde während einer Exposition in gleichen Zeitintervallen auf 0,1° abgelesen, und das Mittel zur Berechnung des Korrektionswinkels benutzt.

Beim Ausmessen der Platten wurden in einem Gaertnerschen Komparator an vier verschiedene Stellen der Mikrometerschraube je fünf Ablesungen von jeder Linie gemacht.

Um die Einjustierung des Spektrometers zu kontrollieren, wurde Mo $K\alpha_1$ gemessen, wobei die folgenden Werte erhalten wurden:

Platte Nr.	φ_{18}	λ (X-E.)
Ed 46	6° 42′ 35,6″	707,839
47	34,7	813
48	34,7	813
49	35,7	842
54	35,6	839
55	35,3	830
56	35,3	830
57	35,7	842
Mittel:	6° 42′ 35,3″	707,831
Larsson*:	6° 42′ 35,3″	707,831

Die folgende Tabelle 1 gibt die verwendete Hochspannung (Kilovolt) und die Stromstärke (Milliampere), sowie die Expositionsdauer (Stunden) bei einer α- bzw. β-Aufnahme. Einige Platten sind um das Doppelte der angegebenen Zeit exponiert, damit β_2 meßbar erhalten werde. Die erste Spalte enthält die Form, in welcher das Element an die Antikathode gebracht wurde.

* A. Larsson, Phil. Mag. (7) **3**, 1136, 1927.

Folgende Konstanten sind benutzt:

Gitterkonstante $d = 3029{,}040$; $\log 2d = 3{,}782\,3350$.
Rydbergsche Konstante $\log R = 5{,}040\,3531$.

Tabelle 1.

Element	Präparat	Hochspannung kV	Strom mA	Expositionsdauer Stunden α_1	Expositionsdauer Stunden β_1
30 Zn	Metall (Blech)	35	4	0,3	2—3
33 As	Trioxyd	35	1,5	0,3	2
34 Se	Metall (Pulver)	35	1,5	1,5	4
35 Br	Natriumbromid	35	1,5	1	3
37 Rb	Metall	35	2	0,5	2
38 Sr	Oxyd	40	4	0,5	3
39 Y	Oxyd	40	4	0,5	2,5
40 Zr	Oxyd	40	4	0,5	2,5
41 Nb	Metall (Pulver)	45	8	1,5	4
44 Ru	Metall (Körner)	45	6	1	3—5

Die Tabellen 2 und 3 enthalten das Resultat der Absolutbestimmungen der α_1, nebst einer Vergleichung mit den Messungen von Leide*,

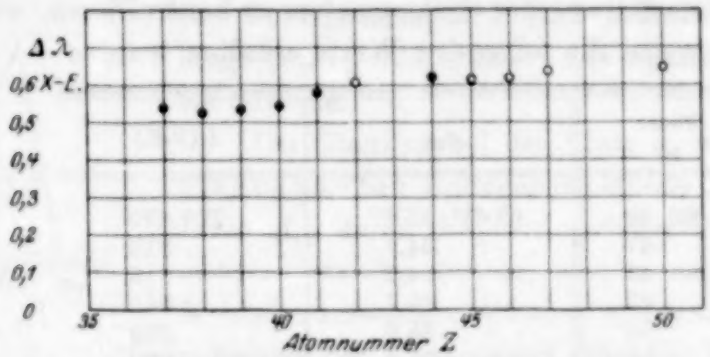


Fig. 2. Wellenlängendifferenz $\beta_2 - \beta_1$ als Funktion der Atomnummer.
○ frühere Messungen. ⊕ jetzige Messungen.

die unter den schon vorliegenden die genauesten sein dürften. Wie ersichtlich, ist die Übereinstimmung im allgemeinen gut. Tabelle 4 gibt die Messungen der α_2 relativ zu α_1. Dabei ist n die Anzahl der Einzelmessungen, aus denen das Mittel genommen ist. Die Bestimmungen der β_1 sind in Tabelle 5 und 6 enthalten. Bei den Elementen 30 Zn bis 35 Br konnte die β_3-Linie wegen der Nähe der viel stärkeren β_1 nicht ausgemessen werden. Die β_1-Messungen dürften trotzdem von β_3 beinahe unbeeinflußt sein. Die schlechte Übereinstimmung mit den Leideschen

* A. Leide, Diss. Lund 1925; ZS. f. Phys. **39**, 686, 1926.

Tabelle 2. ($K\alpha_1$).

Platte Nr.	Element	$2\varphi_0$	α	$2\Delta\varphi$	Temperatur	φ_{18}	λ
Ed 1	30 Zn	27° 14′ 57,7″	1,0896	+ 6′ 1,3″	16,5°	13° 40′ 28,5″	1432,173
2		27 14 57,9	1,0879	+ 6 0,7	16,8	28,5	173
3		27 30 3,2	1,6458	− 9 5,6	17,4	28,5	173
4		27 30 2,1	1,6436	− 9 5,0	17,5	28,3	168
5		27 30 0,2	1,6400	− 9 3,8	17,7	28,1	162
					Mittel:	13° 40′ 28,4″	1432,170
Ed 33	33 As	22° 15′ 3,2″	0,9377	+ 5′ 10,9″	19,1°	11° 10′ 7,5″	1173,445
35		22 30 2,1	1,7728	− 9 47,8	18,6	7,5	445
36		22 30 1,2	1,7717	− 9 47,4	19,0	7,3	440
37		22 15 3,7	0,9348	+ 5 9,9	18,8	7,2	437
59		22 30 3,4	1,7788	− 9 49,8	19,5	7,4	443
60		22 15 1,2	0,9446	+ 5 13,2	18,8	7,5	445
					Mittel:	11° 10′ 7,4″	1173,443
Ed 26	34 Se	21° 4′ 58,1″	1,2293	− 6′ 47,6″	20,8°	10° 29′ 6,5″	1102,452
27		20 55 2,3	0,5766	+ 3 11,2	21,2	8,0	495
28		20 55 1,3	0,5755	+ 3 10,8	21,8	7,5	481
65		20 49 55,8	1,5043	+ 8 18,8	18,4	7,4	478
					Mittel:	10° 29′ 7,4″	1102,477
Ed 29	35 Br	19° 40′ 2,2″	0,6098	+ 3′ 22,2″	20,9°	9° 51′ 43,3″	1037,605
30		19 50 2,4	1,1989	− 6 37,5	18,5	42,7	587
31		19 40 3,6	0,6087	+ 3 21,8	19,1	43,1	599
32		19 50 2,5	1,1984	− 6 37,3	18,0	42,6	584
					Mittel:	9° 51′ 42,9″	1037,594
Ed 38	37 Rb	17° 30′ 1,3″	0,4235	+ 2′ 20,4″	19,6°	8° 46′ 11,3″	923,645
39		17 40 0,8	1,3877	− 7 40,1	18,9	10,7	628
40		17 40 2,0	1,3906	− 7 41,1	19,2	10,9	634
41		17 40 1,0	1,3885	− 7 40,4	20,0	11,0	637
					Mittel:	8° 46′ 11,0″	923,636
Ed 16	38 Sr	16° 30′ 0,6″	0,8633	+ 4′ 46,2″	16,4°	8° 17′ 22,9″	873,443
17		16 29 58,9	0,8653	+ 4 46,9	19,8	23,5	460
18		16 39 57,9	0,9431	− 5 12,7	20,1	23,3	454
52		16 40 1,6	0,9561	− 5 17,0	18,7	22,5	431
					Mittel:	8° 17′ 23,0″	873,447
Ed 11	39 Y	15° 34′ 58,1″	1,2101	+ 6′ 41,2″	18,8°	7° 50′ 49,9″	827,119
12		15 35 3,4	1,1961	+ 6 36,7	18,5	50,2	128
14		15 50 3,0	1,5173	− 8 23,1	17,3	49,8	116
51		15 50 1,8	1,5141	− 8 22,0	18,8	50,1	125
					Mittel:	7° 50′ 50,0″	827,122
Ed 8	40 Zr	14° 49′ 56,5″	0,4886	+ 2′ 42,0″	18,4°	7° 26′ 19,4″	784,314
9		14 50 0,8	0,4711	+ 2 36,2	18,9	18,7	294
10		15 0 1,5	1,3424	− 7 25,1	19,0	18,5	288
50		14 59 59,5	1,3365	− 7 23,1	19,4	18,6	291
					Mittel:	7° 26′ 18,8″	784,297
Ed 20	41 Nb	13° 59′ 59,2″	1,3161	+ 7′ 16,4″	19,9°	7° 3′ 38,3″	744,658
21		13 59 56,5	1,3252	+ 7 19,4	19,9	38,5	663
22		14 15 0,7	1,4089	− 7 47,1	20,1	37,4	631
23		14 14 58,4	1,4042	− 7 44,1	20,2	37,8	643
53		14 0 1,4	1,3089	+ 7 14,0	19,1	38,0	649
					Mittel:	7° 3′ 38,0″	744,649

Tabelle 2 (Fortsetzung).

Platte Nr.	Element	$2\varphi_0$	a	$2\Delta\varphi$	Temperatur	φ_{18}	λ
Ed 43	44 Ru	12°20′ 3,0″	1,8794	— 10′ 23,1″	19,2°	6°4′ 50,3″	641,721
44		12 20 2,8	1,8774	— 10 22,5	19,5	50,5	727
45		12 4 57,5	0,8556	+ 4 43,7	19,7	51,0	741
63		12 5 0,7	0,8503	+ 4 41,9	18,2	51,3	750
					Mittel:	6°4′ 50,8″	641,735

Tabelle 3. ($K\alpha_1$).

Element	λ	λ (Leide)	$\frac{\nu}{R}$	$\sqrt{\frac{\nu}{R}}$
30 Zn	1432,174	1432,06	636,286	25,2247
33 As	1173,443	1173,43	776,578	27,8671
34 Se	1102,477	1102,42	826,566	28,7501
35 Br	1037,594	1037,56	878,252	29,6353
37 Rb	923,636	923,60	986,611	31,4104
38 Sr	873,447	873,37	1043,303	32,3002
39 Y	827,122	827,01	1101,735	33,1924
40 Zr	784,297	784,29	1161,894	34,0866
41 Nb	744,649	744,57	1223,758	34,9822
44 Ru	641,735	641,81	1420,009	37,6830

Tabelle 4. ($K\alpha_2$).

Element	$\Delta\lambda$	n	λ	$\frac{\nu}{R}$	$\sqrt{\frac{\nu}{R}}$
30 Zn	3,858	(6)	1436,032	634,575	25,1908
33 As	3,991	(4)	1177,434	773,945	27,8199
34 Se	4,038	(4)	1106,515	823,550	28,6975
35 Br	4,070	(4)	1041,664	874,821	29,5774
37 Rb	4,125	(4)	927,761	982,225	31,3405
38 Sr	4,166	(5)	877,613	1038,350	32,2234
39 Y	4,195	(5)	831,317	1096,176	33,1086
40 Zr	4,216	(4)	788,513	1155,681	33,9953
41 Nb	4,238	(5)	748,887	1216,832	34,8831
44 Ru	4,323	(4)	646,058	1410,507	37,5567

Die Tabelle enthält die Mittelwerte aus n Einzelbestimmungen.

Werten rührt größtenteils davon her, daß er bei geringerer Dispersion β_1 und β_3 nicht separiert hat. Die Messungen von β_3 und β_2 relativ zu β_1 sind in den Tabellen 7 und 8 enthalten.

Aus Tabelle 8 erhellt, daß die Differenzen $\beta_3 - \beta_1$ im betreffenden Bereiche beinahe konstant sind. In Fig. 2 sind die $\Delta\lambda$-Werte als Funktion der Atomnummern Z dargestellt, wobei für die Elemente 42, 45,

46, 47 und 50 frühere Messungen mit demselben Spektrometer benutzt sind. Die Schwierigkeit, das $\beta_1\,\beta_3$-Dublett bei niedrigeren Atomnummern aufzulösen, hängt also wesentlich von einer Verbreiterung der Linien ab.

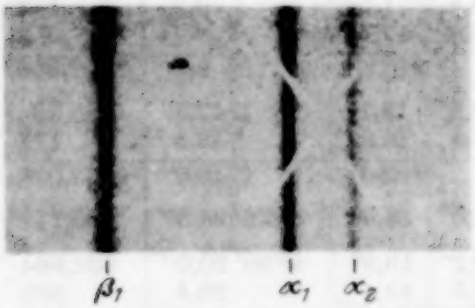


Fig. 3. 30 Zn

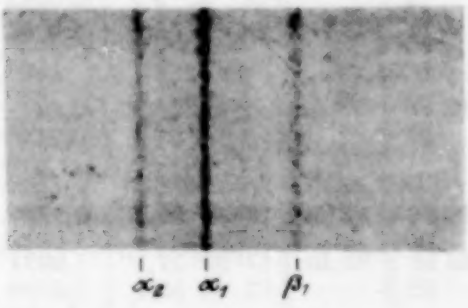


Fig. 4. 33 As.

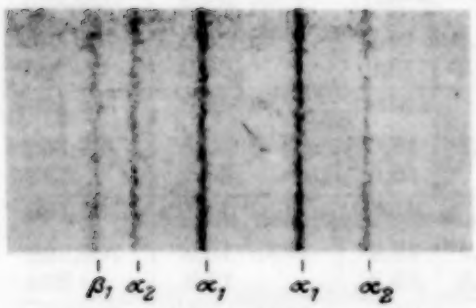


Fig. 5. 35 Br.

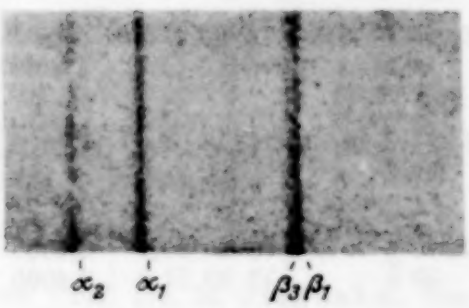


Fig. 6. 37 Rb.

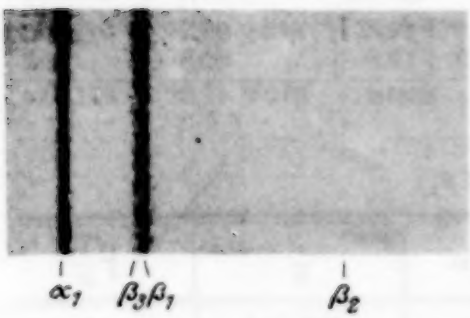


Fig. 7. 38 Sr.

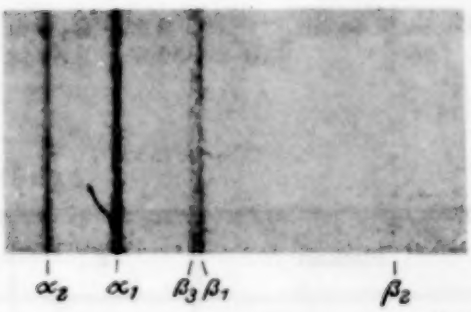


Fig. 8. 40 Zr.

Aufnahmen der $K\alpha$ und $K\beta$ (nach Drehen des Kristalls) bei 17facher Vergrößerung.

Diese allgemeine Verbreiterung bei sinkenden Atomnummern ist deutlich aus Fig. 3 bis 8 zu sehen, die einige Aufnahmen der $K\alpha$- und $K\beta$-Linien (nach Drehen des Kristalls) in 17facher Vergrößerung zeigen.

Tabelle 5. ($K\beta_1$).

Platte Nr.	Element	$2\varphi_0$	a	$2\Delta\varphi$	Temperatur	φ_{18}	λ
Ed 3	30 Zn	25° 0′ 0,0″	3,9254	− 21′ 41,4″	17,6°	12° 19′ 9,1″	1292,538
4		25 0 3,7	3,9354	− 21 44,8	17,5	9,2	541
5		24 59 58,6	3,9166	− 21 38,8	17,7	9,7	558
					Mittel:	12° 19′ 9,3″	1292,546
Ed 36	33 As	2° 19′ 56,9″	2,9641	− 16′ 22,8″	19,1°	10° 1′ 47,5″	1055,084
37		2 4 57,3	0,2446	− 1 21,1	18,9	48,5	113
					Mittel:	10° 1′ 48,0″	1055,099
Ed 65	34 Se	18° 49′ 58,9″	0,2159	− 1′ 11,6″	18,3°	9° 24′ 23,8″	990,131
Ed 31	35 Br	17° 29′ 57,1″	1,9371	+ 10′ 42,2″	18,9°	8° 50′ 20,0″	930,864
32		17 49 55,1	1,6728	− 9 14,5	18,4	20,4	875
					Mittel:	8° 50′ 20,2″	930,870
Ed 40	37 Rb	15° 59′ 57,3″	3,3488	− 18′ 30,3″	19,3°	7° 50′ 43,9″	826,945
41		16 0 11,9	3,3885	− 18 43,6	19,9	44,7	968
					Mittel:	7° 50′ 44,3″	826,956
Ed 17	38 Sr	14° 50′ 4,6″	0,1635	− 0′ 54,1″	19,7°	7° 24′ 35,7″	781,294
18		15 0 1,2	1,9619	− 10 50,5	19,9	36,0	303
					Mittel:	7° 24′ 35,8″	781,299
Ed 12	39 Y	13° 45′ 3,5″	2,8879	+ 15′ 57,7″	18,6°	7° 0′ 30,8″	739,192
13					18,5	30,5	183
					Mittel:	7° 0′ 30,7″	739,188
Ed 10	40 Zr	13° 29′ 59,1″	2,4368	− 13′ 27,9″	18,9°	6° 38′ 15,9″	700,263
50		13 29 51,8	2,4065	− 13 17,9	19,3	17,3	304
					Mittel:	6° 38′ 16,6″	700,284
Ed 21	41 Nb	12° 19′ 54,7″	2,8258	+ 15′ 37,0″	20,0°	6° 17′ 46,4″	664,382
53		12 19 57,5	2,8171	+ 15 34,0	18,9	46,0	370
					Mittel:	6° 17′ 46,2″	664,376
Ed 44	44 Ru	11° 10′ 2,2″	3,7508	− 20′ 43,5″	19,4°	5° 24′ 39,7″	571,276
45		10 34 52,9	2,6264	+ 14 30,9	19,8	42,3	352
					Mittel:	5° 24′ 41,0″	571,314

Tabelle 6. ($K\beta_1$).

Element	λ	λ (Leide)	$\frac{\nu}{R}$	$\sqrt{\frac{\nu}{R}}$
30 Zn	1292,546	1292,60	705,019	26,5522
33 As	1055,099	1055,18	863,684	29,3885
34 Se	990,131	990,25	920,352	30,3373
35 Br	930,870	930,84	978,945	31,2881
37 Rb	826,956	827,03	1101,956	33,1957
38 Sr	781,299	781,53	1166,353	34,1519
39 Y	739,188	739,31	1232,799	35,1112
40 Zr	700,284	700,47	1301,287	36,0734
41 Nb	664,376	664,49	1371,617	37,0353
44 Ru	571,314	571,43	1595,041	39,9380

Tabelle 7. ($K\beta_2$ rel. $K\beta_1$.)

Element	$\Delta\lambda$	n	λ	$\frac{\nu}{R}$	$\sqrt{\frac{\nu}{R}}$
30 Zn	11,478	(1)	1281,068	711,336	26,6709
33 As	12,292	(1)	1042,807	873,862	29,5612
34 Se	12,219	(1)	977,912	931,852	30,5263
35 Br	12,342	(1)	918,528	992,098	31,4976
37 Rb	12,198	(2)	814,758	1118,454	33,4433
38 Sr	12,092	(2)	769,207	1184,687	34,4193
39 Y	12,055	(1)	727,133	1253,236	35,4011
40 Zr	11,783	(2)	688,501	1323,556	36,3807
41 Nb	11,579	(1)	652,797	1395,947	37,3624
44 Ru	10,801	(1)	560,513	1625,778	40,3209

Tabelle 8. ($K\beta_3$ rel. $K\beta_1$.)

Element	$\Delta\lambda$	n	λ	$\frac{\nu}{R}$	$\sqrt{\frac{\nu}{R}}$
37 Rb	0,538	(2)	827,494	1101,240	33,1849
38 Sr	0,529	(2)	781,828	1165,563	34,1403
39 Y	0,536	(2)	739,724	1231,905	35,0985
40 Zr	0,545	(2)	700,829	1300,275	36,0593
41 Nb	0,580	(1)	664,956	1370,418	37,0192
44 Ru	0,616	(2)	571,930	1593,324	39,9165

n = Anzahl der Einzelmessungen.

Meinem hochgeehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. M. Siegbahn, bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für die ausgezeichnete Apparatur, die er mir zur Verfügung stellte, zu großem Dank verpflichtet.

Beitrag zur Theorie der physikalisch-chemischen Periodizität.

Von **N. v. Raschevsky** in Pittsburgh, Pa.

(Eingegangen am 18. September 1928.)

Es wird darauf hingewiesen, daß eine Reaktionsfolge, welche zur Entstehung einer aus zusammenhängenden, im Laufe der Zeit sich weiter teilenden Tropfen bestehenden Struktur führt, unter gewissen ziemlich allgemeinen Umständen einen gewissen Rhythmus in der Bildung dieser Struktur aufweisen wird.

Das Problem der periodischen oder rhythmischen Vorgänge und Strukturen wurde mehrfach von verschiedenen Seiten angegriffen, und es gibt eine ganz beträchtliche Literatur über den Gegenstand. In einer zusammenfassenden Darstellung teilen E. S. Hedges und J. E. Myers* alle bezüglichen Erscheinungen in drei Hauptklassen ein:

1. Die statische Periodizität, bei welcher keine raumzeitliche Periodizität besteht, sondern gewisse Eigenschaften periodisch mit der Veränderung eines Parameters variieren. Als klassisches Beispiel ist das periodische Gesetz der chemischen Elemente angegeben**.

2. Periodische Strukturen, bei welchen eine räumliche Periodizität auftritt, als dessen typischer Repräsentant die Liesegangsschichten anzusehen sind.

3. Zeitliche Periodizität. Dazu gehören die Erscheinungen der periodischen Auflösung***, die Bredigsche periodische Katalyse**** und andere ähnliche „pulsierende" Erscheinungen.

In der betreffenden Literatur wird immer wieder auf den Zusammenhang dieser Erscheinungen, insbesondere derjenigen der zeitlichen Periodizität, mit den biologischen Problemen hingewiesen, wobei gewöhnlich solche Erscheinungen wie die Herztätigkeit, Wechsel von Schlaf und Wachzustand usw. erwähnt werden. Aber nicht nur diese Nebenerscheinungen des Lebens weisen eine Periodizität auf. Vielmehr kommt dem Lebensprozeß im allgemeinen wesentlich eine Art Periodizität zu, welche sich in der Entwicklung eines jeden Organismus aus dem Keime und der Bildung im erwachsenen Organismus neuer Keime, welche wieder denselben Kreislauf

---

* The problem of physico-chemical periodicity, by E. S. Hedges and J. E. Myers. New York, Longmanns Green and Co; London, Edward Arnold and Co., 1926.

** l. c. S. 17.

*** l. c. Kapitel IV. Daselbst auch ältere Literatur.

**** l. c. Kapitel V. Auch G. Bredig und J. Weinmayr, ZS. f. phys. Chem. **42**, 601, 1903.

durchmachen, äußert. Bei den niederen und einzelligen Organismen, welche sich durch bloße Zweiteilung vermehren, ist diese Periodizität auch vorhanden, obwohl sie hier von etwas anderer Art ist.

Eine allgemeine Theorie der physikalisch-chemischen Periodizität gibt es bisher nicht. Kann es überhaupt solch eine allgemeine Theorie geben? Darüber sind die Meinungen geteilt. Hedges und Myers* scheinen der Ansicht zu sein, daß endgültig alle Arten der von ihnen erwähnten Periodizitäten auf eine gemeinsame Ursache werden zurückführbar sein können, und weisen auf eine Art Katalyse als mögliche allgemeine Ursache von Periodizitäten hin. P. P. v. Weimarn dagegen** hält eine allgemeine Erklärung aller periodischen Vorgänge für hoffnungslos und glaubt, es handelt sich in jedem Falle oder mindestens in jeder Klasse von Erscheinungen um ganz verschiedene Sachen. Zurzeit kann diese Frage natürlich mehr Sache des individuellen Gefühls sein. Ich persönlich schließe mich völlig der Meinung P. P. v. Weimarns an.

Demgemäß möchte ich hier einen theoretischen Fall von Periodizität behandeln, welcher in keine der obenerwähnten Einteilungen genau paßt, vielmehr eine Art Kombination von 2. und 3. darstellt und, obwohl er experimentell noch nirgends realisiert worden ist, am meisten der obenerwähnten Periodizität der Metazoen-Organismen ähnlich sein dürfte***.

Wir beschäftigen uns zuerst etwas näher mit dem Begriff der physikalisch-chemischen Struktur.

Während in einem homogenen System von einer Struktur keine Rede sein kann, erblicken wir eine solche im allgemeinsten Sinne schon beim Vorhandensein von zwei Phasen. Diese Struktur ist durch die äußeren Bedingungen und die physikalischen und chemischen Eigenschaften der Phasen bestimmt. Sind etwa zwei Phasen flüssig, so liegt stets diejenige mit dem kleineren spezifischen Gewicht über der anderen. Beim Vorhandensein von mehreren flüssigen Phasen ist deren Reihenfolge ebenfalls eindeutig bestimmt und prägt dem ganzen System eine gewisse „Struktur" auf. Allerdings sind solche Strukturen von sehr einfachem Bau.

Viel kompliziertere Strukturen können dann hervortreten, wenn neben den Volumkräften (Schwere) auch Oberflächenkräfte (Oberflächenspannung) ins Spiel treten, also in Systemen mit großen spezifischen Oberflächen.

---

* l. c. Kapitel VIII.

** Kolloid-ZS. **37**, 78, 1925.

*** Ich betone besonders, daß ich hier gar nicht beabsichtige, eine Theorie der entsprechenden biologischen Erscheinungen zu geben, und in der Bezugnahme auf die Lebenserscheinungen nichts mehr als eine gewisse Ähnlichkeit hervorhebe.

Dies ist der Fall, entweder wenn das System sehr kleine Abmessungen hat oder auch bei größeren Abmessungen, wenn es aus einer Anzahl von kleinen Tropfen oder Blasen besteht (Schaumstruktur oder Zellenstruktur)*.

Die Entstehungsweise solcher Strukturen kann natürlich sehr verschieden sein. Wir fassen hier einen Spezialfall ins Auge, nämlich denjenigen Fall, daß sich die Strukturen aus einem kleinen Tropfen durch dessen Wachstum entwickeln. Das Verhalten von mikroskopischen Tropfen haben wir in einer Reihe vorhergehender Abhandlungen untersucht**, und besonders in l. c. II und III die Umstände näher umschrieben, bei welchen ein Tropfen, dessen Masse infolge der chemischen Reaktionen sich allmählich vergrößert, beim Anwachsen, seine Oberfläche durch Streckung, eventuell durch Zweiteilung vergrößert. In l. c. II, S. 527 und l. c. III haben wir gezeigt, daß während bei einphasigen und aus einer Komponente bestehenden Tropfen die Konstitution des Tropfens eindeutig durch dessen Masse bestimmt ist und speziell bei kugelförmigen Tropfen die Teiltropfen stets den Kreislauf des „Muttertropfens" wiederholen, dies bei heterogenen, aus mehreren Phasen bestehenden und mehrere Komponenten enthaltenden Tropfen nicht der Fall ist. Die zwei Teiltropfen durchlaufen einen von demjenigen des Ausgangstropfens verschiedenen Kreislauf und speziell erfolgt deren weitere Teilung, wenn überhaupt, beim Erreichen einer anderen Größe als derjenigen, bei welcher sich der Anfangstropfen geteilt hat. Auch die Möglichkeit einer ungleichen Teilung liegt vor***.

Trennen sich nun die Tropfen bei der Teilung vollständig und sind sie in der umgebenden Flüssigkeit frei, so entsteht aus einem heterogenen Tropfen ein Gemisch von nach Größe und Konstitution ungleichen Tropfen. Bleiben aber die Tropfen auch nach der Teilung zusammenhängend (l. c. III), so entsteht aus einem heterogenen Ausgangstropfen eine Struktur, deren Gestalt durch die Anfangsbedingungen und den Ablauf der verschiedenen Reaktionen bestimmt ist****.

Insofern betrachteten wir solche Strukturenbildungen, bei welchen von Anfang an stets dieselben chemischen Reaktionen tätig sind. In den

---

* Vgl. die Strukturen, welche bei Myelinformen auftreten. G. Quincke, Ann. d. Phys. **53**, 593, 1894. Auch die „Metallsalzvegetationen" G. Quincke, ebenda **7**, 631, 1902. S. Leduc, Theorie physico-chimique de la vie.

** N. v. Raschevsky, ZS. f. Phys. **46**, 568, 1928; **48**, 513, 1928; **51**, 571, 1928. Zitiert entsprechend als l. c. I, l. c. II und l. c. III.

*** l. c. II, S. 528; l. c. I, S. 583.

**** Die Frage nach der Eindeutigkeit diese · Bestimmung wird in einer späteren Abhandlung untersucht werden. Vorläufig setzen wir hier diese Eindeutigkeit voraus.

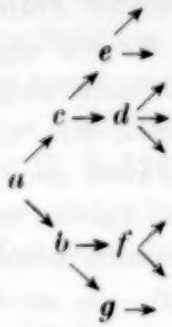
aus einem Tropfen durch Teilung entstandenen neuen Tropfen spielen sich dieselben chemischen Reaktionen ab, nur die Verhältnisse der Gesamtmassen der in den Tropfen zu einer bestimmten Zeit enthaltenen Komponenten sind von Tropfen zu Tropfen, oder besser von „Tropfengeneration" zu „Tropfengeneration" verschieden und verursachen verschiedene Konstitutionen der einzelnen Tropfen.

Wir können aber einen allgemeineren und komplizierteren Fall sofort ins Auge fassen, nämlich den einer Reaktionsfolge, etwa nach dem Schema:

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow g \text{ usw.} \qquad (1)$$

Das heißt: es sei zuerst nur der Ausgangsstoff a vorhanden, welcher sich aus den von außen zugeführten „Nahrungsstoffen" bildet. Aus ihm bildet sich allmählich b, dann c usw. Der Allgemeinheit wegen können wir noch annehmen, daß jeder der Stoffe b, c, d, e usw. sich nicht aus dem vorhergehenden bildet, sondern daß der vorhergehende Stoff eine katalytische Wirkung ausübt, welche veranlaßt, daß sich der nachkommende Stoff auch aus von außen zugeführten Stoffen bildet*.

Noch allgemeiner können wir solch eine Reaktionsfolge betrachten, bei welcher die Gegenwart eines Zwischengliedes die Bildung von mehreren nachfolgenden Gliedern verursacht. Also nach dem Schema:



usw. (2)

Bilden nun die Stoffe a, b, c usw. verschiedene, miteinander nicht mischbare Phasen, so entsteht als Resultat der Reaktionsfolge (1) oder (2) eine heterogene Struktur, deren Gestalt durch die spezifischen Gewichte der einzelnen Phasen, und durch das Zusammenspielen der Kapillarkraft an den Grenzflächen zwischen den verschiedenen Phasen, sowie allgemein auch durch den Anfangszustand des Systems bestimmt wird.

Insbesondere werden bei dem oben betrachteten System, bestehend aus einzelnen zusammenhängenden Tropfen oder Zellen, deren Zustande-

* In diesem allgemeinsten Falle haben wir es nicht mit einer Katalyse im klassischen Sinne zu tun, da der Katalysator allmählich auch verbraucht wird. Jedoch kommen ähnliche Fälle in der Natur bei Enzymen vor. Vgl. W. M. Bayliss, Principles of General Physiology, S. 314 und 330. Longmanns and Co., 1927.

kommen durch Anwesenheit von kapillaraktiven Stoffen, welche als Nebenprodukte der Reaktionen entstehen können, gemäß der Auseinandersetzung in l. c. II und III bedingt ist, die einzelnen zusammenhängenden Tropfen oder Zellen nicht nur physikalisch, sondern auch der chemischen Zusammensetzung nach, verschieden sein.

Fragt man nun nach den Umständen, welche eine periodische Bildung solcher Strukturen hervorrufen würden, so drängt sich zuerst vielleicht die Antwort auf, es müßten die die Reaktionsfolge bildenden Einzelreaktionen zeitlich periodisch sein.

Im Gebiet der homogenen Reaktionen ist das Auftreten von zeitlicher Periodizität theoretisch sehr eingehend, besonders von A. Lotka untersucht worden*. Man kann wohl sagen, daß bei gekoppelten Reaktionen oszillierende Lösungen der Differentialgleichungen allgemein vorkommen. Jedoch sind diese Oszillationen allgemein positiv oder negativ gedämpft. Eine echte Periodizität tritt nur dann auf, wenn die Reaktionen von sehr spezieller Art sind, und daneben noch die Reaktionsgeschwindigkeiten ganz speziellen Bedingungen unterworfen sind.

Grundsätzlich steht nichts im Wege, ähnliche Betrachtungen auf vollständig heterogene Systeme auszudehnen. Den Einwand, daß die von Lotka und anderen untersuchten Fälle, bei reiner Periodizität, nur ein Hin- und Herschwingen der Massen ergeben**, ist ohne Schwierigkeiten zu umgehen. Denn man kann sich immer ein System von gekoppelten periodischen Reaktionen mit einer (oder mehreren) nicht periodischen gekoppelten denken, etwa nach dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} &= f_1(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dc_{n-1}}{dt} &= f_{n-1}(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}),\\ \frac{dc_n}{dt} &= A_1 c_1 + A_2 c_2 + \cdots A_{n-1} c_{n-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Es enthalten die ersten $n-1$ Gleichungen die Variable c_n nicht, und bilden also ein geschlossenes System, aus welchem $c_1 \ldots c_{n-1}$ als

* A. J. Lotka, Journ. phys. chem. **14**, 271, 1910; ZS. f. phys. Chem. **72**, 508, 1910; **80**, 159, 1912; Phys. Rev. **34**, 235, 1912; Journ. Amer. Chem. Soc. **42**, 1595, 1920; Science Progress **14**, 406, 1919/20; insbesondere Proc. Amer. Acad. **55**, 137, 1920; auch Elements of Physical Biology, S. 57–63, Baltimore, Williams and Wilkins, 1925. J. Hirniak, ZS. f. phys. Chem. **75**, 675, 1910; A. Rakowsky, ebenda **57**, 321, 340, 1906.

** Vgl. Hedges and Myers, l. c. S. 16.

Funktionen von t bestimmt werden können. Sind die f_i so beschaffen, daß $c_1 \ldots c_{n-1}$ reine Sinusschwingungen ausführen, also

$$c_i = C_i(1 - \sin \nu_i t), \tag{4}$$

so ergibt sich für c_n im allgemeinen eine wellenartig ansteigende Kurve mit oszillierender Steilheit.

Physikalisch würde das System (3) so zu interpretieren sein, daß $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ auf die Bildung von c_n als Katalysatoren wirken.

Auf diesem Wege könnten unschwer Periodizitäten verschiedenster Art in heterogenen Strukturen erreicht werden. Doch werden hier die nötigen Bedingungen mindestens ebenso speziell, wie im Falle eines homogenen Systems, ja sogar noch spezieller, wegen der räumlichen Trennung der verschiedenen Reaktionsprodukte.

Wir wollen aber hier auf eine andere mögliche Ursache der Periodizität hinweisen, welche unter etwas allgemeineren Bedingungen auftreten kann, insofern deren Ursprung mehr in der rein physikalischen Beschaffenheit der Struktur liegt.

Fassen wir wieder die aus einem Tropfen sich entwickelnde Struktur ins Auge, und mögen die die Entwicklung verursachenden Reaktionen nach dem Schema (1) oder (2) vor sich gehen. Der ursprüngliche Tropfen besteht also zuerst nur aus der Substanz a, ist anfänglich homogen, wird aber allmählich durch Bildung von b und später c usw. heterogen. Ob b, nachdem es sich gebildet hat, a umhüllt oder umgekehrt, hängt von den Bedingungen ab, welche in l. c. II, S. 526 näher umschrieben worden sind.

Die Teilung des Tropfens erfolgt bei einer bestimmten Größe, wenn der Tropfen auch eine bestimmte Konstitution hat, das heißt etwa ein bestimmtes Verhältnis von b zu a. Teilt sich allgemein der Tropfen ungleich, so wird in einem der Teiltropfen ein Überschuß von b enthalten sein, und im extremen Falle trennt sich nur ein aus b bestehender Tropfen von dem Anfangstropfen ab (vgl. l. c. II, S. 528). In dem übriggebliebenen Rest des ursprünglichen Tropfens bildet sich b weiter aus, bis es sich wieder abtrennt, und da nun die Abtrennung der b-Phase periodisch geschieht, so entsteht eine gewisse Periodizität in der endgültig entstandenen Struktur, obwohl alle chemischen Umsetzungen kontinuierlich verlaufen. Die Periodizität wird besonders ausgeprägt, wenn die Reaktion $a \rightarrow b$ sehr viel langsamer ist, als die nächsten Reaktionen $b \rightarrow c \rightarrow d$ usw. Denn in diesem Falle wird sich während der Zeit, welche zwischen zwei nacheinanderfolgenden Abtrennungen der b-Phase vom ursprünglichen Tropfen erfolgt, der zuerst abgetrennte b-Tropfen

schon zu einer sehr komplizierten Struktur entwickelt haben: die zwei nacheinander abgetrennten *b*-Phasen werden allgemein voneinander räumlich weit entfernt sein. Ja sogar die zuerst abgetrennte *b*-Phase kann inzwischen durch die weiteren Reaktionen ganz verbraucht worden sein. Die notwendige Voraussetzung solch eines Rhythmus ist allerdings, daß dem ursprünglichen, die *a*-Phase enthaltenden Tropfen, die nötigen Substanzen von außen zur Verfügung stehen, daß also entweder die *a*-Phase stets auf der „Oberfläche" der Struktur sich befindet, oder aber daß die nächsten entstandenen Phasen für die nötigen Rohstoffe durchlässig sind, letzte also in sich lösen.

Die nacheinanderfolgenden Entwicklungsstadien der Struktur können schematisch etwa so dargestellt werden:

$$
\begin{array}{l}
a \\
ab \\
a\ b \\
a\ b\ c \\
a\ d\ b\ c \\
ab\ \boxed{f\ e\ d\ b\ c} \\
a\ b\ g\ f\ e\ d\ b\ c \\
a\ b\ c\ h\ g\ f\ e\ d\ b\ c \\
a\ d\ b\ c\ i\ h\ g\ f\ e\ d\ b\ c \\
ab\ \boxed{f\ e\ d\ b\ c}\ k\ i\ h\ g\ \boxed{f\ e\ d\ b\ c}
\end{array}
\qquad (5)
$$

usw.

Zwei oder mehrere zusammenhängende Buchstaben bedeuten, daß die entsprechenden Phasen zu einem Tropfen oder einer Zelle gehören. Durch Zwischenräume getrennte Buchstaben bedeuten verschiedenen Tropfen angehörende Phasen. Ein Buchstabe dagegen kann auch eine in mehrere zusammenhängende Tropfen zerteilte Substanz (Phase) bedeuten. Es muß aber immer festgehalten werden, daß die notwendige Bedingung einer Struktur überhaupt das Zusammenhängen der einzelnen individuellen Tropfen oder Zellen ist.

Die Periodizität der Struktur leuchtet sofort ein. Beim Übergang von der vierten zur fünften Zeile ist dabei absichtlich nach *bc dbc* und nicht *bcd* geschrieben, um zu zeigen, daß die räumliche Reihenfolge der Phasen nicht unbedingt mit der zeitlichen Reihenfolge ihrer Entstehung zusammenfallen muß.

Denn, wie gesagt, wird die räumliche Anordnung noch von dem spezifischen Gewicht und dem Spiele der Kapillarkräfte der Phasen-

grenzflächen abhängen. Um ein einfaches Beispiel zu geben, bilden etwa *b* und *c* zwei horziontale Schichten, und es sei *c* die obere. Ist das spezifische Gewicht von *d* größer als das von *b*, so wird nach dem Entstehen von *d* die Reihenfolge, von unten nach oben gerechnet, *dbc* sein. Da aber solch eine Schaum- oder Zellstruktur als Ganzes eine gewisse Festigkeit hat, so können räumlich weit entfernte Elemente der Struktur nicht umgeordnet werden.

Dieselbe Art von Periodizität tritt auch dann auf, wenn sich der ursprüngliche Tropfen dann teilt, wenn er schon mehrere Stoffe der Reihe (1) enthält. Auch ist es gleichgültig, ob die Reaktionsreihe (1) unendlich fortschreitet oder irgendwo stehen bleibt.

Die Entwicklung einer Struktur in diesem Falle wird durch das Schema dargestellt:

$$
\begin{array}{l}
(abcd) \\
ab\ cd \\
ab\ c\ d \\
ab\ c\ d\ e \\
abc\ c\ d\ e\ f \\
(abcd)\ \boxed{c\ d\ e\ f\ g\ h} \\
ab\ cd\ \boxed{c\ d\ e\ f\ g\ h} \\
ab\ c\ d\ \boxed{c\ d\ e\ f\ g\ h} \\
abc\ c\ d\ e\ f\ \boxed{c\ d\ e\ f\ g\ h} \\
(abcd)\ \boxed{c\ d\ e\ f\ g\ h}\ \boxed{c\ d\ e\ f\ g\ h}
\end{array}
\qquad (6)
$$

usw.

Auch kann der ursprüngliche Tropfen in mehrere zerfallen, etwa nach dem Schema:

$$
\begin{array}{l}
(abcd) \\
a\ b\ c\ d \\
a\ b\ c\ d\ e \\
ab\ b\ c\ d\ e\ f \\
abc\ b\ c\ d\ e\ f\ g \\
(abcd)\ \boxed{b\ c\ d\ e\ f\ g\ h} \\
a\ b\ c\ d\ \boxed{b\ c\ d\ e\ f\ g\ h} \\
a\ b\ c\ d\ e\ \boxed{b\ c\ d\ e\ f\ g\ h} \\
ab\ b\ c\ d\ e\ f\ \boxed{b\ c\ d\ e\ f\ g\ h} \\
abc\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ \boxed{b\ c\ d\ e\ f\ g\ h} \\
(abcd)\ \boxed{b\ c\ d\ e\ f\ g\ h}\ \boxed{b\ c\ d\ e\ f\ g\ h}
\end{array}
\qquad (7)
$$

Man sieht hier, daß der ursprüngliche Tropfen nach erfolgter Teilung als solcher nicht mehr in der Struktur vorhanden ist, sondern sich allmählich wieder bildet.

Nun haben wir es jedoch in allen diesen Fällen allgemein nicht mit einer vollständigen Periodizität zu tun. Die nacheinander rhythmisch folgenden Strukturen [letzte Zeile von (6) und (7)] sind zwar in chemischer Hinsicht und auch in der räumlichen Reihenfolge der einzelnen Phasen identisch, nicht aber im allgemeinen Falle in Hinsicht auf die quantitativen Verhältnisse der verschiedenen Substanzen. Wir erläutern dies am Beispiel des Schemas (5). Nach dem Abtrennen von *b* (dritte Zeile) ist die zurückgebliebene Quantität von *a* allgemein nicht gleich der ursprünglichen (erste Zeile). Demgemäß ist auch die Bildungsgeschwindigkeit von *b* eine andere, und die Menge des sich abtrennenden *b* in der siebenten Zeile ist von derjenigen in der dritten verschieden. Also werden auch überhaupt die Massenverhältnisse in der zweiten Struktur von derjenigen der ersten verschieden sein. Das gleiche gilt auch für die anderen Fälle.

Eine vollständige Periodizität ist also an bestimmte spezielle Bedingungen gebunden, nämlich an diejenigen einer periodischen Teilung des ursprünglichen Tropfens (*a b*) und einer periodischen Entwicklung desselben aus dem Rest *a*. Diese speziellen Bedingungen, welche in einer nächsten Arbeit mathematisch untersucht werden sollen, verursachen das Auftreten einer strengen mathematischen Periodizität im ganzen Vorgang.

Der allgemeine rhythmische Charakter der Erscheinung liegt aber, unabhängig von diesen speziellen Bedingungen in dem zellenartigen Bau unserer Struktur begründet, und er ist durch die infolge dieses Zellenbaues eintretende räumliche Trennung von zwei aufeinanderfolgenden Gliedern der an sich kontinuierlichen Reaktionskette (1) oder (2) verursacht. Diese Trennung bringt mit sich eine gewisse Diskontinuität in den ganzen Vorgang und bedingt, daß die schon einigermaßen fortgeschrittene Reaktionsfolge wieder von neuem anfängt.

Auch bei einfacheren rhythmischen, experimentell untersuchten Reaktionen soll in gewissen Fällen eine rein mechanische Trennung der reagierenden Substanzen die Ursache der Periodizität sein*. In

* Vgl. G. Lemoine, C. R. **162**, 588, 1916; auch A. v. Antropoff, ZS. f. phys. Chem. **62**, 513, 1908; ZS. f. prakt. Chem. **77**, 273, 1908.

einer höchst heterogenen schaum- oder zellartigen Struktur sind aber die Bedingungen „par excellence" für das Auftreten solch einer Trennung gegeben.

Zusammenfassend können wir sagen, daß eine an sich kontinuierliche Reaktionsfolge, welche zu einer heterogenen zellenartigen Struktur Anlaß gibt, eben in dieser Zellenartigkeit der Struktur die Möglichkeit eines gewissen Rhythmus enthält. Das Auftreten dieses Rhythmus ist in weiten Grenzen von dem speziellen Charakter der Reaktionsfolge und der entstandenen Struktur unabhängig. Nur für das Vorhandensein einer echten mathematischen Periodizität sind spezielle Bedingungen nötig, welche sich auf die physikalische Struktur der Anfangsglieder der Reaktionsfolge beziehen.

East Pittsburgh, Pa., Research Department Westinghouse Electric and Manufacturing Co., August 1928.

Änderung der Magnetisierungsintensität eines Eisendrahtes beim Recken.

Von **J. B. Seth** in Cantab, **Chetan Anand** in Punjab und **Mahabir Dayal** in Punjab.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 14. August 1928.)

Ein Stück Eisendraht wird verschiedenen schwachen magnetischen Feldern ausgesetzt. Während der Draht sich im Felde befindet, wird ein Zug auf ihn ausgeübt, wobei er seine Magnetisierungsintensität ändert, die durch eine ballistische Differentialmethode verfolgt wird. Die in den verschiedenen Feldern erhaltenen Kurven für die Intensität in Abhängigkeit von der Dehnung sind einander ähnlich und auch den Dehnungs-Spannungs-Kurven für die Belastung eines Drahtes.

Schon im Jahre 1868 fand Villari*, daß für schwache magnetische Felder longitudinale Spannung die Magnetisierungsintensität in einem Eisendraht vermehrt. Wir haben den Einfluß verschiedener magnetischer Felder auf die in einem weichen Eisendraht hervorgerufene Magnetisierung untersucht, während der Draht bis zur Bruchgrenze belastet wurde, und haben dabei einige interessante Ergebnisse gefunden.

Die Versuche wurden mit weichem Eisendraht Nr. 26 (S. W. G.) ausgeführt und zur Messung der Magnetisierungsänderung eine Differentialmethode (mittels ballistischer Spulen) verwendet. Zwei Drahtstücke derselben Länge (85 cm) und von gleichem Durchmesser werden straff horizontal in der Richtung der magnetischen Kraftlinien ausgespannt. Sie laufen durch zwei Messingröhren von 1 cm Durchmesser und 45 cm Länge, die den mittleren Teil der Drähte umschließen. Auf jede Röhre sind zwei Schichten Magnetisierungsspulen aus isoliertem Kupferdraht Nr. 24 aufgewickelt, so daß die Gesamtwindungszahl der Spulen pro Zentimeter 24,4 beträgt. Der mittelste Teil dieser Spulen (etwa 21 cm breit) wurde mit den beiden ballistischen (sekundären) Spulen aus isoliertem Kupferdraht Nr. 42 umwunden. Diese Spulen waren in Serie geschaltet und dann so an ein ballistisches Galvanometer angeschlossen, daß beim An- oder Ausschalten des Magnetisierungsstromes kein Stoß im Galvanometer erfolgte. Zunächst wurde dadurch ausgeglichen, daß einige Windungen von einer der ballistischen Spulen abgenommen wurden, aber es zeigte sich, daß der so erhaltene Ausgleich nicht konstant blieb. Um nicht jedesmal auf diese Weise ausgleichen zu müssen, wurde eine dritte ballistische Spule aus etwa 30 Windungen dicken Kupferdrahtes auf ein Glasrohr gewickelt und mit den beiden ballistischen Hauptspulen in Serie

* Pogg. Ann. **133**, 322, 1868.

geschaltet. Nun wurde jedesmal der Ausgleich dadurch geschaffen, daß diese Spule einfach verschieden weit über eine der Feldspulen geschoben wurde.

Der eine der Drähte wurde an dem einen Ende fest mit einer Schraubenanordnung verbunden, deren Drehung die verlangten Dehnungen hervorrief. Der Betrag jeder Dehnung wurde mittels eines Schlittenmikroskops abgelesen, das parallel zum Draht lief und auf eine Marke auf einem Stückchen Papier eingestellt war, das an den Draht nahe an seinem Ende angeklebt war. Das Galvanometer war eines der empfindlichsten, die im Institut zur Verfügung standen, mit beweglichem Magnet; seine Periode betrug 14 Sekunden, und es hatte einen Widerstand von etwa 1000 Ohm.

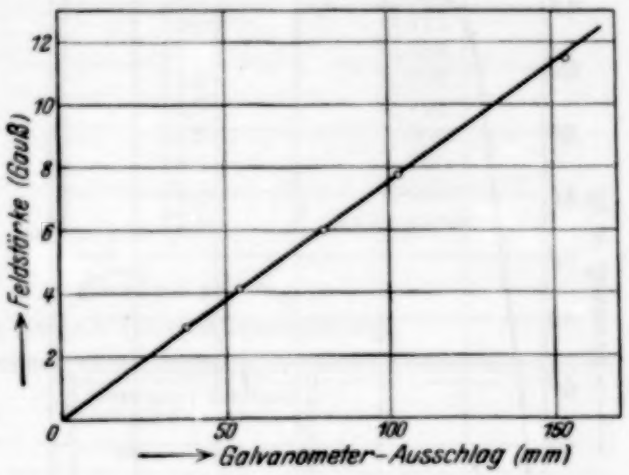


Fig. 1.

War der Ausgleich vollkommen, so gab das Galvanometer beim Einschalten des Magnetisierungsstromes keinen Ausschlag. Aber sobald der eine der beiden Drähte gedehnt wurde, schlug das Galvanometer aus, wobei der erste Ausschlag ein Maß für die in dem Drahte entstandene Magnetisierungsänderung gab. Die zum Dehnen gebrauchte Zeit muß natürlich klein sein im Vergleich zur Periode des Galvanometers, und daher konnten nicht mehr als zwei Schraubenumdrehungen auf einmal ausgeführt werden. Bei weiterer Dehnung war der Ausschlag kleiner, und es wurde angenommen, daß, wenn die gesamte

Tabelle für die Kurve in Fig. 1.
Galvanometerausschlag gegen Feldstärke. $N = 24{,}4$.
Abstand zwischen Galvanometer und Skale = 194 cm.

Spulenstrom Amp.	Galvanometerausschlag mm	Feld in Gauß $H = \frac{4\pi n I}{10}$
0,095	38	2,91
0,135	54	4,14
0,195	80	5,98
0,250	103	7,67
0,375	155	11,5

Dehnung in einem Schritte anstatt von zwei oder dreien usf. ausgeführt wäre, der Gesamtausschlag gleich der Summe der zwei oder drei entsprechenden Einzelausschläge gewesen wäre.

Um die reine Erscheinung zu fassen, ergab es sich als wesentlich, daß nach jeder Dehnung, ehe man dazu überging, die Magnetisierungsänderung bei weiterer Dehnung zu untersuchen, der Draht völlig entmagnetisiert wurde*. Wenn der Draht nicht vor jeder Dehnung voll-

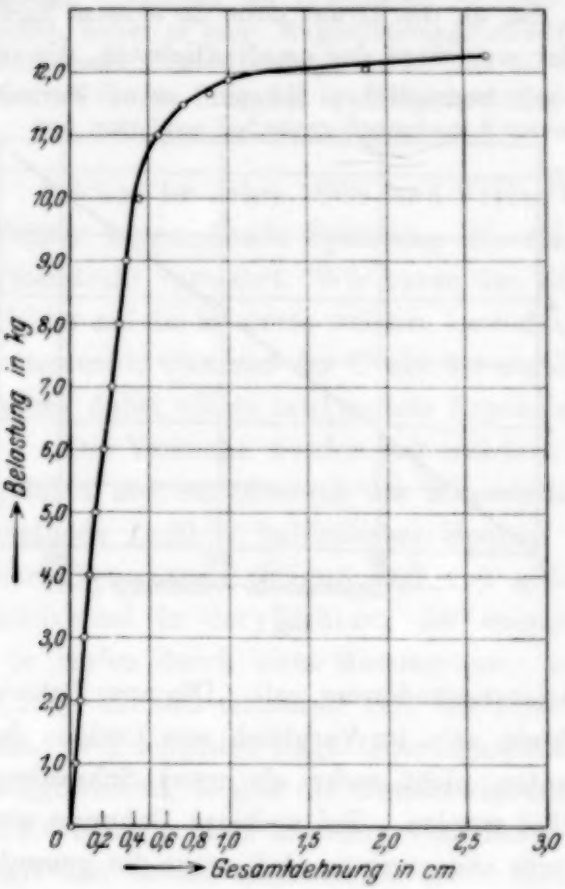


Fig. 2.

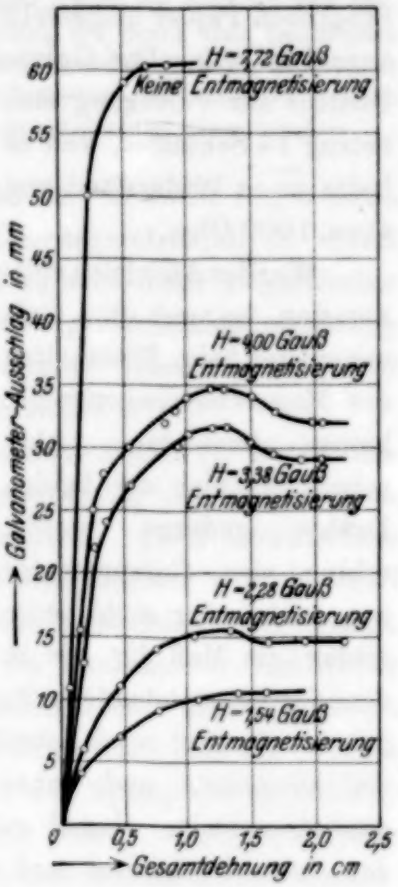


Fig. 3.

ständig entmagnetisiert wurde, verdeckte der remanente Magnetismus den Einfluß der Dehnung auf die Magnetisierung. Die Entmagnetisierung wurde auf dem gewöhnlichen Wege dadurch erreicht, daß der Draht sukzessive immer kleiner werdenden magnetischen Wechselströmen aus-

* Wir konnten hier die Erfahrung von B. Wwedensky und J. Simanow in ihrer Arbeit „Über den Parallelismus zwischen den Erscheinungen der Magnetostriktion und der magnetischen Hysteresis in Nickel“ in ZS. f. Phys. **38**, 202, 1926 benutzen, die auch fanden, daß sie zum richtigen Verständnis der von ihnen untersuchten Erscheinungen den Draht für jede neue Dehnung entmagnetisieren mußten.

gesetzt wurde. Ein einfacher, von Hand betriebener Kommutator oder selbst ein durch Motor angetriebener ergaben jedoch keine vollständige Entmagnetisierung. Es stellte sich heraus, daß es hierzu eines Wechselstromes bedurfte, der auf ganz kleine Werte herabgesetzt werden konnte.

Tabelle für die Kurve in Fig. 2.
Gesamtdehnung gegen Belastung.

Belastung kg	Gesamtdehnung cm	Belastung kg	Gesamtdehnung cm
0	0	9	0,355
1	0,030	10	0,415
2	0,065	11	0,555
3	0,095	11,5	0,705
4	0,125	11,7	0,765
5	0,160	11,9	1,000
6	0,215	12,1	1,850
7	0,260	12,3	2,620
8	0,305	12,5	Draht gerissen

Tabelle für die Kurven in Fig. 3.
Gesamtdehnung gegen Gesamtausschlag.

Gesamtdehnung cm	Gesamtausschlag mm		Gesamtdehnung cm	Gesamtausschlag mm	
0,160	4		1,500	30,5	
0,455	7	$H = 1{,}54$ Gauß	1,680	29,5	$H = 3{,}38$ Gauß
0,770	9		1,900	29	(Entmagnetisierung)
1,080	10	(Entmagnetisierung	2,065	29	
1,400	10,5	nach jedem Schritt)			
1,620	10,5		0,150	15,5	
			0,260	25	
0,165	6		0,340	28	
0,465	11		0,550	30	
0,760	14		0,845	32	
1,060	15	$H = 2{,}28$ Gauß	0,920	33	$H = 4{,}00$ Gauß
1,340	15,5	(Entmagnetisierung)	1,015	34	(Entmagnetisierung)
1,630	14,5		1.220	34,5	
1,920	14,5		1,315	34,5	
2,225	14,5		1,520	34	
			1,695	33	
0,165	13		2,005	32	
0,250	22		2,060	32	
0,355	24				
0,540	27	$H = 3{,}38$ Gauß	0,085	11	
0,825	29		0,235	50	$H = 7{,}72$ Gauß
0,925	30	(Entmagnetisierung)	0,525	59	(keine
1,005	31		0,710	60,5	(Entmagnetisierung)
1,210	31,5		0,875	60,5	
1,305	31,5				

Da wir keinen Wechselstrom im Laboratorium hatten, mußte eine besondere, kleine Wechselstromdynamomaschine aus einem alten, nicht mehr gebrauchten Motor gebaut werden. Der maximale Strom, der auf diese Art erzeugt werden konnte, war nur klein, genügte aber zur völligen Entmagnetisierung der Stücke, solange diese keinen größeren Feldern als 4 Gauß ausgesetzt wurden.

Eine sehr empfindliche Probe auf die völlige Entmagnetisierung bestand darin, zuzusehen, ob bei der plötzlichen Dehnung des Drahtes ohne jeden Magnetisierungsstrom in den Solenoiden ein Ausschlag des Galvanometers erfolgte. Gab es einen Ausschlag, so war die Entmagnetisierung nicht vollständig, und der Draht wurde aufs neue dem Entmagnetisierungsprozeß unterworfen, bis sich kein Ausschlag beim Strecken ohne Magnetfeld zeigte. Bei den endgültigen Versuchen wurde das Stück doppelt so vielen Entmagnetisierungsströmen ausgesetzt, als sich bei den vorhergehenden Leerversuchen zur völligen Entmagnetisierung notwendig erwies.

Die Beziehung zwischen Galvanometerausschlag und Stärke der Magnetisierung wurde dadurch ermittelt, daß ein bekannter Strom durch eine der Feldspulen geschickt und der verursachte Ausschlag gemessen wurde. Aus der Kurve für das bekannte Feld in Abhängigkeit von dem Galvanometerausschlag, die, wie Fig. 1 zeigt, eine strenge Gerade ist, konnte die durch jede Ausdehnung entstehende Magnetisierungsänderung berechnet werden.

Um die Dehnung in die entsprechende Belastung umzurechnen, wurde ein Hilfsversuch mit einem Stück Eisendraht ausgeführt, der von derselben Spule wie der für den Magnetisierungsversuch benutzte (Nr. 26, S. W. G.) stammte und genau ebenso lang war (85 cm). Für diesen Draht wurde die Beziehung zwischen Belastung und Dehnung mittels eines gewöhnlichen Searleschen Apparats zur Bestimmung des Youngschen Moduls festgestellt. Trägt man wie üblich die Belastung gegen die Dehnung auf (Fig. 2), so läßt sich aus dieser Kurve für jede Drahtdehnung die entsprechende Belastung ablesen. Der Elastizitätsgrenze entsprach eine Dehnung von 1,25 cm, und die Bruchgrenze war bei Dehnungen von ungefähr 2,6 cm erreicht.

Die Ergebnisse des Hauptversuchs lassen sich am besten durch Kurven darstellen, die die Gesamtausschläge in Abhängigkeit von der Gesamtdehnung zeigen (Fig. 3). Man sieht, daß die Dehnung-Ausschlagkurven ein charakteristisches Maximum kurz vor dem Zerreißen in der Gegend der Elastizitätsgrenze aufweisen. Mit wachsender Feldstärke

wird das Maximum ausgesprochner; beim kleinsten Felde fehlt es gänzlich. Es tritt überhaupt nicht auf, wenn der Draht nicht nach jedem Dehnungsschritt der Entmagnetisierung unterworfen wird (Fig. 4).

Völlige Entmagnetisierung des Drahtes mittels der kleinen Wechselstromdynamomaschine ließ sich nur so lange bewerkstelligen, als das Feld den Wert von ungefähr 4 Gauß nicht überschritt. Für größere Felder ließ sich Entmagnetisierung nicht erreichen, und die Kurven verlieren das

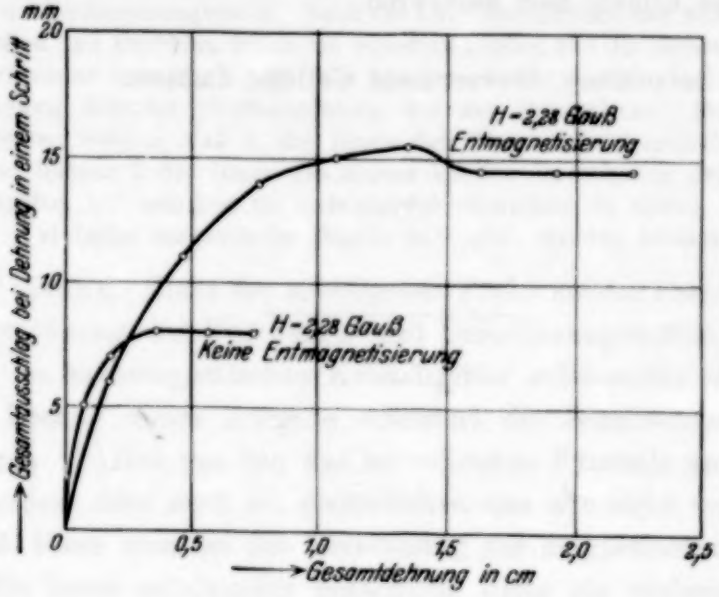


Fig. 4.

charakteristische Maximum. Vergleiche die oberste Kurve der Fig. 3 für $H = 7{,}72$ Gauß.

Zwischen den Dehnung-Ausschlagkurven bei vollständiger Entmagnetisierung und den Dehnungs-Spannungs-Kurven für die Belastung

Tabelle für die Kurven in Fig. 4.
Gesamtdehnung gegen Gesamtausschlag.

Gesamtdehnung cm	Gesamtausschlag mm		Gesamtdehnung cm	Gesamtausschlag mm	
0,080	5	$H = 2{,}28$ Gauß (keine Entmagnetisierung)	0,165	6	$H = 2{,}28$ Gauß (Entmagnetisierung)
0,175	7		0,465	11	
0,365	8		0,760	14	
0,560	8		1,060	15	
0,750	8		1,340	15,5	
			1,630	14,5	
			1,920	14,5	
			2,225	14,5	

eines Drahtes, wie sie sich in Lehrbüchern der Physik finden (z. B. Poynting und Thomsons Properties of Matter, S. 54), zeigt sich ein bemerkenswerter Parallelismus. Eine solche Ähnlichkeit muß man natürlich erwarten, wenn die Ewing-Weberschen Molekularmagnete mit den Eisenmolekülen identisch sind. Wir haben vor, die Versuche mit Nickeldraht zu wiederholen, um diese Frage weiter zu verfolgen, und das Verhalten von Drähten aus magnetischen Stoffen in stärkeren Feldern zu untersuchen, wo die Effekte sich umkehren.

Physics Laboratory, Government College, Lahore.

Über die Magnetostriktion der Eiseneinkristalle.

Von **N. Akulov** in Moskau.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 8. August 1928.)

Es werden hier die allgemeinen Formeln zur Berechnung der Ausdehnungsenergie der Dipolgitter sowie der Elektro- und Magnetostriktion beliebiger Kristalle angegeben. — Die nach diesen Formeln berechneten Kurven für die Magnetostriktion der Eisenkristalle werden dann mit den Experimentalkurven von K. Honda und Y. Mashiyama zusammengestellt. Nach der Lage der Maxima und Minima sowie nach den Vorzeichen und Perioden fallen die experimentellen und die theoretischen Kurven streng miteinander zusammen. Für die absolute Größe der Magnetostriktion ergibt die Berechnung dieselbe Größenordnung wie das Experiment. Es kann daraus also geschlossen werden, daß 1. die Ionen des Eisens kein merkliches elektrisches Dipolmoment haben; 2. die Ionen des Eisens bei der Berechnung der magnetischen Kopplungskräfte, mit welchen sie aufeinander einwirken, in erster Annäherung als einfache magnetische Dipole behandelt werden können.

Einleitung. Eines der wichtigsten Probleme des Ferromagnetismus ist die Berechnung der Kopplungs- und Orientierungskräfte, mit welchen die Ionen im ferromagnetischen Kristallgitter aufeinander einwirken.

Die Lösung dieser Aufgabe erfordert die Beantwortung folgender Grundfragen: 1. Hat das Ion des betrachteten Kristalls nur ein magnetisches Moment oder auch ein elektrisches, das wir nicht vernachlässigen dürfen? 2. Kann man bei der Berechnung der magnetischen Kräfte, mit welchen die Ionen aufeinander einwirken, diese als einfache Dipole behandeln? 3. Wie weit verändert sich die Größe des magnetischen Moments, des Ions wenn wir ihm eine andere Richtung relativ zu den Hauptachsen des Kristallgitters geben?

Die umfangreichen Magnetisierungsmessungen an Eiseneinkristallen, die im Laufe der letzten Jahre von verschiedenen Forschern* mitgeteilt wurden, ermöglichen unmittelbar die Beantwortung der letzten Frage. In der Tat spricht die Tatsache, daß die Sättigung für verschiedene Magnetisierungsrichtungen denselben Wert (1710 ± 8) erreicht, für die Unabhängigkeit der Größe des magnetischen Moments von seiner Richtung relativ zu den Hauptachsen des Kristallgitters.

Dagegen haben die zwei ersten Fragen bis jetzt noch keine bestimmte Lösung gefunden.

Die theoretische Bearbeitung der Magnetisierungskurven, die diese Lösung ergeben kann, ist durch die Notwendigkeit, die Verteilungs-

---

* W. Gerlach, ZS. f. Phys. **38**, 828, 1926. — K. Honda und S. Kaya, Scienc. Rep. Tôhoku Imp. Univ. (1) **15**, 721, Nov. 1926, Nr. 6. — E. Dussler und W. Gerlach, ZS. f. Phys. **44**, 279, 1927.

funktion der Dipolmomente zu bestimmen, erschwert. Aber im Falle der hohen Feldstärken, wenn wir die Dipolmomente als parallel der Feldrichtung betrachten können, geben die Magnetisierungsmessungen selbstverständlich kein Material, das die Beantwortung der zwei ersten Fragen ermöglichen könnte. Anders steht es mit den Striktionsmessungen der Eiseneinkristalle bei hohen Feldstärken. Die Messungen von Webster* und von Honda und Mashiyama** zeigen, daß bei Magnetisierung in verschiedenen Richtungen die Eiseneinkristalle verschiedene Formveränderungen erleiden, wenn auch die Sättigung in allen Fällen erreicht wird.

Die Striktionsmessungen der Kristalle bei starken magnetischen Feldern liefern also umfangreiches Material, das leicht theoretisch bearbeitet werden und die Beantwortung der oben erwähnten und anderer Fragen des Ferromagnetismus ermöglichen kann.

Die Berechnung der Magnetostriktion der Eiseneinkristalle für relativ zu den Kristallachsen verschiedene Richtungen des äußeren Feldes ist das Ziel dieser Arbeit.

Die Ausgangsformeln. Für die Energiedichte eines einfachen Gitters von Dipolen beliebigen Moments p parallel $\mathfrak{s}$ haben wir den folgenden, von H. Kornfeld*** aus bekannten Ewaldschen Potentialformeln abgeleiteten Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} U' &= \tfrac{1}{2} N p^2 [E_1(\mathfrak{s}) + E_2(\mathfrak{s})], \\ \text{wo} \quad E_1'(\mathfrak{s}) &= \frac{4\pi}{\Delta} \sum_l{}' \frac{(\mathfrak{s}\mathfrak{q}^l)^2}{|\mathfrak{q}^l|^2} e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2}|\mathfrak{q}^l|^2} - \frac{4\varepsilon^3}{3\sqrt{\pi}}, \\ E_2'(\mathfrak{s}) &= -\varepsilon^5 \sum_l{}' (\mathfrak{s}\mathfrak{r}^l)^2 g_2(\varepsilon|\mathfrak{r}^l|) + \varepsilon^3 \sum_l{}' g_1(\varepsilon|\mathfrak{r}^l|). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Hierin sind die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$\left.\begin{aligned} g_0(x) &= \frac{1}{x}[1 - \Phi(x)], \quad \text{wo } \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\alpha^2} d\alpha, \\ g_1(x) &= -\frac{1}{x} g_0'(x) = \frac{1}{x^2}\left[g_0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\right], \\ g_2(x) &= -\frac{1}{x} g_1'(x) = \frac{1}{x^2}\left[3 g_1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\right], \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

---

* W. L. Webster, Proc. Roy. Soc. **107**, 496, 1925; **109**, 570, 1925.

** K. Honda und Y. Mashiyama, Scienc. Rep. Tôhoku Imp. Univ. (1) **15**, 755, Nov. 1926, Nr. 6.

*** H. Kornfeld, ZS. f. Phys. **22**, 27, 1924.

und dabei bedeuten: $\mathfrak{r}^l$ den Fahrstrahl zu den Punkten des betrachteten durch die Translationsvektoren $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3$ bestimmten Dipolgitters, also

$$\mathfrak{r}^l = \sum_i l_i \mathfrak{a}_i,\ l_i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots,$$

$$\mathfrak{q}^l = 2\pi \sum l_i \mathfrak{b}_i$$

das 2π-fache der Fahrstrahlen in dem Gitter mit den Translationsvektoren $\mathfrak{b}_i$, die mit $\mathfrak{a}_i$ durch die Relationen

$$(\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_k) = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq k \\ 1 \text{ für } i = k \end{cases} \tag{3}$$

verknüpft sind; $\Delta = \mathfrak{a}_1 [\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3]$ das Volumen des Elementarparallelepipeds; ε einen reellen positiven Parameter, von dem die Größe U' in (1) unabhängig ist; N die Anzahl der Ionen in der Volumeneinheit des Gitters.

Dabei zeigt der Strich am Summenzeichen in (1) an, daß bei Summierung nach l der Fall $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ ausgeschlossen sein muß.

Die Verzerrungsenergie des Dipolgitters. Bei homogener Ausdehnung des Gitters erleidet jeder Punkt des Gitters $\mathfrak{r}^l$ eine Verrückung mit den Komponenten

$$\delta \mathfrak{r}_i^l = \sum_k \frac{\partial \delta \mathfrak{r}_i^l}{\partial \mathfrak{r}_k^l} \mathfrak{r}_k^l, \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Betrachtet man die Koeffizienten $\dfrac{\partial \delta \mathfrak{r}_i^l}{\partial \mathfrak{r}_k^l} = \boldsymbol{T}_{ik}$ als die Komponenten eines asymmetrischen Tensors ${}^2\boldsymbol{T}$, so können wir den Verrückungsvektor in tensorieller Schreibweise als skalares Produkt aus dem Tensor ${}^2\boldsymbol{T}$ und dem Vektor $\mathfrak{r}^l$ darstellen:

$$\delta \mathfrak{r}^l = {}^2\boldsymbol{T}\, \mathfrak{r}^l. \tag{4}$$

Als speziellen Fall aus (4) bekommen wir

$$\delta \mathfrak{a}_i = {}^2\boldsymbol{T}\, \mathfrak{a}_i. \tag{5}$$

Die im Zusammenhang mit $\delta \mathfrak{a}_i$ stehenden Verschiebungen $\delta \mathfrak{b}_i$, welche die zu $\mathfrak{a}_i$ reziproken Translationsvektoren $\mathfrak{b}_i$ erleiden, können aus (3) bestimmt werden. Es folgt aus (3)

$$\mathfrak{b}_i \delta \mathfrak{a}_k + \mathfrak{a}_k \delta \mathfrak{b}_i = 0. \tag{6}$$

Benutzt man (5) und die allgemeine Relation $\mathfrak{a}_k {}^2\boldsymbol{T}\, \mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}_i {}^2\boldsymbol{T}^*\, \mathfrak{a}_k$, wo ${}^2\boldsymbol{T}^*$ der zu ${}^2\boldsymbol{T}$ transponierte Tensor ist, so bekommen wir aus (6)

$$\mathfrak{a}_k (\delta \mathfrak{b}_i + {}^2\boldsymbol{T}^*\, \mathfrak{b}_i) = 0, \quad i, k = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Da aber $\mathfrak{a}_k$ keine komplanären Vektoren sind, erhalten wir aus (7)

$$\delta \mathfrak{b}_i = - {}^2\boldsymbol{T}^*\, \mathfrak{b}_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{8}$$

Mit Benutzung von (4) und (8) bekommen wir leicht die Veränderungen der absoluten Größen der Fahrstrahlen $\mathfrak{r}^l$ und $\mathfrak{q}^l$:

$$\left.\begin{aligned} \delta\,|\mathfrak{r}^l| &= \frac{1}{|\mathfrak{r}^l|}\,\mathfrak{r}^l\,\delta\,\mathfrak{r}^l = \frac{1}{|\mathfrak{r}^l|}\,{}^2\boldsymbol{T}\,\mathfrak{r}^l\,\mathfrak{r}^l, \\ \delta\,|\mathfrak{q}^l| &= \frac{1}{|\mathfrak{q}^l|}\,\mathfrak{q}^l\,\delta\,\mathfrak{q}^l = -\frac{1}{|\mathfrak{q}^l|}\,{}^2\boldsymbol{T}^*\,\mathfrak{q}^l\,\mathfrak{q}^l, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

die Veränderungen der Produkte $(\mathfrak{r}^l\,\mathfrak{s})$ und $(\mathfrak{q}^l\,\mathfrak{s})$:

$$\left.\begin{aligned} \delta\,(\mathfrak{r}^l\,\mathfrak{s}) &= {}^2\boldsymbol{T}\,\mathfrak{r}^l\,\mathfrak{s}, \\ \delta\,(\mathfrak{q}^l\,\mathfrak{s}) &= {}^2\boldsymbol{T}^*\,\mathfrak{q}^l\,\mathfrak{s} = -\,{}^2\boldsymbol{T}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{q}^l \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

und die relative Volumendilatation

$$\frac{\delta\,\Delta}{\Delta} = \operatorname{div}{}^2\boldsymbol{T}\,\mathfrak{r}^l = \sum_i \boldsymbol{T}_{ii} \tag{11}$$

bei homogener Gitterverzerrung.

Dabei ist die Richtung $\mathfrak{s}$ als konstant anzusehen. Variiert man jetzt den Ausdruck (1) und benutzt dabei (9), (10) und (11), so bekommt man den Ausdruck für die Verzerrungsenergie des einfachen Dipolgitters als Funktion des Tensors ${}^2\boldsymbol{T}$

$$\delta\,U' = \tfrac{1}{2}\,N p^2\,(\delta\,E_1' + \delta\,E_2'),$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \delta\,E_1' &= -\,(\Sigma\,\boldsymbol{T}_{ii})\,\frac{4\,\pi}{\Delta}\sum_l \frac{(\mathfrak{s}\,\mathfrak{q}^l)^2}{|\mathfrak{q}^l|^2}\,e^{-\frac{1}{4\,\varepsilon^2}\,|\mathfrak{q}^l|} \\ &\quad + \frac{8\,\pi}{\Delta}\sum_l \frac{(\mathfrak{s}\,\mathfrak{q}^l)^2}{|\mathfrak{q}^l|^2}\,e^{-\frac{1}{4\,\varepsilon^2}\,|\mathfrak{q}^l|^2}\left(\frac{1}{|\mathfrak{q}^l|^2} + \frac{1}{4\,\varepsilon^2}\right){}^2\boldsymbol{T}\,\mathfrak{q}^l\,\mathfrak{q}^l \\ &\quad - \frac{8\,\pi}{\Delta}\sum_l \frac{\mathfrak{s}\,\mathfrak{q}^l}{|\mathfrak{q}^l|^2}\,e^{-\frac{1}{4\,\varepsilon^2}\,|\mathfrak{q}^l|^2}\,{}^2\boldsymbol{T}^*\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{q}^l, \\ \delta\,E_2' &= \varepsilon^7 \sum_l{}'\,(\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}^l)^2\,g_3\,(\varepsilon\,|\mathfrak{r}^l|)\,{}^2\boldsymbol{T}\,\mathfrak{r}^l\,\mathfrak{r}^l - \varepsilon^5 \sum_l{}'\,g_2\,(\varepsilon\,|\mathfrak{r}^l|)\,{}^2\boldsymbol{T}\,\mathfrak{r}^l\,\mathfrak{r}^l \\ &\quad - 2\,\varepsilon^5 \sum_l{}'\,(\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}^l)\,g_3\,(\varepsilon\,|\mathfrak{r}^l|)\,{}^2\boldsymbol{T}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}^l. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dabei ist eine zu (2) analoge Abkürzung eingeführt:

$$g_3 = -\,\frac{1}{x}\,g_2' = \frac{1}{x^2}\left[5\,g_2 + \frac{8}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}\right]. \tag{13}$$

Die Ausdrücke für $\delta\,E_1'$ und $\delta\,E_2'$ sind in den Tensorkomponenten linear und können also in folgender Weise dargestellt werden:

$$\delta\,E_\alpha' = \sum_{ij} \eta_{ij}^{\prime(\alpha)}\,\boldsymbol{T}_{ij}. \tag{14}$$

Um den Koeffizienten $\eta'^{(\alpha)}_{ij} = \dfrac{\partial E'_\alpha}{\partial T_{ij}}$ eine zur Weiterberechnung bequemere Gestalt zu verleihen und sie als die exakten Funktionen der Vektorkomponenten $\mathfrak{s}_i$ darzustellen, führen wir zwei symmetrische Tensoren ${}^2\varrho^l$ und ${}^2\varkappa^l$ mit den Komponenten $\varrho^l_{ij} = \mathfrak{r}^l_i \mathfrak{r}^l_j$ und $\varkappa^l_{ij} = \mathfrak{q}^l_i \mathfrak{q}^l_j$ ein. Mit Hilfe dieser Tensoren können wir die Summen $(\mathfrak{s}\,\mathfrak{q}^l)^2$ und $(\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}^l)^2$ in (12) durch die skalaren Produkte ${}^2\varkappa^l\,\mathfrak{q}^l\,\mathfrak{q}^l$ und ${}^2\varrho^l\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{s}$ und die Summen $(\mathfrak{s}\,\mathfrak{q}^l)\,\mathfrak{q}^l_i$ und $(\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}^l)\,\mathfrak{r}^l_i$ durch die Vektorkomponenten $({}^2\varkappa\,\mathfrak{s})_i$ und $({}^2\varrho^l\,\mathfrak{s})_i$ ersetzen.

Dann bekommt man für die Koeffizienten in (14) die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \eta'^{(1)}_{ij} &= [{}^2Q'^{(ij)} - \tau Q'] \mathfrak{s}\,\mathfrak{s} - 2\,\mathfrak{s}_i ({}^2Q'\,\mathfrak{s})_j, \quad \tau = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq j \\ 1 \text{ für } i = j \end{cases} \\ \eta'^{(2)}_{ij} &= -R'_{ij} + {}^2R'^{(ij)}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{s} - 2\,\mathfrak{s}_i ({}^2R'\,\mathfrak{s})_j. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Die hierin eingeführten Tensoren berechnet man dabei auf Grund der folgenden Formeln:

$$\left.\begin{aligned} Q'^{(ij)} &= \frac{8\pi}{\Delta} \sum_l{}' {}^2\varkappa^l \frac{e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2}|\mathfrak{q}^l|^2}}{|\mathfrak{q}^l|^2} \left(\frac{1}{4\varepsilon^2} + \frac{1}{|\mathfrak{q}^l|^2}\right) \mathfrak{q}^l_i\,\mathfrak{q}^l_j, \\ {}^2Q' &= \frac{4\pi}{\Delta} \sum_l{}' {}^2\varkappa^l \frac{e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2}|\mathfrak{q}^l|^2}}{|\mathfrak{q}^l|^2}, \\ {}^2R' &= \varepsilon^5 \sum_l{}' {}^2\varrho^l\, g_2(\varepsilon\,|\mathfrak{r}^l|), \\ R'^{(ij)} &= \varepsilon^7 \sum_l {}^2\varrho^l\, g_2(\varepsilon\,|\mathfrak{r}^l|)\,\mathfrak{r}^l_i\,\mathfrak{r}^l_j. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die Größe der durch (16) bestimmten Tensorkomponenten ändert sich nicht bei beliebiger Umstellung der Vektorkomponenten $\mathfrak{r}^l_1$, $\mathfrak{r}^l_2$, $\mathfrak{r}^l_3$ und ebenso der Vektorkomponenten $\mathfrak{q}^l_1$, $\mathfrak{q}^l_2$, $\mathfrak{q}^l_3$.

Daher sind alle durch Indexumstellung gebildeten Tensorkomponenten gleich. Als einen speziellen Fall haben wir

$$\left.\begin{aligned} {}^2R' &= {}^2R'^*, \quad R^{(ij)} = R^{(ji)} = R^{*(ij)}, \\ {}^2Q' &= {}^2Q'^*, \quad Q^{(ij)} = Q^{(ji)} = Q^{*(ij)}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Zerlegt man jetzt den Tensor ${}^2T$ in einen symmetrischen und einen asymmetrischen Teil, von denen der erste der Deformationstensor ist, und faßt dann in (14) die Glieder mit Deformationskomponenten $\tau_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$

zusammen, so bekommt man für die Verzerrungsenergie den folgenden Ausdruck:

$$\delta U'_d = \sum_{ij} f'_{ij} \tau_{ij}, \tag{18}$$

wo

$$f'_{ij} = f'_{ji} = \tfrac{1}{2} p^2 N [\tfrac{1}{2} (\eta'^{(1)}_{ij} + \eta'^{(1)}_{ji}) + \tfrac{1}{2} (\eta'^{(2)}_{ij} + \eta'^{(2)}_{ji})]$$

oder nach (15) mit Benutzung von (17)

$$\left.\begin{aligned} f'_{ij} = \tfrac{1}{2} p^2 N \{ &- \boldsymbol{R}'_{ij} - [({}^2\boldsymbol{Q}' + {}^2\boldsymbol{R}')\,\mathfrak{s}]_i \mathfrak{s}_j - [({}^2\boldsymbol{Q}' + {}^2\boldsymbol{R}')\,\mathfrak{s}]_j \mathfrak{s}_i \\ &+ (\boldsymbol{Q}'^{(ij)} + \boldsymbol{R}'^{(ij)} - \boldsymbol{Q}'\,\alpha)\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{s}\}, \quad \alpha = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq j \\ 1 \text{ für } i = j. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Die Koeffizienten f'_{ij} können als Spannungskomponenten des Kristalls mit einfachem Gitter von Dipolen mit dem Moment p parallel $\mathfrak{s}$ betrachtet werden.

Die Verzerrungsenergie zweier einfacher Dipolgitter aufeinander. Wir wollen jetzt die Veränderung der Energiedichte zweier einfacher Dipolgitter aufeinander, die bei homogener Verzerrung des Kristalls entsteht, bestimmen.

Für die Dichte der Energie zweier Dipolgitter, deren Partikelmomente $p_1 \mathfrak{s}_1$ und $p_2 \mathfrak{s}_2$ sind, haben wir den folgenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} U &= N p_1 p_2 [E_1 (\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2) + E_2 (\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2)], \\ \text{wo} \\ E_1 (\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2) &= \frac{4\pi}{\Delta} {\sum_l}' \frac{(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{q}^l)(\mathfrak{s}_2 \mathfrak{q}^l)}{|\mathfrak{q}^l|^2} e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2} |\mathfrak{q}^l|^2 + i(\mathfrak{q}^l \mathfrak{r})}, \\ E_2 (\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2) &= -\varepsilon^5 \sum_l (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{r}^l - \mathfrak{r})(\mathfrak{s}_2, \mathfrak{r}^l - \mathfrak{r}) g_2 (\varepsilon |\mathfrak{r}^l - \mathfrak{r}|) \\ &\quad + \varepsilon^3 \sum_l (\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2) g_1 (\varepsilon |\mathfrak{r}^l - \mathfrak{r}|). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Variiert man diese Teilsummen bei konstanten $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ und benutzt dabei die Relationen

$$\left.\begin{aligned} \delta (\mathfrak{q}^l \mathfrak{r}) &= \mathfrak{q}^l\, {}^2\boldsymbol{T}\, \mathfrak{r} - \mathfrak{r}\, {}^2\boldsymbol{T}^*\, \mathfrak{q}^l = 0, \\ \delta (\mathfrak{s}_1 \mathfrak{q}^l)(\mathfrak{s}_2 \mathfrak{q}^l) &= -(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{q}^l)\, {}^2\boldsymbol{T}\, \mathfrak{s}_2 \mathfrak{q}^l - (\mathfrak{s}_2 \mathfrak{q}^l)\, {}^2\boldsymbol{T}\, \mathfrak{s}_1 \mathfrak{q}^l \\ &= -\sum_{ij} [({}^2\boldsymbol{\varkappa}\, \mathfrak{s}_2)_j \mathfrak{s}_{1i} + ({}^2\boldsymbol{\varkappa}\, \mathfrak{s}_1)_j \mathfrak{s}_{2j}], \\ \delta (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{r}^l - \mathfrak{r})(\mathfrak{s}_2, \mathfrak{r}^l - \mathfrak{r}) &= \sum_{ij} [({}^2\boldsymbol{\varrho}\, \mathfrak{s}_2)_i \mathfrak{s}_{1j} + ({}^2\boldsymbol{\varrho}\, \mathfrak{s}_1)_i \mathfrak{s}_{2j}] \\ \text{und} \\ (\mathfrak{s}_1 \mathfrak{q}^l)(\mathfrak{s}_2 \mathfrak{q}^l) &= {}^2\boldsymbol{\varkappa}\, \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

in welchen der Hilfstensor ${}^2\varrho$ die Komponenten $\varrho_{ij} = (\mathfrak{r}^l - \mathfrak{r})(\mathfrak{r}^l - \mathfrak{r})_j$ hat, so bekommt man

$$\left.\begin{aligned}
\delta U &= N p_1 p_2 [\delta E_1(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2) + \delta E_2(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2)],\\
\text{wo}\\
\delta E_1(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2) &= -\frac{4\pi}{\Delta}\Big(\sum_j T_{jj}\Big) \sum_l \frac{{}^2\varkappa\, \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2}{|\mathfrak{q}^l|^2} e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2}|\mathfrak{q}^l|^2 + i(\mathfrak{q}^l \mathfrak{r})}\\
&\quad + \frac{8\pi}{\Delta} \sum_l \frac{{}^2\varkappa\, \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2}{|\mathfrak{q}^l|^2}\Big(\frac{1}{4\varepsilon^2} + \frac{1}{|\mathfrak{q}^l|^2}\Big) e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2}|\mathfrak{q}^l|^2 + i(\mathfrak{q}^l \mathfrak{r})}\, {}^2T\, \mathfrak{q}^l \mathfrak{q}^l\\
&\quad - \frac{4\pi}{\Delta} \sum_l \frac{e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2}|\mathfrak{q}^l|^2 + i(\mathfrak{q}^l \mathfrak{r})}}{|\mathfrak{q}^l|^2} \sum_{ij} [({}^2\varkappa^l \mathfrak{s}_2)_j \mathfrak{s}_{1i}\\
&\quad + ({}^2\varkappa^l \mathfrak{s}_1)_j \mathfrak{s}_{2i}] T_{ij},\\
\delta E_2(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2) &= \varepsilon^7 \sum_l {}^2\varrho\, \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2\, g_3(\varepsilon|\mathfrak{r}^l - \mathfrak{r}|)\, {}^2T(\mathfrak{r}^l - \mathfrak{r})(\mathfrak{r}^l - \mathfrak{r})\\
&\quad - (\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2)\varepsilon^5 \sum_l g_2(\varepsilon|\mathfrak{r}^l - \mathfrak{r}|)\, {}^2T(\mathfrak{r}^l - \mathfrak{r})(\mathfrak{r}^l - \mathfrak{r})\\
&\quad - \varepsilon^5 \sum_l g_2(\varepsilon|\mathfrak{r}^l - \mathfrak{r}|) \sum_{ij} [({}^2\varrho^l \mathfrak{s}_2)\mathfrak{s}_{1j}\\
&\quad + ({}^2\varrho^l \mathfrak{s}_1)\mathfrak{s}_{2j}] T_{ij}.
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Die gesamte Energiedichteveränderung δU hat also den folgenden Ausdruck:

$$\delta U = N p_1 p_2 \sum_{ij} (\eta^{(1)}_{ij} + \eta^{(2)}_{ij}) T_{ij}, \quad (23)$$

wo die Koeffizienten $\eta^{(1)}_{ij}$ und $\eta^{(2)}_{ij}$ durch die folgenden Formeln bestimmt werden:

$$\left.\begin{aligned}
\eta^{(1)}_{ij} &= [{}^2Q^{(ij)} - \tau Q]\, \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 - [({}^2Q\, \mathfrak{s}_2)_j \mathfrak{s}_{1i} + (Q\, \mathfrak{s}_1)_j \mathfrak{s}_{2i}],\\
\eta^{(2)}_{ij} &= -(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2) R_{ij} + {}^2R^{(ij)}_{ij}\, \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 - [({}^2R\, \mathfrak{s}_2)_i \mathfrak{s}_{1j} + ({}^2R\, \mathfrak{s}_1)_i \mathfrak{s}_{2j}].
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Die hierin eingeführten Tensoren berechnet man dabei nach (16) analogen Ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}
Q^{(ij)} = Q^{(ji)} &= \frac{8\pi}{\Delta} \sum_l {}^2\varkappa^l \frac{e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2}|\mathfrak{q}^l|^2 + i(\mathfrak{q}^l \mathfrak{r})}}{|\mathfrak{q}^l|^2}\Big(\frac{1}{4\varepsilon^2} + \frac{1}{|\mathfrak{q}^l|^2}\Big) \mathfrak{q}^l_i \mathfrak{q}^l_j,\\
Q &= \frac{4\pi}{\Delta} \sum_l {}^2\varkappa^l \frac{e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2}|\mathfrak{q}^l|^2 + i(\mathfrak{q}^l \mathfrak{r})}}{|\mathfrak{q}^l|^2},\\
R &= \varepsilon^5 \sum_l {}^2\varrho^l\, g_2(\varepsilon|\mathfrak{r}^l - \mathfrak{r}|),\\
R^{(ij)} = R^{(ji)} &= \varepsilon^7 \sum {}^2\varrho^l\, g_3(\varepsilon|\mathfrak{r}^l - \mathfrak{r}|)\, \varrho_{ij}.
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Setzt man in (23) $T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ ein, und faßt die Glieder mit Deformationskomponenten $\tau_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$ zusammen, so bekommt man die Verzerrungsenergie zweier Dipolgitter aufeinander:

$$\delta U_d = N p_1 p_2 \sum_{ij} \left[\tfrac{1}{2}\left(\eta_{ij}^{(1)} + \eta_{ji}^{(1)}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tau_{ij}^{(2)} + \eta_{ji}^{(2)}\right)\right] \tau_{ij} = \sum_{ij} f_{ij}\, \tau_{ij}. \qquad (26)$$

Nach Formeln (18) und (26) kann die Verzerrungsenergie eines beliebigen Gitters, das aus mehreren einfachen Dipolgittern zusammengesetzt ist, berechnet werden.

Die Verzerrungsenergie des Kristalls mit regulärem. körperzentriertem Dipolgitter. Nimmt man für die Koordinatenachsen i_1, i_2, i_3 die Hauptachsen des Gitters, so bekommt man

$$\mathfrak{r}' = h \sum_k l_k i_k,$$

$$\mathfrak{q}' = \frac{2\pi}{h} \sum_k l_k i_k,$$

$$\mathfrak{r} = \frac{h}{2}(i_1 + i_2 + i_3),$$

wo h der Hauptparameter des Gitters ist. Setzt man diese Werte in (16) ein, so findet man, daß die Hauptkomponenten des Tensors ${}^2\boldsymbol{Q}'$ gleich sind und die Nebenkomponenten verschwinden. Dies gilt auch für die Komponenten des Tensors ${}^2\boldsymbol{R}'$. Also ist ${}^2\boldsymbol{Q}' = Q'_{11}\boldsymbol{E}$ und ${}^2\boldsymbol{R}' = R'_{11}\boldsymbol{E}$, wo $\boldsymbol{E}$ den Einheitstensor bedeutet.

Für die Tensorkomponenten ${}^2Q'^{(\alpha\beta)}_{\gamma\delta}$ haben wir dabei folgende Relationen:

$$Q'^{(11)}_{11} = Q'^{(22)}_{22} = Q'^{(33)}_{33},$$
$$Q'^{(22)}_{11} = Q'^{(33)}_{11} = Q'^{(33)}_{22}.$$

Alle Tensorkomponenten ${}^2Q'^{(\alpha\beta)}_{\gamma\delta}$, in denen die Zahl des Vorkommens eines beliebigen Indexes eine ungerade Zahl ist, verschwinden. Dasselbe gilt auch für die Komponenten ${}^2R'^{(\alpha\beta)}_{\gamma\delta}$. Mit Benutzung dieser Beziehungen erhält man aus (19)

$$\left.\begin{aligned} f'_{ij} &= \frac{1}{2}\frac{N p^2}{h^3}(c'_0 + c'_1 s_j^2), \\ f'_{ij} &= \frac{1}{2}\frac{N p^2}{h^3} c'_2 s_i s_j \qquad (i \neq j), \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

wo c'_0, c'_1 und c'_2 die drei dimensionslosen Zahlen sind:

$$c'_0 = h^3(Q'^{(11)}_{22} + R'^{(11)}_{22} - Q'_{11} - R'_{11}),$$
$$c'_1 = h^3(-2Q'_{11} - 2R'_{11} + Q'^{(11)}_{11} + R'^{(11)}_{11} - Q'^{(11)}_{22} - R'^{(11)}_{22}),$$
$$c'_2 = h^3 \cdot 2(Q'^{(22)}_{11} + R'^{(22)}_{11} - Q'_{11} - R'_{11}).$$

Nach den Formeln (16) bekommt man für diese Koeffizienten die Zahlenwerte, die in Tabelle 1 angegeben sind.

Tabelle 1.

s	c_0'	c_1'	c_2'	c_0	c_1	c_2
$\frac{2}{h}$	— 2,191	19,08	— 4,391	10,06	— 17,71	20,26
$\frac{\sqrt{2}}{h}$	— 2,187	19,02	— 4,383	10,04	— 17,69	20,20
Mittelwerte	— 2,189	19,05	— 4,387	10,050	— 17,70	20,23

Nach analogen Berechnungen erhalten wir mit Benutzung von (26), (24) und (25)

$$\left.\begin{aligned} f_{jj} &= \frac{N p^2}{h^3}(c_0 + c_1 s_i^2), \\ f_{ij} &= \frac{N p^2}{h^3} c_2 s_i s_j \qquad (i \neq j). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Die Zahlenwerte der Koeffizienten c_0, c_1, c_2 sind ebenfalls in Tabelle 1 angegeben.

Für die Verzerrungsenergie δU_d des körperzentrierten Gitters, die der Summe $\delta U_d + 2\,\delta U_d$ gleich ist, bekommen wir

$$\left.\begin{aligned} \delta U_d &= \sum_{ij} \Phi_{ij} \tau_{ij} = \sum_{ij} (2 f'_{ij} + f_{ij}) \tau_{ij}, \\ \text{wo} \quad \Phi_{jj} &= \frac{N p^2}{h^3}(c_0 + c_1 s_j^2), \\ \Phi_{ij} &= \frac{N p^2}{h^3} c_2 s_i s_j \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

und

$$\begin{aligned} c_0 &= c_0' + c_0 = \ \ 7{,}86, \\ c_1 &= c_1' + c_1 = \ \ 1{,}35, \\ c_2 &= c_2' + c_2 = 15{,}84. \end{aligned}$$

Berechnung des Striktionstensors des Kristalls mit homöopolarem, regulärem, körperzentriertem Gitter. Die Polarisation des Kristalls mit homöopolarem Kristallgitter kann im allgemeinen durch folgende beiden Ursachen bedingt werden: 1. Durch die quasielastischen Deformationen der Ionen, die keine natürlichen „remanenten" Dipolmomente haben, und 2. durch die Orientierung der Partikeln mit natürlichen Dipolmomenten. Wir berechnen zuerst die Gestaltveränderung des Kristalls bei der Polarisation erster Art.

Für das elastische Potential des zum regulären System gehörenden Kristalls haben wir den folgenden Ausdruck:

$$\omega = a_{11} \sum_j \tau_{jj} + 2\, a_{12} (\tau_{11}\tau_{22} + \tau_{22}\tau_{33} + \tau_{33}\tau_{11}) + a_{44} (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2). \quad (30)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen können folgenderweise dargestellt werden:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{ij}} (\delta U_d + \omega) = 0. \quad (31)$$

Setzt man hierin (29) und (30) ein, so bekommt man die in τ_{ij} linearen Gleichungen. Nach leichter Umformung erhält man aus diesen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \tau_{jj} &= \varkappa_0 - \varkappa_1 s_j^2, \\ \tau_{ij} &= -\varkappa_2 s_i s_j, \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_0 &= \frac{N p^2}{h^3} \frac{c_1 a_{12} - c_0 (a_{11} - a_{12})}{2 (2 a_{12} + a_{11})(a_{11} - a_{12})}, \\ \varkappa_1 &= \frac{N p^2}{h^3} \frac{c_1}{2 (a_{11} - a_{12})}, \\ \varkappa_2 &= \frac{N p^2}{h^3} \frac{c_2}{a_{44}}. \end{aligned}\right\} \quad (32\,a)$$

Betrachten wir den kugelförmigen Kristallteil, dessen Radius v die Größe 1 hat und dessen Zentrum im Koordinatenursprung liegt. Bei der Polarisation des Kristalls in beliebiger Richtung (s) erleidet jeder Punkt dieser Sphäre eine Verschiebung, die durch das Produkt $^2\tau\, v$ bestimmt ist. Die Projektion dieses Verschiebungsvektors auf den Radiusvektor v ergibt die relative Längenveränderung des Kristalls in der Richtung v:

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_{sv} = \frac{1_2}{|v|^2} \tau\, v\, v. \quad (33)$$

Oder nach (32)

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_{sv} = \varkappa_0 - \varkappa_1 (s_1^2 v_1^2 + s_2^2 v_2^2 + s_3^2 v_3^2) - \varkappa_2 (s_1 v_1 s_2 v_2 + s_2 v_2 s_3 v_3 + s_3 v_3 s_1 v_1). \quad (33\,a)$$

Was ferner die Polarisation zweiter Art anbetrifft, so können wir sie in folgender Weise formell auf die Polarisation erster Art zurückführen. Betrachten wir wieder den kugelförmigen Teil des „unpolarisierten" Kristalls, dessen Dipolgitter, wie dabei angenommen ist, die kubischen Symmetrieeigenschaften hat.

Wenn wir die absoluten Größen der Dipolmomente der Ionen • bis Null vermindern, verändert sich der Radius der betrachteten Sphäre und

wir erhalten eine neue, deren Radius mit $\bar{v} = v(1 + \alpha)$ bezeichnet wird. Wenn wir jetzt die Dipolmomente wieder bis zu den ursprünglichen Werten vergrößern und sie alle dabei parallel s richten, nimmt die absolute Größe des Radiusvektors die durch (33) bestimmte Vergrößerung an.

Wir bekommen also für die relative Längenveränderung des Kristalls parallel v bei der Polarisation, bis zur Sättigung in der Richtung s, den folgenden Ausdruck:

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_{s\,v} = \frac{|\bar{v}| - |v|}{|\bar{v}|} + \frac{1}{|\bar{v}|^2}\,{}^2\bar{\tau}_{(s)}\,\bar{v}\,\bar{v} = \alpha + \frac{1}{|v|^2}\,{}^2\bar{\tau}_{(s)}\,v\,v. \qquad (34)$$

Wir betrachten den Fall, in dem die Polarisationskräfte im Vergleich zu den anderen Kräften, mit welchen die Ionen zusammengehalten werden, sehr klein sind.

Das gilt z. B. für die magnetischen Kräfte im Gitter des beliebigen ferromagnetischen Kristalls, die auch im Vergleich mit den elektrischen sehr klein sind.

Die Elastizitätskoeffizienten des Kristalls können sich zwar auch in diesem Falle bei irgendwelcher Richtungsänderung der Dipolmomente oder bei Rückführung auf Null der Momentengröße der Ionen verändern, doch muß diese Veränderung klein bleiben.

Bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung erhalten wir also aus (34)

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_{s\,v} - \left(\frac{\delta l}{l}\right)_{s_0\,v_0} = {}^2\tau_{(s)}\,v\,v - {}^2\tau_{(s_0)}\,v_0\,v_0, \qquad (35)$$

wo s, s_0, v, v_0 vier Einheitsvektoren sind.

Die Magnetostriktion der Eiseneinkristalle. Wir können die Formel (35) des vorigen Paragraphen auf die Untersuchung der Magnetostriktion der Eisenkristalle anwenden. Wir betrachten dabei zwei Grundfälle:

a) $s = v$, d. h. die relative Längenveränderung des Kristalls ist in der Magnetisierungsrichtung gemessen (der „Longitudinaleffekt“);

b) $s \perp v$, d. h. die relative Ausdehnung des Kristalls ist in der zur Magnetisierungsrichtung senkrechten Richtung gemessen (der „Transversaleffekt“).

Setzt man in (35) $s = v$ und $s_0 = v_0$ ein und benutzt dabei die Relation $\sum_{ij} s_i^2 s_j^2 = 1$, so ergibt sich für den Longitudinaleffekt die folgende Formel:

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_{s\,v} - \left(\frac{\delta l}{l}\right)_{s_0\,v_0} = 2\,\varkappa\,[(s_1^2 s_2^2 + s_2^2 s_3^2 + s_3^2 s_1^2) - (s_{01}^2 s_{02}^2 + s_{02}^2 s_{03}^2 + s_{03}^2 s_{01}^2)], \qquad (36)$$

wo

$$\varkappa = \varkappa_3 - \varkappa_2 = \left(\frac{c_2}{a_{44}} - \frac{c_1}{2(a_{11}-a_{22})}\right)\frac{Np^2}{h^3}. \tag{37}$$

Für den Transversaleffekt bekommt man mit Benutzung der aus der Bedingung $v.s = 0$ erhaltenen Beziehung $\sum_{ij} s_i v_i . s_j v_j = 0$

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_{sv} - \left(\frac{\delta l}{l}\right)_{s_0 v_0}$$
$$= \varkappa[(s_1^3 v_1^3 + s_2^3 v_2^3 + s_3^3 v_3^3) - (s_{01}^3 v_{01}^3 + s_{02}^3 v_{02}^3 + s_{03}^3 v_{03}^3)]. \tag{38}$$

Wir wollen jetzt den Zahlenwert des Faktors $\varkappa$ berechnen.

Da in der Literatur keine Angaben über Elastizitätskoeffizienten der Eiseneinkristalle zu finden sind, benutzen wir die Elastizitätskoeffizienten des Elektrolyteisens oder des Stahles und werden dabei den Eiseneinkristall als elastisch-isotrop betrachten.

Benutzt man dann die Beziehungen

$$a_{11} - a_{12} = 2a_{44} = \mu; \quad 2\mu = \frac{E}{1+\sigma},$$

wo σ der Poissonsche und E der Elastizitätsmodul sind, so erhalten wir aus (37):

$$\varkappa = c\frac{1+\sigma}{E}\frac{Np^2}{h^3}, \tag{37a}$$

wo

$$c = 4c_3 - c_1 = 62{,}01.$$

Bei Berechnung des Zahlenwertes des Faktors $\frac{Np^2}{h^3}$ können wir ihn durch $\frac{1}{4}J_m^2$ ersetzen, wo J_m den Sättigungswert der Magnesisierungsintensität darstellt.

Nimmt man an, daß

$$J_m = 1710,$$
$$E = 22000 . 981 . 10^5,$$
$$\sigma = 0{,}3,$$

so findet man

$$\varkappa = 0{,}265 . 10^{-4}. \tag{37b}$$

Die Formeln (36) und (38) beziehen sich auf den Fall, wenn der Kristall bis zur Sättigung magnetisiert ist.

Der Longitudinaleffekt in der (100)-Ebene. Die Einheitsvektoren s und s_0 liegen in diesem Falle in der (100)-Ebene. Für den

Hauptparameter in (36) nehmen wir den Winkel zwischen s und s_0 und richten dabei den Vektor s_0 einer der tetragonalen Kristallachsen parallel.

Wenn als Koordinatenachsen die Hauptachsen des Kristalls genommen sind, so haben wir:

$$s_{01} = 1, \qquad s_{02} = s_{03} = s_3 = 0,$$
$$s_1 = \cos\varphi, \qquad s_2 = \sin\varphi.$$

Setzt man diese Werte in (36) ein, so ergibt sich:

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_\varphi - \left(\frac{\delta l}{l}\right)_0 = -\tfrac{1}{4}\varkappa(1 - \cos 4\varphi). \qquad \text{(a)}$$

Das ist die einfache Sinusoide mit der Periode $\varphi_0 = 90^0$, mit der Amplitude $\frac{1}{2}\varkappa$ und der Lage unterhalb der Abszissenachse. Die nach dieser

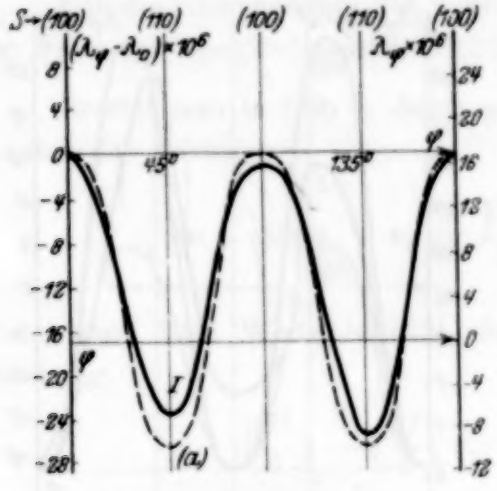


Fig. 1.

(a) ist die berechnete Kurve ($\varkappa = 0{,}53 \cdot 10^{-4}$); I ist die experimentelle Kurve, die von Honda und Mashiyama bei der effektiven Feldstärke $H = 614$ Gauß erhalten wurde.

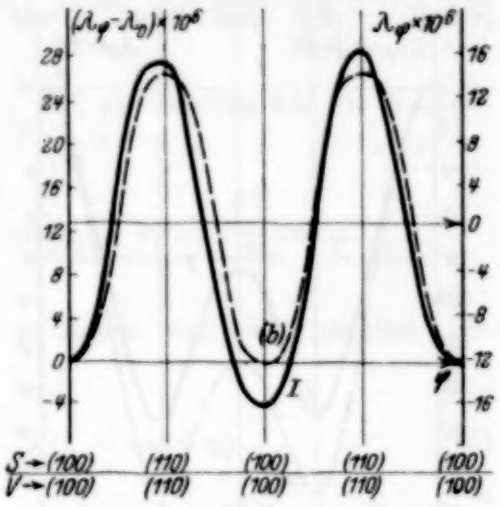


Fig. 2.

(b) berechnete Kurve ($\varkappa = 0{,}53 \cdot 10^{-4}$); I experimentelle Kurve ($H = 25{,}0$ Gauß).

Formel (a) berechnete sowie die experimentelle Kurve von Honda und Mashiyama* sind in Fig. 1 gegeben**.

---

* l. c., Anm. ** auf S. 390.

** Zum anschaulichen Vergleich der theoretischen Kurven mit dem Experiment wurde $\varkappa = 0{,}53 \cdot 10^{-4}$ gewählt. Dagegen ergibt die Formel (37b) für $\varkappa$ den Wert $0{,}265 \cdot 10^{-4}$. Somit erhält man aus der Theorie bei den angenommenen Werten von E und σ eine zwar zweimal kleinere Magnetostriktion als die beobachtete, aber doch von richtiger Größenordnung. Andere Abweichungen des Experiments von der Theorie können durch die Beobachtungsfehler oder durch den Umstand, daß die Sättigung der Magnetisierung in diesen Experimenten nicht immer erreicht wurde, erklärt werden.

Der Transversaleffekt in der (100)-Ebene. Die Einheitsvektoren s und v liegen in der 100-Ebene. Für den Hauptparameter ist der Winkel zwischen s und einer der tetragonalen Achsen s_0 gewählt. Setzt man in (38)

$$s_1 = \cos\varphi, \qquad s_2 = \sin\varphi,$$
$$v_1 = \cos(90^0 + \varphi), \qquad v_2 = \sin(90^0 + \varphi),$$
$$s_{01} = 1, \qquad v_{02} = 1 \quad \text{und} \quad s_{02} = s_{03} = v_{01} = v_{03} = 0,$$

so bekommt man nach leichter Umformung

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_\varphi - \left(\frac{\delta l}{l}\right)_0 = \tfrac{1}{4}\varkappa(1 - \cos 4\varphi). \tag{b}$$

Es ergibt sich also wieder die Sinusoide mit derselben Amplitude und Periode, wie im Falle des Longitudinaleffekts, aber mit positiven

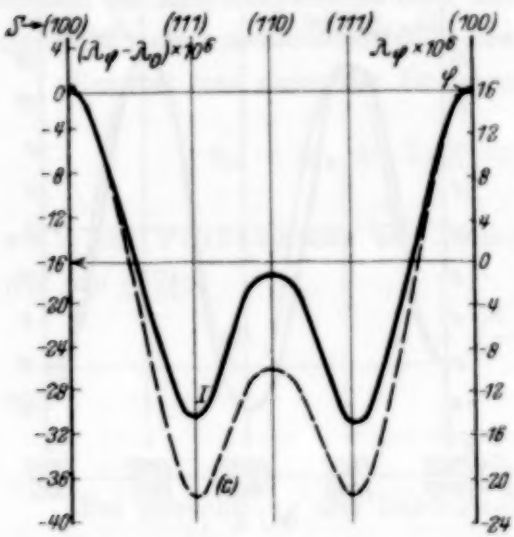


Fig. 3.
(c) berechnete Kurve ($\varkappa = 0{,}53 \cdot 10^{-4}$);
I experimentelle Kurve ($H = 630$ Gauß).

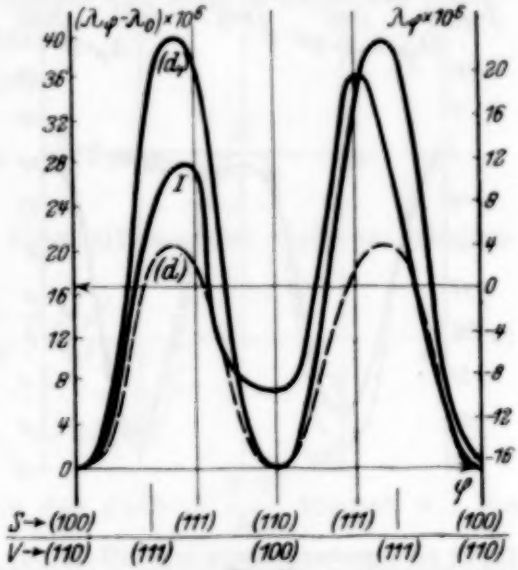


Fig. 4.
(d) berechnete Kurve ($\varkappa = 0{,}53 \cdot 10^{-4}$);
I experimentelle Kurve ($H = 250$ Gauß);
(d_1) berechnete Kurve ($\varkappa = 1{,}06 \cdot 10^{-4}$).

Ordinaten. In Fig. 2 ist die experimentelle* und die berechnete Kurve eingetragen.

Der Longitudinaleffekt in der (110)-Ebene. Liegt der Einheitsvektor s in der (110)-Ebene, so haben wir

$$s_1 = \cos\varphi, \qquad s_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi, \qquad s_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi \tag{39}$$

und

$$s_{01} = 1, \qquad s_{02} = 0, \qquad s_{03} = 0.$$

* l. c., Anm. ** auf S. 390.

Setzt man diese Werte in (36) ein, so bekommt man nach leichter Umformung

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_\varphi - \left(\frac{\delta l}{l}\right)_0 = -\frac{1}{4}\varkappa\left[\frac{7}{4} - \cos 2\varphi - \frac{3}{4}\cos 4\varphi\right]. \qquad \text{(c)}$$

Wir erhalten also die Kurve, die aus zwei Sinusoiden mit den Perioden 90 und 180° und verschiedenen Amplituden zusammengesetzt ist. Die nach dieser Formel berechnete sowie die experimentelle Kurve sind in Fig. 3 gegeben.

Der Transversaleffekt in der (110)-Ebene. Die Vektoren s und v liegen in der (110)-Ebene.

Für die Komponenten des Vektors s haben wir dieselben Werte wie im Falle des Longitudinaleffekts (39).

Ersetzt man in (39) φ durch $\varphi + 90^0$, so erhalten wir die Komponenten des Vektors v:

$$v_1 = -\sin\varphi, \qquad v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi, \qquad v_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi.$$

Setzt man diese Werte in (38) ein, so finden wir nach leichter Umformung

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_\varphi - \left(\frac{\delta l}{l}\right)_0 = \frac{3}{16}\varkappa(1 - \cos 4\varphi). \qquad \text{(d)}$$

Wir erhalten also wieder die einfache Sinusoide mit der Periode $\varphi_0 = 90^0$ und der Amplitude $\frac{3}{8}\varkappa$.

Die nach der Formel (38) berechnete sowie die experimentelle* Kurve sind in Fig. 4 gegeben.

Der Longitudinaleffekt in der (111)-Ebene. Stellen wir uns den kubischen Kristallteil vor, dessen Kanten den Hauptachsen des Gitters parallel sind.

Der Einheitsvektor s_0, der vom Zentrum einer der Würfelflächen nach einem der Endpunkte der gegenüberliegenden Fläche gerichtet ist, fällt mit einer der (111)-Ebenen zusammen.

---

* l. c. Anm. ** auf S. 390.

Liegt der Einheitsvektor s in derselben (111)-Ebene uud bildet mit s_0 den Winkel φ, so haben wir

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \frac{2}{\sqrt{6}}\cos\varphi, \qquad s_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi \\ \text{und} \qquad s_3 &= -\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Setzt man diese Werte in (36) ein, so bekommt man

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_\varphi - \left(\frac{\delta l}{l}\right)_0 = 0. \tag{e}$$

Die experimentelle Kurve* ist in Fig. 5 gegeben. Die theoretische Kurve ist nach (e) eine der Abszissenachse parallele Gerade**.

Der Transversaleffekt in der (111)-Ebene. Die Einheitsvektoren s und v liegen in der (111)-Ebene. Die Komponenten des Vektors s

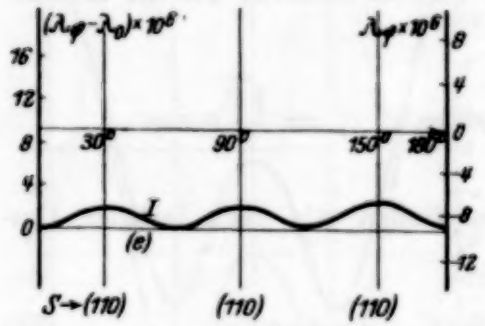


Fig. 5.
(e) berechnete Kurve;
I experimentelle Kurve (H = 455 Gauß).

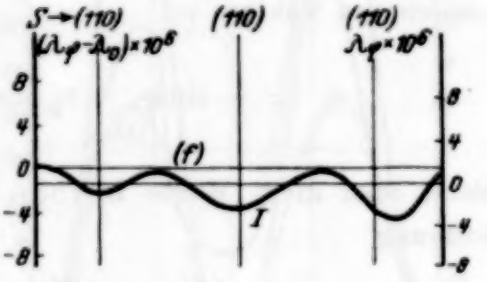


Fig. 6.
(f) berechnete Kurve;
I experimentelle Kurve (H = 350 Gauß).

sind durch (40) bestimmt. Ersetzt man in (40) den Winkel φ durch den Winkel $\varphi + \frac{\pi}{2}$, so finden wir die Komponenten des Vektors v.

Setzt man die Ausdrücke für s und v in (38) ein, so bekommt man

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_\varphi - \left(\frac{\delta l}{l}\right)_0 = 0. \tag{f}$$

---

* l. c., Anm. ** auf S. 390.

** Aus den umfangreichen Messungen von Honda und Mashiyama kann man folgende Schlüsse ziehen. Im Falle des Longitudinal- und auch des Transversaleffekts in der (111)-Ebene nimmt die Amplitude der Striktionsänderungen beim Wachsen der Feldstärke zuerst zu und nähert sich dann asymptotisch dem Nullwert. In anderen Fällen strebt die Amplitude von Null verschiedenen Endwerten zu.

Die experimentelle Kurve ist in Fig. 6 dargestellt. Die theoretische Kurve ist wie im Falle des Longitudinaleffekts eine Gerade, die der Abszissenachse parallel verläuft. Es folgt also aus (e) und (f), daß bei der Drehung des Eiseneinkristalls im starken Magnetfeld um eine seiner trigonalen Achsen dieser Kristall keine Formveränderung erleidet.

Betrachten wir jetzt alle berechneten und experimentellen Kurven, so sehen wir, daß sie nach den Vorzeichen sowie nach der Lage und Zahl der Maxima und Minima und nach ihren Perioden einander genau entsprechen.

Für die absolute Größe der Magnetostriktion ergibt die Berechnung dieselbe Größenordnung wie das Experiment. Es folgt daraus also: 1. daß die Ionen des Eisens kein merkliches elektrisches Dipolmoment haben, und 2. daß diese Ionen bei der Berechnung der magnetischen Kopplungskräfte in erster Annäherung als einfache Dipole behandelt werden können.

Moskau, Magnetisches Laboratorium, August 1928.

Zum Aufbau des Farbenkörpers im Raume aller Lichtempfindungen.

Von **Nikolaus Nyberg** in Moskau.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 9. Juli 1928.)

Der Verfasser gibt im Helmholtzschen Raume aller Lichtempfindungen einen Aufbau des Pigmentfarbenkörpers, dessen Form wesentlich vom Spektralbestand der Beleuchtung abhängt. Der Aufbau bleibt unabhängig von irgendeiner physiologischen Voraussetzung. Die Behandlung erlaubt eine mathematisch begründete kritische Beurteilung der Ostwaldschen Farbentheorie zu machen und bietet eine neue Theorie im Sinne der Arbeiten von H. Grassmann und H. v. Helmholtz.

1. Schon in der Mitte des vorigen Jahrhunderts bewies Grassmann*, daß der Raum der Lichtempfindungen ein affiner Vektorenraum von drei Dimensionen ist. D. h., jeder Lichtempfindung können drei charakteristische Zahlen U_1, U_2, U_3 zugeschrieben werden. Außerdem kann man, da der Ursprung der Lichtempfindung — das objektive Licht — vollständig durch die Funktion der Intensitätsverteilung im ganzen sichtbaren Spektrum bestimmt wird:

$$I = \psi(\lambda),$$

die drei charakteristischen Zahlen U_1, U_2, U_3 als drei lineare Funktionalen

$$U_1\{\psi(\lambda)\}, \quad U_2\{\psi(\lambda)\}, \quad U_3\{\psi(\lambda)\}$$

betrachten, so daß

$$U_i\{\psi_1(\lambda) + \psi_2(\lambda)\} = U_i\{\psi_1(\lambda)\} + U\{\psi_2(\lambda)\}. \tag{1}$$

Lineare Funktionalen können, wie bekannt, durch die folgende Formel:

$$U\{\varphi(\lambda)\} = \int_a^b A(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda. \tag{2}$$

dargestellt werden, wo $A(\lambda)$ eine konstante Funktion ist und die Integration sich auf das ganze Intervall erstreckt, in dem die Funktion $\psi(\lambda)$ bestimmt ist. Doch ist dieses nur dann möglich, wenn die Bedingung der Kontinuität

$$\lim[U_i\{\psi(\lambda)\}] = U_i\{\psi_2(\lambda)\}$$

wenn

$$\lim \int_a^b [\psi_1(\lambda) - \psi_2(\lambda)]^2\,d\lambda = 0 \tag{3}$$

erfüllt ist.

---

* H. Grassmann, Pogg. Ann. **89**, 1853; Philos. Mag. (4) **7**, 1854.

Es ist klar, daß die Bedingung (3) für unsere charakteristischen Zahlen bestehen muß, da zwei Lichtempfindungen, von denen ein nur sehr geringer Intensitätsteil im Spektrum verschieden verteilt ist, sich hinsichtlich der Empfindung wenig voneinander unterscheiden. D. h. daß der Raum der Lichtempfindungen kontinuierlich ist.

Auf diese Weise haben wir bewiesen, daß jede Lichtempfindung unabhängig von irgend einer physiologischen Voraussetzung durch bestimmte Integrale:

$$U_1 = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} A_1(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda, \quad U_2 = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} A_2(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda, \quad U_3 = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} A_3(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda, \quad (4)$$

charakterisiert werden kann, wo die Integrationen sich auf das ganze sichtbare Spektrum erstrecken und $A_1(\lambda)$, $A_2(\lambda)$, $A_3(\lambda)$ drei konstante Funktionen sind.

Wenn wir auf drei orthogonalen Achsen die Größen U_1, U_2, U_3 abtragen, so bekommen wir den Raum der Lichtempfindungen, deren Addition, wie schon früher gesagt, vektoriell ist.

Es ist zu bemerken, daß die Funktionen $A_1(\lambda)$, $A_2(\lambda)$, $A_3(\lambda)$ willkürliche Faktoren enthalten müssen, da der Raum affin ist.

Aus den Formeln (4) leiten wir leicht die Bedingung der Identität zweier Lichtempfindungen ab in Form des Verschwindens der drei Integrale

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} A(\lambda)\,\{\psi_1(\lambda) - \psi_2(\lambda)\}\,d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} A_2(\lambda)\,\{\psi_1(\lambda) - \psi_2(\lambda)\}\,d\lambda$$

$$= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} A_3(\lambda)\,\{\psi_1(\lambda) - \psi_2(\lambda)\}\,d\lambda = 0. \quad (5)$$

Wenn wir eine der physiologischen Voraussetzungen von der Existenz dreier Nervenzentren annehmen und die Größe ihrer Reizungen als Zahlencharakteristiken den Lichtempfindungen zuschreiben, so werden die Charakteristiken die Bedingung (3) erfüllen und additiv sein. Jeder solchen Voraussetzung werden deshalb in unserem Raume lineare Koordinaten entsprechen und die Funktionen $A_1(\lambda)$, $A_2(\lambda)$, $A_3(\lambda)$ Grunderregungskurven der gegebenen Zentren darstellen*.

Bei unserem Aufbau werden wir die Helmholtzsche Voraussetzung benutzen und die drei von König und Dieterici** berechneten Funk-

* Es ist zu bemerken, daß zwei Systeme der verschiedenen Grunderregungskurven nach den Eigenschaften der linearen Funktionen linear verbunden sein müssen.

$$A_i = \sum K_{ij} A_j.$$

** A. König und C. Dieterici, siehe die Bibliographie in H. v. Helmholtz' Handbuch der Physiol. Optik.

tionen als konstante Funktionen annehmen. Diese Funktionen werden wir mit

$$B(\lambda), \quad G(\lambda), \quad R(\lambda)$$

bezeichnen.

2. Betrachten wir die Reflexionsfläche, die durch das Verhältnis der Intensitäten des auffallenden und reflektierten Lichtes als Funktion der Wellenlänge

$$\frac{I}{J} = \varphi(\lambda)$$

bestimmt wird, so werden die von ihr bei der Beleuchtung

$$J = \psi(\lambda)$$

bewirkten Reizungen die folgenden sein:

$$b = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} B(\lambda)\,\psi(\lambda)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda,$$

$$g = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} G(\lambda)\,\psi(\lambda)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda,$$

$$r = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} R(\lambda)\,\psi(\lambda)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda.$$

Weil das Licht in diesem Falle als Beleuchtung betrachtet wird, so muß die Intensität durchaus auf die Einheit der beleuchteten Fläche bezogen werden. Bei gleichzeitiger Beleuchtung einer Fläche mit mehreren Lichtstrahlen

$$J_1 = \psi_1(\lambda), \quad J_2 = \psi_2(\lambda), \quad \ldots, \quad J_n = \psi_n(\lambda)$$

erhalten wir einen remittierten Strahl

$$J_s = (J_1 + J_2 + \cdots + J_n)\,\varphi(\lambda) = \sum_1^n \psi_i(\lambda)\,\varphi(\lambda).$$

Die entsprechenden Reizungen werden die folgenden sein:

$$b_s = \sum_1^n \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} B \cdot \psi_i \cdot \varphi \cdot d\lambda, \quad g_s = \sum_1^n \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} G \cdot \psi_i \cdot \varphi \cdot d\lambda, \quad r_s = \sum_1^n \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} R \cdot \psi_i \cdot \varphi \cdot d\lambda.$$

Daher kann man sagen, daß die Koordinaten der Gesamtempfindung der Summe der Koordinaten der Summanden gleich sind:

$$b_s = \sum b_i, \quad g_s = \sum g_i, \quad r_s = \sum r_i. \tag{6}$$

Das wird eben die Vektorialaddition in unserem Raume sein. Wir werden nur diesen Fall mit dem Namen Addition bezeichnen.

Die Farbenmischung auf der Kreisscheibe nach der Methode von Maxwell oder die quantellistische Mischung, welche manche Künstler brauchen, stellt etwas anderes vor*.

Nehmen wir an, daß auf der Kreisscheibe Sektoren von den Flächeninhalten k_1, k_2, k_3, ... k_n aufgetragen sind, deren Reflexionen durch die Formeln

$$\frac{I_1}{J} = \varphi_1(\lambda), \quad \frac{I_2}{J} = \varphi_2(\lambda), \quad \ldots, \quad \frac{I_n}{J} = \varphi_n(\lambda)$$

bestimmt werden. Bei irgend einer Beleuchtung $J = \psi(\lambda)$ ist die reflektierte Lichtmenge von jedem einzelnen Sektor

$$L = k_i \varphi_i(\lambda)\, \psi(\lambda);$$

die gemeinsame Lichtmenge von der ganzen Scheibe

$$L = \sum L_i = \psi(\lambda) \sum k_i \varphi_i(\lambda).$$

Bei der Drehung der Scheibe wird diese Lichtmenge von der ganzen Oberfläche der Scheibe

$$S = \sum k_i$$

reflektiert. Daher wird auch die davon in unserem Auge hervorgerufene Reizung dieselbe sein wie von einer Remissionsfläche

$$\frac{I}{J} = \frac{\sum k_i \varphi_i(\lambda)}{\sum k_i} \tag{7}$$

bei derselben Beleuchtung $J = \psi(\lambda)$.

Die Formel (7) zeigt, daß die Koordinaten des Resultats der Kreisscheibenmischung bei beliebiger Beleuchtung in unserem Raume wie die Koordinaten des Schwerpunkts gefunden werden. Die Mischung von dieser Art werden wir mit dem Helmholtzschen Ausdruck „additive Mischung" bezeichnen.

Der oben beschriebene Raum ist genau derselbe, der von Helmholtz** aufgebaut worden ist. Die wirklichen Lichtempfindungen bilden in diesem Raume ein kegelförmiges Gebiet (Farbendüte), auf dessen Oberfläche die Spektralempfindungen liegen. E. Schrödinger erwähnt noch folgende Eigenschaften des so aufgebauten Raumes der Lichtempfindungen: die „Farben, die durch bloße Intensitätsänderungen des Lichtes auseinander hervorgehen (Farben gleicher Reizart, wie v. Kries sagt), liegen auf demselben Radiusvektor, ... dabei verhalten sich die Vektorenlängen

---

* Die unten aufgeführten Formeln wurden zum ersten Male von Grassmann (siehe Fußnote *, S. 406) abgeleitet. Später hat auch Ostwald (siehe Fußnote **, S. 416) Analoges erwähnt.

** H. v. Helmholtz, Handb. d. Physiol. Optik.

wie Intensitäten", „der Vektor einer binären Mischfarbe ist den Konstituenten komplanar" *.

Es ist auch zu bemerken, daß bei $k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = k_n$ das Resultat der additiven Mischung sich vom Resultat der Addition nur durch mindere Intensität unterscheidet, denn es enthält einen konstanten Faktor $\frac{1}{n} < 1$. Damit erklärt sich natürlich auch der graue Ton bei der Kreisscheibenmischung der Gegenfarben.

3. Das von der Kegelfläche begrenzte Gebiet werden wir „das Gebiet der möglichen Empfindungen", die Kegelfläche aber selbst „den Kegel der möglichen Empfindungen" nennen.

Das Gebiet der möglichen Empfindungen stellt alle zugänglichen Lichtempfindungen dar; wenn wir aber, wie es gewöhnlich im Leben geschieht, verschieden gefärbte Gegenstände bei einer bestimmten Beleuchtung betrachten, werden lange nicht alle überhaupt möglichen Lichtempfindungen wahrgenommen.

Die Lichtempfindungen, die von gefärbten Gegenständen bei einer gegebenen Beleuchtung hervorgerufen werden, bilden einen Farbenkörper. Die Form dieses Farbenkörpers ist vom Spektralbestand der Beleuchtung wesentlich abhängig. Einen solchen Körper werden wir einen „abhängigen Körper" nennen (abhängig von der Beleuchtung). Alle Versuche, einen Pigmentfarbenkörper aufzubauen, ohne den Spektralbestand der Beleuchtung in Betracht zu ziehen, müssen unbedingt irrtümlich sein, denn in diesem Falle können wir von der Empfindung der Pigmentfarben überhaupt nichts sagen.

Nehmen wir an, $J = \psi(\lambda)$ sei eine bestimmte Beleuchtung. Wir werden sie der Bequemlichkeit halber für Weiß halten, obwohl das keinen Einfluß auf unseren Gedankengang haben kann. Die absolut weiße Pigmentfarbe wird durch die Gleichung

$$\frac{I}{J} = 1$$

unabhängig von λ bestimmt.

Die Koordinaten der Empfindung der absolut weißen Pigmentfarbe bei gegebener Beleuchtung sind

$$b_0 = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} B(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda, \quad g_0 = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} G(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda, \quad r_0 = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} R(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda. \qquad (8)$$

* E. Schrödinger, Farbenmetrik, ZS. f. Phys. **1**, 460, 1920.

Es ist klar, daß jede andere Pigmentfarbe das Licht beliebiger Wellenlänge reflektiert, nur in geringerem Maße als die absolut weiße; darum müssen die Koordinaten b, g, r der Punkte unseres Farbenkörpers die Bedingung

$$b \leqslant b_0, \quad g \leqslant g_0, \quad r \leqslant r_0$$

erfüllen, d. h. der Farbenkörper liegt ganz innerhalb des auf den Koordinatenachsen aufgebauten Parallelepipedons mit den Seiten b_0, g_0, r_0.

Wir führen einen neuen Begriff ein:

Wir werden zwei Empfindungen in bezug auf eine dritte „ergänzend" nennen, wenn diese letztere ihre durch Addition erhaltene Summe ist. Die, in bezug auf die Empfindung der absolut weißen Pigmentfarbe bei einer bestimmten Beleuchtung, ergänzenden Empfindungen werden wir in bezug auf diese Beleuchtung „ergänzend" nennen. Endlich werden wir zwei Pigmentfarben, deren Reflexionsfunktionen die Bedingung

$$\frac{I_1}{J} + \frac{I_2}{J} = \varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda) = 1 \tag{9}$$

unabhängig von λ erfüllen, „ergänzende" Pigmentfarben nennen.

Es ist klar, daß die ergänzenden Pigmentfarben bei beliebiger Beleuchtung in bezug auf diese Beleuchtung ergänzende Empfindungen hervorrufen werden. Daraus folgt, daß, wenn bei gegebener Beleuchtung eine bestimmte Lichtempfindung möglich ist, auch die in bezug auf diese Beleuchtung ergänzende Empfindung möglich sein wird. Da aber die Summe der ergänzenden Empfindungen die von der absolut weißen Pigmentfarbe hervorgerufene Empfindung geben muß und die Addition nach den Gesetzen des Vektorparallelogramms ausgeführt ist, so können wir ein sehr wichtiges Theorem aufstellen.

Der abhängige Farbenkörper ist symmetrisch in bezug auf die Mitte des auf den Koordinaten der absolut weißen Pigmentfarbe aufgebauten Parallelepipedons*.

Der ganze Pigmentfarbenkörper liegt, wie oben erwähnt, innerhalb eines Parallelepipedons mit den Seiten b_0, g_0, r_0, doch kann er den Kegel der möglichen Empfindungen nicht überschreiten. Wenn wir einen anderen Kegel mit der Spitze im absolut weißen Punkte symmetrisch in bezug auf den Mittelpunkt des Parallelepipedons zu dem Kegel der möglichen Empfindungen aufbauen, so muß der Farbenkörper wegen seiner Symmetrie innerhalb dieses Doppelkegels liegen. In einer zurzeit

* Hier ist natürlich nicht die Rede von einer sphärischen Symmetrie, sondern von einer einfachen Symmetrie in bezug auf einen Punkt.

im Druck befindlichen Arbeit zeigen wir, daß der Farbenkörper in der Spitze des Kegels — im Schwarzpunkt — den Kegel der möglichen Empfindungen berührt. Je weiter wir uns von dem Schwarzpunkt entfernen, desto mehr entfernt sich die Oberfläche des Körpers von der Kegelfläche und berührt endlich im Weißpunkt die symmetrische Kegelfläche. Die Form der Oberfläche ist von dem Spektralbestand der Beleuchtung abhängig, doch muß sie, wenn das Spektrum der Beleuchtung kontinuierlich ist, immer konvex sein und im allgemeinen nirgends konkav sein.

Der Sinn des oben von uns aufgebauten Doppelkegels ist der folgende: Wenn wir uns alle möglichen Beleuchtungen vorstellen, bei denen die absolut weiße Pigmentfarbe identisch aussieht, so wird die Gesamtheit aller diesen Beleuchtungen entsprechenden Farbenkörper diesen Doppelkegel bilden.

4. Da die Empfindungen des monochromen Lichtes auf der Oberfläche der Farbendüte liegen, d. h. eine konvexe Fläche bilden, kann die Form der Oberfläche des abhängigen Körpers durch folgende Gleichungen gegeben werden:

$$\left.\begin{aligned} \bar{b}(u,v) &= \int_u^v B\,.\,\psi\,.\,d\lambda, \quad \bar{g}(u,v) = \int_u^v G\,.\,\psi\,.\,d\lambda, \\ & \qquad r(u,v) = \int_u^v R\,.\,\psi\,d\lambda \quad \text{wenn} \quad u < v; \\ \bar{b}(u,v) &= \int_u^{\lambda_1} B\,.\,\psi\,.\,d\lambda + \int_{\lambda_0}^{v} B\,.\,\psi\,.\,d\lambda, \\ & \qquad \bar{g}(u,v) = \int_u^{\lambda_1} G\,.\,\psi\,.\,d\lambda + \int_{\lambda_0}^{v} G\,.\,\psi\,.\,d\lambda, \\ & \qquad r(u,v) = \int_u^{\lambda_1} R\,\psi\,d\lambda + \int_{\lambda_0}^{v} R\,\varphi\,d\lambda \quad \text{wenn} \quad u > v. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

In diesen Gleichungen dienen die Integrationsgrenzen u, v als zwei Parameter, und $\psi(\lambda)$ ist die charakteristische Funktion der Beleuchtung. Wie die Abbildungen (Fig. 1) zeigen, ist der Farbenkörper zigarrenförmig*. Der Körper wird in den Weiß- und Schwarzpunkten zwei Zuspitzungspunkte haben, sonst aber hat im kontinuierlichen Spektrum der Beleuchtung seine Oberfläche keine Brüche.

* Die Abbildungen stellen Halbmeridionalschnitte des Körpers vor, berechnet in bezug auf eine Beleuchtung mit regelmäßig durch das Spektrum verteilter Intensität.

Man kann sich ohne Schwierigkeit überzeugen, daß alle Punkte des Körpers folgende Gleichungen erfüllen:

$$b = k\bar{b} = k\int_u^v B \,.\, \psi \,.\, d\lambda, \quad g = k\bar{g} = \int_u^v G \,.\, \psi \,.\, d\lambda,$$

$$r = k\bar{r}\int_u^v R \,.\, \psi \,.\, d\lambda, \tag{11}$$

so daß jedem Punkte des Körpers drei ganz bestimmte Werte:

$$\lambda_0 \leqq u \leqq \lambda_1, \quad \lambda_0 \leqq v \leqq \lambda_1 \quad \text{und} \quad 0 \leqq k \leqq 1,$$

entsprechen, und umgekehrt.

Wir nehmen ein System von Pigmentfarben, deren Remissionsfunktionen durch die Bedingung

$$\varphi(\lambda) = k, \quad \text{wenn} \quad u \leqq \lambda \leqq v, \quad \text{und} \quad \varphi(\lambda) = 0,$$
$$\text{wenn} \quad \lambda < u \quad \text{oder} \quad \lambda > v, \tag{12}$$

bestimmt werden. Solch ein System wird bei einer willkürlichen Beleuchtung alle Punkte des entsprechenden Farbenkörpers geben, und jedem

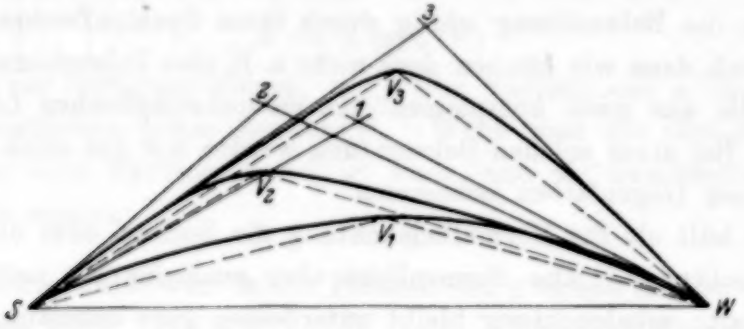


Fig. 1.
$S\,W$ die achromatische Achse. $S\,V\,W$ drei verschiedene Halbmeridionalschnitte des Farbkörpers für eine Beleuchtung $J = \psi(\lambda) = \text{const.}$ — — — die Grenze des Ostwaldschen Körpers V_1, V_2, V_3 die Lage der Vollfarben.

Punkte des Farbenkörpers wird nur eine einzige Pigmentfarbe des Systems entsprechen, wenn das Spektrum der Beleuchtung alle sichtbaren Wellenlängen zwischen λ_0 und λ_1 enthält (d. h. wenn das Spektrum der Beleuchtung „voll" ist). Im allgemeinen Falle, wenn das Spektrum nicht voll ist, können nur solche Pigmentfarben des Systems gleich aussehen, deren Remissionsfunktionen in diesem Spektrum in allen Punkten übereinstimmen, was natürlich trivial ist.

Man kann gewiß auch andere Systeme von Pigmentfarben wählen, die dieselben Eigenschaften offenbaren, doch ist das beschriebene System das einzige, bei dem die Pigmentfarben, die sich nur durch Helligkeit unterscheiden, unabhängig von der Beleuchtung sind. Es sind eben

solche Pigmentfarben des Systems, die sich nur durch den Faktor k unterscheiden. Die Pigmentfarben, die die Bedingungen (12) erfüllen werden wir „charakteristische Pigmentfarben“ nennen. Bei einer gegebenen Beleuchtung sieht überhaupt jede Pigmentfarbe einer gewissen charakteristischen Pigmentfarbe ganz gleich (dient ihr sozusagen als „Analogon“). Bei verschiedenen Beleuchtungen haben die charakteristischen Pigmentfarben verschiedene Analoga. Die extremalen Pigmentfarben ($k = 1$) haben aber bei vollem Spektrum der Beleuchtung überhaupt keine Analoga.

5. Wir haben nun die Prinzipien zum Aufbau des Farbenkörpers in bezug auf eine gegebene Beleuchtung dargelegt. Bei verschiedenen Beleuchtungen ist die Form des Körpers verschieden. Gewöhnlich, wenn von der Empfindung einer Pigmentfarbe gesprochen wird, versteht man darunter eine Empfindung bei einer normal weißen Beleuchtung. Den abhängigen Körper bei einer solchen Beleuchtung werden wir Normalkörper nennen. Leider ist es heutzutage nicht vollkommen bestimmt, was man unter der normal weißen Beleuchtung verstehen soll, um so mehr, als die Beleuchtung völlig durch ihren Spektralbestand bestimmt werden muß, denn wir können doch nicht z. B. eine Beleuchtung „normal“ nennen, die aus zwei komplementären monochromatischen Lichtstrahlen besteht. Bei einer solchen Beleuchtung werden wir aus allen Buntfarben nur ein paar Gegenfarben bekommen.

Man hält oft für Normalbeleuchtung die Sonnen- oder die „Normaltagesbeleuchtung“. Das Sonnenlicht aber erscheint uns natürlich gelb; die Normaltagesbeleuchtung bleibt unterdessen ganz unbestimmt und, wie es scheint, war die Intensitätsverteilung des Lichtes im Spektrum bei der letzteren noch nie bestimmt. In der Mitte des Newtonschen Dreiecks liegt das mit dem Namen „Weiß“ bezeichnete Licht, dessen Intensität regelmäßig im Spektrum verteilt ist:

$$J = \text{const.}$$

Eine solche Definition des weißen Lichtes ist natürlich sehr künstlich, und wir zweifeln, ob man dasselbe für eine Normalbeleuchtung annehmen kann.

6. Vorher haben wir die Lichtempfindungen durch drei von ihnen hervorgerufene Reizungen der Helmholtzschen Nervenzentren bestimmt; gewöhnlich aber zieht man vor, die Lichtempfindungen mittels dreier Eigenschaften festzustellen: Farbton, Helligkeit und Sättigung. Die Helligkeit ist bei unveränderlichem Farbton und Sättigung dem Abstand vom Schwarzpunkt proportional. Bei veränderlichem Farbton und

Sättigung ist der Vergleich der Helligkeiten viel schwerer; es ist oft fast unmöglich, festzustellen, welche Farbe heller und welche dunkler ist. Gewöhnlich benutzt man die Voraussetzung, daß bei der additiven Mischung zweier Farben von gleicher Helligkeit das Resultat auch von derselben Helligkeit sein muß, d. h. daß die Helligkeit eine lineare Funktion der Koordinaten ist. Exner, Kohlrausch* und manche andere Forscher machten Versuche, die Koeffizienten dieser Funktion auszurechnen. Doch ist, unserer Meinung nach, die endgültige Entscheidung in diesem Sinne noch nicht getroffen worden. Die Sättigung bei unveränderlichem Farbton kann durch die Größe der Ecke zwischen der achromatischen Achse und dem Vektor der gegebenen Empfindung oder durch irgend eine monotone Funktion derselben gemessen werden. Da der abhängige Farbenkörper konvex ist, sieht man leicht, daß je näher die Pigmentfarbe zum Schwarzpunkt liegt, d. h. je dunkler sie ist, desto gesättigter kann sie sein. Diese Erscheinung ist allen Malern gut bekannt.

Bei wechselndem Farbton kann eine Formel der Art

$$S = A(\alpha)\,\sigma(F) \tag{13}$$

zum Maße der Sättigung dienen, wo F den Farbton und α die Ecke mit der achromatischen Achse bezeichnet. Wenn man die Sättigung unabhängig von dem Farbton meint, so kann man sie unmittelbar mit der Eckengröße messen:

$$S = \alpha.$$

In diesem Falle werden die Flächen der gleichen Sättigungen runde Kegelflächen sein.

7. Noch eine sehr wichtige Eigenschaft der Lichtempfindung ist von Ostwald eingeführt worden, obwohl er dieselbe nicht als eine besondere Eigenschaft betrachtet, sondern sie mit der Sättigung verwechselt. Wir werden diese Eigenschaft „Farbenfülle“ nennen.

Um die Natur dieser Eigenschaft zu erklären, versuchen wir einmal, die maximal bunten Pigmentfarben aufzusuchen. Nehmen wir eine Pigmentfarbe, die ein sehr schmales Remissionsgebiet (R. G.) hat, so daß das reflektierte Licht fast monochromatisch ist, so erscheint uns eine solche Pigmentfarbe fast schwarz, da nur ein sehr geringer Teil der Lichtmenge der Beleuchtung von dieser Pigmentfarbe reflektiert wird. Der Farbton bleibt fast unmerklich, obwohl solch eine Pigmentfarbe die am meisten gesättigte ist. Wenn wir das R. G. erweitern, wird der Farbton stärker

* K. W. F. Kohlrausch, Phys. ZS. **21**, 1920.

bemerkbar, die Empfindung heller, seine Sättigung aber geringer. Je breiter das R. G. wird, desto größer wird die Helligkeit und desto minder die Sättigung sein. Wenn das R. G. über das ganze Spektrum verbreitet ist, erreicht die Helligkeit ihr Maximum, die Sättigung wird der Null gleich, und so bekommen wir die ganz farblose absolut weiße Pigmentfarbe. Ostwald* bemerkte, daß die Pigmentfarbe uns dann maximal bunt scheint, wenn sie das zwischen zwei Gegenfarben liegende Licht völlig reflektiert, das Licht aber von allen anderen Wellenlängen völlig absorbiert. Solchen Farben gab er den Namen „Vollfarben“ **.

Nehmen wir zwei nahe liegende Punkte, deren Koordinaten die Gleichungen (10) erfüllen, nämlich solche, die sich auf der Oberfläche des Körpers befinden. Ihre Koordinaten werden wir bezeichnen:

$$b = \int_u^v B \,.\, \psi \,.\, d\lambda, \quad g = \int_u^v G \,.\, \psi \,.\, d\lambda, \quad r = \int_u^v R \,.\, \psi \,.\, d\lambda$$

und

$$b + db = \int_{u-du}^{v+dv} B \,.\, \psi \,.\, d\lambda, \quad g + dg = \int_{u-du}^{v+dv} G \,.\, \psi \,.\, d\lambda, \quad r + dr = \int_{u-du}^{v+dv} R \,.\, \psi \,.\, d\lambda,$$

wo du und dv so gewählt sind, daß die beiden Punkte einen gleichen Farbton haben. Wenn wir von dem Koordinatenursprung zu diesen Punkten zwei Vektoren führen und ihre vektorielle Differenz nehmen, so werden die Komponenten der Differenzvektoren sein:

$$db = \int_{du}^{u} B \,.\, \psi \,.\, d\lambda + \int_{v}^{dv} B \,.\, \psi \,.\, d\lambda,$$

$$dg = \int_{dv}^{u} G \,.\, \psi \,.\, d\lambda + \int_{v}^{dv} G \,.\, \psi \,.\, d\lambda,$$

$$dr = \int_{du}^{u} R \,.\, \psi \,.\, d\lambda + \int_{v}^{dv} R \,.\, \psi \,.\, d\lambda,$$

oder wenn aber du und dv infinitesimal klein werden:

$$db = B(u)\,\psi(u)\,du + B(v)\,\psi(v)\,dv,$$
$$dg = G(u)\,\psi(u)\,du + G(v)\,\psi(v)\,dv,$$
$$dr = R(u)\,\psi(u)\,du + R(v)\,\psi(v)\,dv.$$

---

* W. Ostwald, Farbkunde. Leipzig, S. Hirzel, 1923.

** Ostwald behauptete, daß die Vollfarben nicht minder gesättigt wären als die des monochromen Lichtes, was aber durch Kohlrausch völlig verworfen wurde. K. W. F. Kohlrausch, Phys. ZS. **21**, 396, 1920.

Wenn die genommene Farbe (b, g, r) eine Ostwaldsche Vollfarbe und die Farbe $(b + db,\ g + dg,\ r + dr)$ von demselben Farbton ist, werden die Komponenten des Differenzvektors den Koordinaten des absolut weißen Punktes proportional:

$$db : dg : dr = b_0 : g_0 : r_0.$$

Dadurch haben wir bewiesen, daß jede Ostwaldsche Vollfarbe auf der Oberfläche des Körpers dort liegt, wo die tangierende Ebene der achromatischen Achse parallel ist, d. h. im Punkte der maximalen Entfernung aller Punkte des gegebenen Farbtones von der achromatischen Achse*.

Es ist zu bemerken, daß bei verschiedenen Beleuchtungen verschiedene Pigmentfarben Vollfarben sein können. Doch werden für alle Beleuch-

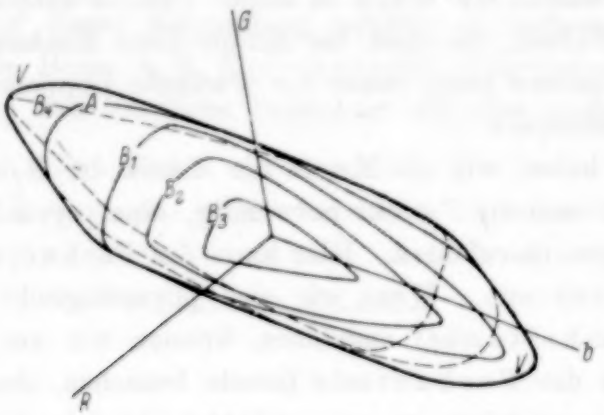


Fig. 2.

Die Projektion des Farbenkörpers auf eine zur achromatischen Achse senkrechte Ebene. R, G, B die Koordinatenachsen. V der vollfarbige Ring. A, B_1, B_2, B_3, B_4 verschiedene Schnitte des Körpers senkrecht zur achromatischen Achse.

tungen, bei denen die Empfindungen der absolut weißen Pigmentfarbe sich untereinander nur durch die Helligkeit unterscheiden, dieselben Pigmentfarben unabhängig von dem Spektralbestand der Beleuchtung Vollfarben sein.

Die Vollfarben bilden auf der Oberfläche des Körpers einen vollfarbigen Ring. Dieser Ring wird weder ein Kreis noch überhaupt eine ebene Kurve sein (Fig. 2), wohl aber wird er eine in bezug auf den Mittelpunkt des Körpers symmetrische Kurve bilden, weil er aus ergänzenden Paaren besteht. Die Farbenfülle kann mittels einer Funktion

* Es ist augenscheinlich, daß diese Definition der Vollfarben unabhängig von der Auswahl der Maßstäbe ist.

des Abstandes von der achromatischen Achse p und des Farbtones F gemessen werden:

$$V = V(p, F)$$

oder noch

$$V = P(p)\Phi(F).$$

In diesem letzten Falle muß die Funktion $\Phi(F)$ sehr wahrscheinlich mit der Funktion $\sigma(F)$ der Formel (13) übereinstimmen:

$$\sigma(F) = \Phi(F) \quad \text{unabhängig von } F.$$

Wenn wir zwei Kegelflächen mit Spitzen — die eine im Weiß- und die andere im Schwarzpunkt — durch den vollfarbigen Ring führen, so erhalten wir einen Doppelkegel derjenigen Farben, die mittels einer Kreisscheibenmischung aus den Farben des vollfarbigen Ringes mit Schwarz und Weiß erhalten werden können (Fig. 1). Das sind eben dieselben Farben, welche Ostwald in seiner Theorie untersucht hat, doch gibt es solche Farben, die man nie mittels einer Mischung der beschriebenen Art bekommen kann, denn der erwähnte Doppelkegel ist nur ein Teil des Farbenkörpers.

8. Bisher haben wir als Metrik die Metrik der Reizungen benutzt, doch ist es für mehrere Zwecke notwendig, eine psychologische Metrik der Empfindungen einzuführen. Hier kann das Fechnersche Gesetz von großer Wichtigkeit sein. Wenn wir eine physiologische Voraussetzung (z. B. die Helmholtzsche) annehmen, können wir zur Reizung jedes Nervenzentrums das Fechnersche Gesetz brauchen, doch wäre es unbegründet und sogar falsch, es, wie es Ostwald tut, in einer willkürlichen Richtung anzuwenden. Die natürlichste Einheit des psychologischen Abstandes wird die minimale Unterscheidungsstufe sein, obwohl die letztere bei verschiedenen Menschen sehr verschieden sein kann. Auf diese Weise wird von allen abstrakt aufgebauten Metriken diejenige die beste sein, welche am vollkommensten mit der Metrik der Unterscheidungsstufen übereinstimmt.

Bei der Betrachtung der Farben, die eine besondere Lage im Farbenkörper haben, kann sich vieles erklären. Ohne das weiter zu erörtern, wollen wir nur bemerken, daß wegen der Symmetrie des Körpers zwei ergänzende Farben stets gleich gelagert sein werden. Wenn dabei eine Farbe eine besondere Lage im Gebiet der minderen Helligkeiten hat, so wird die ergänzende Farbe eine gleiche Lage im Gebiet der größeren Helligkeiten haben. Im einzelnen soll die blaue und folglich die komplementäre gelbe Farbe eine ganz besondere Lage im Körper einnehmen, was man unmittelbar aus den Helmholtzschen Grünerregungskurven

sehen kann. In der Tat, liegt indessen das Reizungsgebiet des blauen Nervenzentrums fast vollkommen außerhalb des Gebietes der einigermaßen bedeutenden Reizungen der beiden anderen Nervenzentren, so werden diese beiden letzten voneinander überdeckt. Wenn wir zu diesem Paar der Grundfarben, dem Gelb und dem Blau, noch zwei dazwischenliegende Farben, das Rot (vom Zinnoberrot bis zum Purpur) und das Grün (vom Blaugrün bis zum Gelbgrün), hinzufügen, so erhalten wir ein Viertonsystem. Das letztere wurde bisher als ein Vorzug der Heringschen Voraussetzung und mit der Helmholtzschen Voraussetzung als nicht übereinstimmend angesehen. Die Stellung der vier Grundfarben im Farbenkörper kann man in der Fig. 2 sehen. Diese Abbildung stellt die Projektion des Körpers auf eine zur achromatischen Achse senkrechte Ebene vor.

Zum Schluß dieser Abhandlung möchte ich meinen innigen Dank meinem Freunde, Herrn A. N. Kolmogoroff, aussprechen, dessen wertvolle Ratschläge und herzliche Teilnahme mir eine große Stütze waren.

Besonderer Fall des Mechanismus der äußeren Reibung.

Von **W. D. Kusnezow** (in Gemeinschaft mit **N. A. Bessonow** und **N. F. Pitschenin**) in Tomsk (Sibirien).

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 8. Oktober 1928.)

In der vorliegenden Abhandlung wird der besondere Fall behandelt, daß die Arbeit ausschließlich nur zum Abschleifen der Oberfläche eines kristallinischen Körpers kubischen Systems mit deutlich ausgeprägter Spaltfläche (100) verbraucht wird. Schleifversuche an polykristallinischen Proben von NaCl, KCl und KJ haben die theoretischen Voraussetzungen vollkommen bestätigt. Außerdem wurden Versuche mit polykristallinischen Proben von Zink, Antimon und Wismut angestellt. Das Endergebnis lautet: die Methode des Schleifens kann angewandt werden, um den relativen Wert der Oberflächenenergie von Stoffen ähnlicher Struktur zu bestimmen.

§ 1. Ziel der Arbeit. Wir haben uns in der vorliegenden Arbeit das Ziel gesteckt, einen besonderen Fall äußerer Reibung zu untersuchen, bei welchem die Arbeit der äußeren Reibung auf Abscherung von Partikeln von der Oberfläche und Bildung des Pulvers verbraucht wird. Um einen solchen Fall zu schaffen, mußten wir alle anderen Erscheinungen, welche die äußere Reibung begleiten, ausschließen oder auf ein Minimum einschränken. Zu diesem Zweck mußten folgende Bedingungen erfüllt werden:

1. Die relative Geschwindigkeit der reibenden Körper mußte möglichst gering sein, um die Wärme, die sich bei dem gegenseitigen Aufschlagen der Vorsprünge bildet, vernachlässigen zu können.

2. Die zu untersuchenden, der Reibung unterliegenden Proben mußten möglichst spröde sein, damit beim Reiben keine bleibenden Deformationen entstehen, bei welchen sich die Körper unvermeidlich erwärmen würden.

3. Schließlich mußten die Proben aus solchem Material bestehen, daß die Kristalle deutlich ausgeprägte Spaltflächen hätten, mit einer theoretisch berechneten und empirisch festgestellten Oberflächenenergie.

Die letzten beiden Bedingungen können die Kristalle und polykristallinischen Proben von Salzen haloider Verbindungen der Alkalimetalle (NaCl, KCl, KJ usw.) erfüllen. Die Struktur dieser Salze ist recht bekannt, sie haben deutlich ausgeprägte kubische Spaltflächen, sind in den Flächen (110) und (111)* nicht spaltbar, zerfallen bei Zimmertemperatur und schneller Deformierung ohne bleibende Deformationen**,

---

* W. D. Kusnezow, ZS. f. Phys. **42**, 905, 1927.

** A. F. Joffe, M. W. Kirpitschewa und M. A. Lewitsky, ZS. f. Phys. **22**, 286, 1924.

und ihre Oberflächenenergie für die Flächen (100) ist theoretisch berechnet* und für NaCl experimentell gemessen**.

Somit dürften diese Stoffe am meisten geeignet sein, um die theoretischen Folgerungen hinsichtlich des Mechanismus unseres Falles der äußeren Reibung zu prüfen.

Den Verbrauch der äußeren Arbeit auf akustische und elektrische Energie können wir füglich vernachlässigen, wenn die relative Geschwindigkeit gering ist. Wie Theorie und Experiment lehren, verlangen sogar starke akustische Effekte nur einen ganz unbedeutenden Energieaufwand.

§ 2. Die Theorie der Frage. Betrachten wir den allereinfachsten speziellen Fall: Ein Kristall oder ein polykristallinischer Körper eines regulären Systems mit deutlich ausgeprägten kubischen Flächen wird von irgend einer rauhen Oberfläche eines festeren und härteren Materials geschliffen; der Verschleiß der letztgenannten Oberfläche kommt nicht in Betracht. Nehmen wir eine Scheibe Schmirgel und einen der Kristalle der obenerwähnten Salze der alkalischen Metalle, so kann ein Fall geschaffen werden, der dem theoretischen sehr nahe kommt.

Nehmen wir an, daß die ganze äußere Arbeit $U = Fl$, worin F die Kraft der Reibung und l der zurückgelegte Weg ist, ausschließlich auf Abscherung der Unebenheiten des Kristalls und Zermalmung der abgescherten Vorsprünge verbraucht wird. Als Ergebnis dieser Arbeit erhalten wir ein Pulver, welches aus regelmäßigen und unregelmäßigen Partikelchen mit kubischen Grenzflächen bestehen wird. Unter diesen überhaupt ungleichen Teilchen hat die Mehrzahl einen gewissen bestimmten Umfang. Nehmen wir an, daß sie alle von gleicher Dimension sind und Kuben mit der Seitengröße a vorstellen. Die Oberfläche eines solchen Körnchens ist also $= 6a^2$. Wenn ihre Gesamtzahl N ist, so wird ihre gesamte Seitenoberfläche $S = 6a^2N$ betragen. Wenn der Umfang der abgeschliffenen Schicht $= v$ ist, so ist $N = v/a^3$ und die gesamte Seitenfläche der Körnchen $S = 6v/a$; da aber $v = M/d$ ist, wo M die Menge der abgeschliffenen Schicht und d die Dichte der Probe ist, so wird $S = 6M/ad$.

Um aus einem ganzen Kristall oder einer polykristallinischen Probe eine gewisse Menge Pulver mit der Oberfläche S zu erhalten, muß eine äußere Energie von

$$U = 2S\sigma = \frac{12}{a} \cdot \frac{M\sigma}{d} = \beta \frac{M\sigma}{d} \qquad (1)$$

* M. Born und O. Stern, Berl. Ber. 1919, S. 901.

** W. D. Kusnezow und W. M. Kudrjawzewa, ZS. f. Phys. **42**, 302, 1927.

verbraucht werden, wo $\beta = \frac{12}{a}$ den Koeffizienten darstellt, welcher ausschließlich von den Dimensionen der abgescherten Körnchen abhängt. Diese Energie U muß gleich sein der äußeren Arbeit. Als Endergebnis erhalten wir:

$$Fl = \beta \frac{M\sigma}{d}. \tag{2}$$

Diese Formel, welche die Arbeit der Reibungskraft mit der Oberflächenenergie verbindet, ist nur unter Beobachtung der oben angeführten Bedingungen gültig.

Für zwei verschiedene Stoffe muß bei gleichen Werten von β, d. h. bei gleichen Dimensionen und Formen der Körnchen des Pulvers, die Formel geschrieben werden:

$$F_1 l_1 : F_2 l_2 = \frac{M_1 \sigma_1}{d_1} : \frac{M_2 \sigma_2}{d_2}, \tag{3}$$

hieraus folgt:

$$\frac{F_1 l_1 d_1}{M_1 \sigma_1} = \frac{F_2 l_2 d_2}{M_2 \sigma_2} = \text{const}. \tag{4}$$

Bei gleichen Strecken $l_1 = l_2$ erhalten wir

$$\frac{F_1 d_1}{M_1 \sigma_1} = \frac{F_2 d_2}{M_2 \sigma_2} = \text{const} = A. \tag{5}$$

Wenn wir in die Formel (3) die Umfänge v_1 und v_2 der abgeschliffenen Schichten einführen, so erhalten wir

$$\frac{F_1}{v_1 \sigma_1} = \frac{F_2}{v_2 \sigma_2} = \text{const} = \alpha. \tag{6}$$

Wenn bei gleichen Wegen l die Umfänge der abgeschliffenen Schichten gleich sind $v_1 = v_2$, so wird

$$\frac{F_1}{\sigma_1} = \frac{F_2}{\sigma_2} = \text{const}, \tag{7}$$

d. h. die Reibungskräfte sind den Oberflächenenergien proportional.

Die Formeln (3) bis (7) können experimentell kontrolliert werden; sie sind gültig nur in dem Falle, wenn die Werte der Koeffizienten $\beta = 12/a$ für die Versuchsstoffe gleich sind.

Für die experimentelle Prüfung der Formeln müssen solche Kristalle und polykristallinische Körper gewählt werden, welche in gleichen Formen kristallisieren und gleiche Abspaltungsflächen haben; auch müssen gleiche rauhe schleifende Oberflächen genommen werden.

Unsere erste Aufgabe bestand in der experimentellen Nachprüfung der Formeln (3) bis (7) in Anwendung auf NaCl, KCl und KJ, deren

Oberflächenenergien theoretisch berechnet waren. Sie betragen nach Born und Stern:

$$\sigma(\mathrm{NaCl}) = 150\,\mathrm{erg/cm^2};\quad \sigma(\mathrm{KCl}) = 107;\quad \sigma(\mathrm{KJ}) = 75. \qquad (8)$$

Wenn auch vielleicht die absoluten Werte für σ nicht richtig sein sollten, so müssen doch ihre Beziehungen zueinander gültig sein.

Wenn man zwei Stoffe nimmt, die in verschiedenen Formen kristallisieren, so verlieren die Formeln (3) bis (7) ihre Gültigkeit; indessen muß die Formel (2) für jeden Stoff gültig sein, wo β nicht $= 12/a$ ist, sondern von dem sogenannten Koeffizienten der Form, d. h. von der Beziehung der Seitenfläche des Kristalls zu seinem Umfange abhängt.

Bei gleicher Rauhheit der schleifenden Oberfläche und unter der Bedingung, daß die äußere Arbeit ausschließlich für Abscherung verbraucht wird, muß für jeden spröden Körper nachstehende Formel Gültigkeit haben:

$$\frac{Fld}{M} = \beta\sigma = \text{const.} \qquad (9)$$

Unsere zweite Aufgabe bestand in der Nachprüfung der Formel (9) durch Versuche mit Zink, Antimon und Wismut.

§ 3. Die Apparatur. Wir benutzten zu den Versuchen einen Apparat, der schematisch in Fig. 1 abgebildet ist. Eine runde metallische

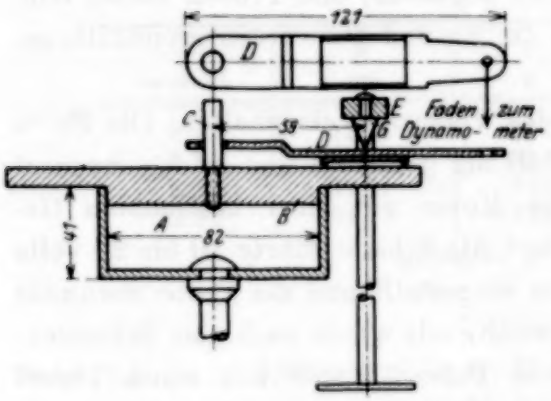


Fig. 1.

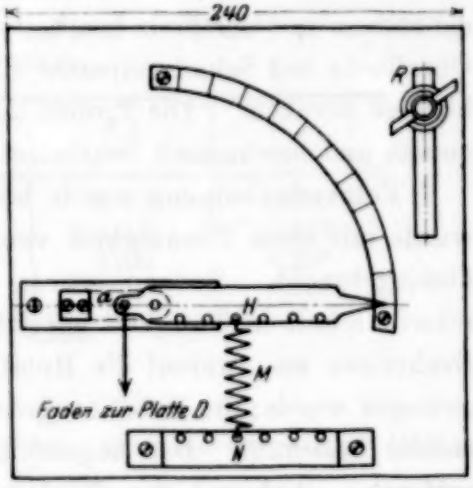


Fig. 2.

Schachtel A rotiert mittels Schneckentransmission und eines Elektromotors. Die Schachtel wird mit einer gußeisernen Scheibe B verschlossen; in der Mitte der Scheibe ist ein hervorstehender Zapfen C angebracht, dessen Achse mit der Drehungsachse der Schachtel zusammenfällt. Die Scheibe ist mit einer aufgeklebten Lage Schmirgelpapier

Nr. 00 versehen. Die zur Untersuchung bestimmte Probe K befand sich in einer kleinen Schachtel, die an die untere Seite einer Messingplatte D angelötet ist. Die Entfernung vom Zentrum der Probe bis zur Drehungsachse war $r = 5{,}9$ cm. Um die Probe an die Scheibe zu drücken, diente eine besondere Vorrichtung; sie bestand aus einer Platte E mit zwei Wagschalen für die Gewichte und einem umgekehrten Kegel G, dessen Spitze in eine Vertiefung in der Platte D hineinpaßte; diese Vertiefung befand sich im Zentrum der kleinen Schachtel mit der Probe.

Am Ende des Plättchens D befand sich eine Öffnung a, wo ein zum Dynamometer führender Faden angebunden wurde. Die Entfernung R von der Rotationsachse bis zur Befestigungsstelle des Fadens betrug 10,5 cm. Das Dynamometer ist in Fig. 2 dargestellt. Das Ende b des Zeigers H war durch einen Faden mit dem Ende a des Plättchens D (Fig. 1) verbunden. Das andere Ende des Zeigers konnte auf dem Bogen eines in Grade eingeteilten Quadranten gleiten. Außerdem war der Zeiger durch eine Feder M mit der unbeweglichen Nabe N verbunden.

§ 4. Proben und Methode der Messungen. Zu den Versuchen waren einige Proben aus NaCl, KCl, KJ, Zn, Sb und Bi hergestellt, die einen Flächeninhalt von $3{,}0 \times 2{,}0 = 6{,}0\,\text{cm}^2$ und eine Dicke von 0,4 bis 0,5 cm hatten. Die chemisch reinen Salze wurden geschmolzen und in Asbestformen gegossen; um ihnen die gehörige Form zu geben, wurden sie sodann mit der Feile bearbeitet; außerdem wurde die zu untersuchende Oberfläche mit Schmirgelpapier Nr. 00 geglättet; alle Proben hatten feinkörnige Struktur. Die Proben aus Zn, Sb und Bi wurden gleichfalls gegossen und mechanisch bearbeitet.

Folgende Ordnung wurde bei den Versuchen eingehalten: Die Probe wurde mit einer Genauigkeit von 0,01 mg gemessen und in den Apparat hineingebracht. Sodann wurde der Motor mit einer bestimmten Geschwindigkeit in Tätigkeit gesetzt und die Scheibe führte 10 bis 20 volle Drehungen aus, warauf die Rotation eingestellt und die Probe nochmals gewogen wurde; die Rotationsgeschwindigkeit wurde nach dem Sekundenmesser bestimmt. Das abgeschliffene Pulver wurde mit einem Pinsel entfernt. Während der Rotation der Scheibe wurde der Zeiger des Dynamometers beobachtet, dessen Lage eine geringe Schwankung um einen gewissen mittleren Wert bekundete. Das Gewicht P, unter dessen Druck die Proben sich befanden, war bei fast allen Versuchen $= 1000$ g.

§ 5. Ergebnisse der Versuche mit NaCl, KCl und KJ. Die Versuche wurden ausgeführt, um die Formel (5), aufgestellt unter der Voraussetzung, daß die ganze Arbeit auf Abspaltung der Vorsprünge

verbraucht werde, auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 1, 2 und 3 zusammengestellt; folgende Bezeichnungen sind in ihnen eingeführt: d die Dichte des Materials im kristallinischen Zustande, σ die Oberflächenenergie für (100)-Flächen, S die der Abschleifung unterliegende Oberfläche der Probe, P die auf die Probe drückende Last, n die Anzahl der Umdrehungen der Scheibe, e der vom Angriffspunkt der Reibungskraft zurückgelegte Weg, v die Geschwindigkeit des Schmirgelpapiers für das Zentrum der Probe, M die Menge der abgeschliffenen Schicht, F die Kraft der Reibung und $A = \frac{F d}{M \sigma}$.

Tabelle 1.

Probe NaCl, $d = 2{,}15\ \mathrm{cm^{-3}\ g}$, $\sigma = 150\ \mathrm{erg/cm^2}$, $S = 6{,}0\ \mathrm{cm^2}$, $P = 1000\ \mathrm{g}$, $n = 10$, $e = 371\ \mathrm{cm}$.

v cm sec^{-1}	M mg	F g	$\frac{M\sigma}{d}$	A
3,3	50,90	719	3460	0,208
2,6	47,07	686	3280	0,209
2,3	44,45	652	3111	0,207
2,6	41,77	602	2890	0,208

Mittleres $A = 0{,}208$.

Tabelle 2.

Probe KCl, $d = 1{,}99\ \mathrm{cm^{-3}\ g}$, $\sigma = 107\ \mathrm{erg/cm^2}$, $S = 6{,}0\ \mathrm{cm^2}$, $P = 1000\ \mathrm{g}$, $n = 10$, $e = 371\ \mathrm{cm}$.

v cm sec^{-1}	M mg	F g	$\frac{M\sigma}{d}$	A
2,5	61,01	687	3270	0,210
2,2	58,08	644	3110	0,207
2,2	57,88	642	3100	0,207
2,3	56,89	635	3050	0,208

Mittleres $A = 0{,}208$.

Tabelle 3.

Probe KJ, $d = 3{,}06\ \mathrm{cm^{-3}\ g}$, $\sigma = 75\ \mathrm{erg/cm^2}$, $S = 6{,}0\ \mathrm{cm^2}$, $P = 1000\ \mathrm{g}$, $n = 10$, $e = 371\ \mathrm{cm}$.

v cm sec^{-1}	M mg	F g	$\frac{M\sigma}{d}$	A
2,2	141,09	719	3460	0,208
2,6	132,12	673	3240	0,208
2,3	125,03	634	3060	0,207
3,3	117,84	604	2890	0,209

Mittleres $A = 0{,}208$.

Jede Serie von vier Versuchen, die in den Tabellen zusammengestellt sind, wurde mit einer und derselben Schmirgelscheibe ausgeführt; die Scheibe wurde durch eine neue ersetzt, wenn die Probe gewechselt wurde.

Aus den Tabellen ergibt sich:

1. Der mittlere Wert für die Reibungskraft F ist nicht konstant; die Kraft der Reibung ist zu Beginn der Experimente bei frischem Schmirgelpapier größer als am Ende der Versuche.

2. Die Masse der abgeschliffenen Schicht M wird bei konstanter Anzahl der Scheibendrehungen kleiner nach Maßgabe der allmählichen Abnutzung der Schmirgelscheibe.

3. Das Verhältnis der Reibungskraft F zu dem Wert $\frac{M\sigma}{d}$ ist in allen Tabellen dasselbe, gleich 0,208. Abweichungen von diesem mittleren Wert bleiben in den Grenzen der möglichen Fehler.

Diese Resultate zeigen, daß die theoretischen Voraussetzungen, die in § 2 gemacht wurden, für NaCl, KCl und KJ richtig sind; es unterliegt keinem Zweifel, daß diese Ergebnisse auch für andere haloide Salze alkalischer Metalle gültig sein müssen.

Die Abschleifungsmethode zur Klarstellung eines besonderen Falles des Mechanismus der äußeren Reibung kann zur Bestimmung der Oberflächenenergie von (100)-Flächen NaCl-ähnlicher Salze angewandt werden.

§ 6. Ergebnisse der Versuche mit Zn, Sb und Bi. Da für diese Stoffe die Oberflächenenergien für Abspaltungsflächen zur Zeit noch unbekannt sind, konnten die Versuche mit diesen polykristallinischen Proben nur dazu dienen, die Formeln (9), oder bei $l = \text{const}$

$$\frac{F}{M} = \frac{\beta\sigma}{d} = \text{const} \tag{10}$$

einer Prüfung zu unterziehen. Die Ergebnisse sind in den nachstehenden Tabellen 4, 5 und 6 zusammengefaßt:

Tabelle 4.

Zink, $d = 7{,}1\ \text{cm}^{-3}\,\text{g}$, $S = 6{,}0\ \text{cm}^2$, $P = 1000\ \text{g}$, $n = 10$, $l = 371\ \text{cm}$.

v cm sec^{-1}	M mg	F g	$\frac{F}{M}$
3,1	6,61	487	73,2
3,6	6,16	446	73,3
3,1	5,45	395	72,5
3,5	4.27	314	73,5

Tabelle 5.

Antimon, $d = 6{,}7\,\mathrm{cm^{-3}\,g}$, $S = 6{,}0\,\mathrm{cm^2}$, $P = 1000\,\mathrm{g}$, $n = 10$, $l = 371\,\mathrm{cm}$.

v cm sec^{-1}	M mg	F g	$\frac{F}{M}$
2,3	28,67	565	19,7
2,8	23,30	455	19,6
2,8	23,56	461	19,6
2,8	22,07	424	19,3

Tabelle 6.

Wismut, $d = 6{,}9\,\mathrm{cm^{-3}\,g}$, $S = 6{,}0\,\mathrm{cm^2}$, $P = 1000\,\mathrm{g}$, $n = 10$, $l = 371\,\mathrm{cm}$.

v cm sec^{-1}	M mg	F g	$\frac{F}{M}$
3,0	59,38	571	9,62
3,0	57,14	549	9,61
3,1	45,86	439	9,57

Der Wert $\frac{F}{M}$ fiel bei diesem letzten Versuch kleiner aus, als bei den anderen, augenscheinlich deshalb, weil von der Probe während des Experiments ein Stückchen abbrach, welches den Wert M vergrößerte.

Die Tabellen zeigen, daß die Reibungskraft F, die von dem Abnutzungsgrade des Schmirgelpapiers abhängt, nicht konstant bleibt, daß jedoch das Verhältnis der Reibungskraft zur Masse der abgeschliffenen Schicht in den Grenzen der zugelassenen Fehler beständig bleibt. Somit bestätigen auch diese Versuche die Richtigkeit unseres Standpunktes.

§ 7. Zusammenfassung. 1. Untersucht wurde der besondere Fall äußerer Reibung, wenn die äußere Arbeit ausschließlich zur Abschleifung der oberflächlichen Schichten der reibenden Körper verbraucht wird, wobei eine Abscherung der Vorsprünge und Zermalmung der Kristalliten stattfindet.

2. Die Experimente mit polykristallinischen Proben NaCl, KCl und KJ, deren Oberflächenenergie σ für (100) bekannt ist, haben die theoretisch aufgestellten Formeln vollkommen bestätigt.

3. Die Versuche mit polykristallinischen Proben aus Zn, Sb und Bi, für welche σ noch unbekannt ist, zeigten, daß für jede Probe die Beziehung der Kraft F zur Masse M der abgeschliffenen Schicht bei gleichem Wege l konstant bleibt.

4. Die Abschleifungsmethode kann zur Bestimmung der Oberflächenenergie von Stoffen ähnlicher Struktur angewandt werden.

Tomsk (Sibirien), Physikalisches Institut der Staatsuniversität.

Experimentelle Untersuchungen über die Diffusion langsamer Elektronen in Edelgasen*.

Von **Heinz Pose** in Halle.

Mit 15 Abbildungen. — (Eingegangen am 11. Oktober 1928.)

Es werden die theoretischen Überlegungen von G. Hertz, nach denen man die Bewegungen langsamer Elektronen unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes als Diffusionsvorgang aufzufassen hat, bei Neon, Argon und einem Gemisch von Neon und Helium experimentell geprüft. Ferner wird untersucht, wieweit die diesen Überlegungen zugrunde gelegten Annahmen über den Verlauf der Zusammenstöße zwischen Elektronen und Atomen der Wirklichkeit entsprechen. Aus den Untersuchungen folgt, daß die Bewegungen langsamer Elektronen in Edelgasen innerhalb der bis jetzt erreichbaren Meßgenauigkeit durch die Diffusionstheorie richtig dargestellt werden.

I. Ziel der Arbeit.

Nach Überlegungen, die von G. Hertz** angestellt worden sind, hat man die Bewegungen langsamer Elektronen in Gasen unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes als Diffusionsvorgang aufzufassen. In der vorliegenden Arbeit werden Experimente beschrieben, die angestellt wurden, um diese Theorie zu prüfen und zu untersuchen, wieweit die der Theorie zugrunde gelegten Annahmen über den Verlauf der Zusammenstöße zwischen Elektronen und Atomen der Wirklichkeit entsprechen. Diese Annahmen sind folgende: Der Energiezuwachs, den ein Elektron beim Durchlaufen eines Weges von der Länge der mittleren Weglänge in Richtung des elektrischen Feldes erfährt, soll klein sein gegen die kinetische Energie des Elektrons. Wir beschränken uns dadurch auf kleine mittlere Weglängen, also auf nicht zu niedrige Drucke und auf kleine Feldstärken. Im feldfreien Raum ist diese Bedingung immer erfüllt. Der Energieverlust, den ein Elektron beim Zusammenstoß mit einem Atom erleidet, soll klein sein gegen die kinetische Energie des Elektrons. Wir beschränken uns dadurch auf Geschwindigkeiten unterhalb der ersten Anregungsstufe und auf einatomige Gase, bei denen der Energieverlust bei elastischen Zusammenstößen klein ist, das ist der Fall bei den schweren Edelgasen und Metalldämpfen***. Ferner wird angenommen, daß für die Elektronen nach jedem Zusammenstoß jede Richtung gleich wahrscheinlich ist.

---

* Hallesche Dissertation.

** G. Hertz, ZS. f. Phys. **32**, 298, 1925.

*** Bezüglich der Größe des Energieverlustes vergleiche man mit den Messungen von W. Harries, ZS. f. Phys. **42**, 26, 1927.

Es wird in der vorliegenden Arbeit die Diffusion zwischen zwei parallelen kreisförmigen Platten untersucht, deren Abstand klein ist gegen ihren Durchmesser. Von der einen Platte gehen Elektronen aus und gelangen durch Diffusion teilweise auf die gegenüberliegende Platte, teilweise auf die erste Platte zurück. Wie gezeigt werden wird, ergibt die Theorie, daß das Verhältnis der auf die eine Platte zu der auf die andere Platte gehenden Elektronen proportional der mittleren Weglänge der Elektronen sein muß. Es ergibt sich somit eine Methode, um den Verlauf der mittleren Weglänge in Abhängigkeit von der Elektronengeschwindigkeit zu messen. Solche Messungen wurden vorgenommen in einem Ne-He-Gemisch, in heliumfreiem Neon und in Argon.

Weiter wurde in denselben Gasen die Zahl der Elektronen untersucht, die nach Durchlaufen von verschieden großen elektrischen Feldern auf die der emittierenden gegenüberliegende Platte gelangt. Die Abhängigkeit der Zahl der hinübergelangenden Elektronen von der Feldstärke läßt sich theoretisch berechnen. Die theoretischen Kurven werden mit den gemessenen verglichen.

II. Theoretischer Teil.

Wir wollen die Diffusion zwischen zwei parallelen ebenen Platten untersuchen. Die eine Platte A emittiere Elektronen, deren Energie der beschleunigenden Spannung V_0 entsprechen soll. Zwischen den beiden Platten A und B liege die Spannung $V_a - V_0$, so daß die Elektronen an der Platte B mit einer Energie entsprechend der Spannung V_a ankommen. Nach den Überlegungen von G. Hertz* gilt dann für die Elektronen, die auf die Platte B gelangen, die Differentialgleichung

$$N = -\frac{v\lambda}{3}\frac{d\varrho}{dx} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\varrho\gamma\lambda}{v}.$$

Hierin bedeutet v die Geschwindigkeit der Elektronen, λ ihre mittlere Weglänge, ϱ die Dichte, also die Anzahl der Elektronen in der Volumeneinheit, und γ die Beschleunigung, welche ein Elektron im elektrischen Felde in der Richtung der positiven X-Achse erfährt. Integriert man die Differentialgleichung mit Hilfe der Beziehung $v\,dv = \gamma\,dx$ und berücksichtigt man die Grenzbedingung $\varrho = 0$ für $v = v_a$, so erhält man

$$\varrho_0 = \frac{3N}{\gamma\lambda}\cdot v_0 \log\frac{v_a}{v_0}, \qquad (1)$$

* G. Hertz, l. c.

wo v_0 die Geschwindigkeit der Elektronen an der Platte A, v_a ihre Geschwindigkeit an der Platte B bedeuten und ϱ_0 die Dichte der Elektronen in der unmittelbaren Nähe der Platte A.

Die Zahl der auf die Patte A zurückdiffundierenden Elektronen berechnet sich auf folgende Weise. Nimmt man an, daß in der unmittelbaren Nähe der Platte A die Elektronen die Dichte ϱ_0 und die Geschwindigkeit v_0 haben, so ist nach einer Formel der kinetischen Gastheorie die Anzahl der auf die Platte A gelangenden Elektronen gegeben durch

$$\overline{N} = \frac{\varrho_0 v_0}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha = \frac{\varrho_0 v_0}{4}. \tag{2}$$

Das Verhältnis der auf die Platte B gelangenden Elektronen zu den auf die Platte A gelangenden erhält man durch Division der Gleichung (1) durch Gleichung (2)

$$\frac{N}{\overline{N}} = \frac{4\gamma\lambda}{3 v_0^2 \log \frac{v_a}{v_0}}.$$

Setzt man

$$v_0^2 = \frac{2 V_0}{m}, \qquad \gamma = \frac{V_a - V_0}{a \,.\, m}, \qquad \frac{V_a}{V_0} = \varepsilon,$$

wo V_0 die Energie der Elektronen an der Platte A ist, V_a ihre Energie an der Platte B, und a der Abstand zwischen den Platten A und B ist. Man erhält dann

$$\frac{N}{\overline{N}} = \frac{4}{3} \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\log \varepsilon}.$$

Für den feldfreien Raum ist $V_0 = V_a$, man erhält also

$$\frac{N}{\overline{N}} = \frac{4}{3} \frac{\lambda}{a}. \tag{3}$$

Wie später gezeigt werden wird, ist die Messung der zurückdiffundierenden Elektronen mit experimentellen Schwierigkeiten verbunden. Daher betrachten wir nun folgenden Fall, der einer weiteren Reihe von Experimenten zugrunde liegt. Die Zahl der von der emittierenden Platte A ausgehenden Elektronen sei konstant, $= N_0$. Es werden bei konstantem Druck die auf die zweite Platte B gelangenden Elektronen in Abhängigkeit von verschiedenen zwischen den beiden Platten durchlaufenen elektrischen Feldern aufgenommen. Es ist $\overline{N} + N = N_0$, wo $\overline{N}$ die Zahl der auf die Platte A zurückgehenden Elektronen ist.

N_0 ist dann die Gesamtzahl der von der Platte A ausgehenden Elektronen Es ist nach Gleichung (1) und (2)

$$\overline{N} = \frac{\varrho_0 v_0}{4}, \qquad N = \frac{\varrho_0 \gamma \lambda}{3 v_0 \log \frac{v_a}{v_0}}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung $N_0 = \overline{N} + N$ erhalten wir

$$N = \frac{4}{3 v_0^2} \cdot \frac{\gamma \lambda}{\log \frac{v_a}{v_0}} \cdot (N_0 - \overline{N}),$$

$$N = N_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \frac{a}{\lambda} \frac{\log \varepsilon}{\varepsilon - 1}}.$$

III. Versuchsanordnung.

Versuch 1 im feldfreien Raume. Von einer Platte A gehen Elektronen aus und gelangen teilweise auf eine gegenüberliegende Platte B, teilweise gelangen sie durch Diffusion zurück auf die erste Platte. Das Verhältnis der auf die beiden Platten fließenden Ströme soll gemessen werden. Fig. 1 zeigt die Versuchsanordnung.

Sämtliche Metallteile waren aus Kupfer hergestellt, A und B sind die beiden Platten. Die Platte A hatte in der Mitte ein Loch von 3 mm Durchmesser, durch das der Elektronenstrahl in den Raum zwischen den beiden Platten eintrat. Die Platte A wird seitlich gehalten durch den Kupferkörper K, an dem sie durch Glasröhrchen hindurch in der aus der Figur ersichtlichen Weise isoliert gegen K festgeschraubt ist. K sitzt seinerseits festgeschraubt auf dem Zylinder Z. In der Mitte seiner Grundfläche trägt Z ein Röhrchen r von 1 mm lichter und 2 mm äußerer Weite Die Platte A wird so gegen dies Röhrchen zentriert, daß es genau in der Mitte ihres Loches sitzt. Die Zentrierung war leicht durch verschieden starkes Anziehen der Schrauben, durch die A an K gehalten wird, zu erreichen. Das Ende des Röhrchens r liegt in der Ebene der Platte A. Die Zuleitung zur Platte A geschah durch eine der Schrauben, mit denen A an K gehalten wurde. Sie wurde durch den etwa 5 mm breiten Raum zwischen K und Z durch ein Glasröhrchen hindurch zur Einschmelzstelle geführt. Die Platte B war an einem Einschmelzdraht festgeschraubt, der in der Mitte des Glasrohres eingeschmolzen war. Dies Glasrohr wurde in dem Röhrenfortsatz von K festgeklemmt. Das freie Ende des Einschmelzdrahtes wurde nach außen geführt. Der Zylinder Z war lang

gemacht, um zu verhindern, daß von dem Glühdraht außen herum Elektronen zu den Zuführungsdrähten gelangten. Als Elektronenquelle diente ein Wolframdraht von 0,1 mm Dicke, der im Abstand von etwa 0,5 mm vor die Mitte des Loches von Z gesetzt wurde. Zwei Schellen, die an K saßen, hielten den Apparat an einer Gabel aus Glasrohr, die, wie aus Fig. 2 ersichtlich ist, an dem weiten Glasrohr, in das der Apparat eingesetzt wurde, eingeschmolzen war. Durch Absprengen des unteren

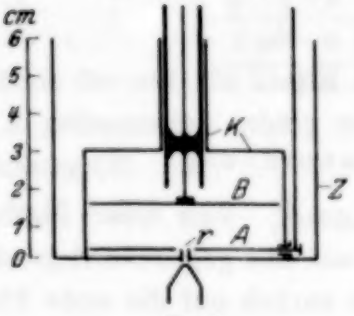


Fig. 1.

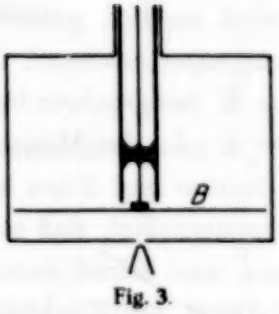


Fig. 3.

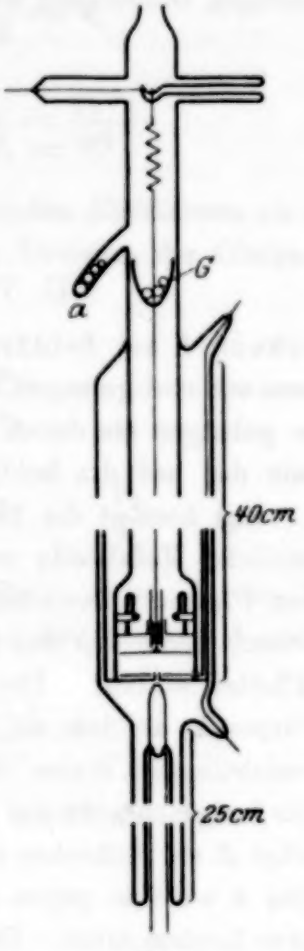


Fig. 2.

Teiles des Rohres konnte der Glühfaden herausgenommen und erneuert werden, ohne daß der ganze Apparat erneuert werden mußte.

Da es wichtig schien, die Stoßzahl auch ohne Änderung des Druckes variieren zu können, wurde bei einem zweiten Rohr der Abstand zwischen den beiden Platten A und B veränderlich gemacht. Dazu wurde das Glasrohr, das den Einschmelzdraht der Platte B hält, nicht in dem Rohrfortsatz von K festgeklemmt, sondern so eingesetzt, daß es sich leicht darin verschieben ließ. Der Einschmelzdraht wurde durch das mittlere

Rohr nach oben geführt. Dort trug er ein Glasgefäß G. Die Platte B mit Zuführung und dem Glasgefäß G hing weiter oben an einer Spirale, die an einem gläsernen Halter aufgehängt war. Die Zuführung der Platte B war seitlich eingeschmolzen (Fig. 2). In einem seitlichen Rohransatz a befanden sich Stahlkugeln, die in größerer oder geringerer Anzahl mit einem Magneten in das Glasgefäß G hineingebracht und wieder herausgehoben werden konnten. Dadurch konnte der Abstand zwischen den Platten A und B zwischen 7 und 20 mm variiert werden.

Die Schaltung war folgende: die Platten A und B und der Zylinder Z (Fig. 1) waren geerdet, A und B je über ein Galvanometer. Zwischen Glühdraht und Zylinder wurde eine variable Spannung gelegt. Um die Spannung an die Stelle des Glühdrahtes zu legen, von welcher die durch das Loch hindurchtretenden Elektronen ausgehen, war dem Glühdraht ein Widerstand von etwa 500 Ohm parallel gelegt. An den Schieber dieses Widerstandes wurde die Zuleitung gelegt. Die Zuleitung liegt dann an der richtigen Stelle, wenn beim Kommutieren des Heizstromes der an der Platte B gemessene Strom derselbe bleibt. Durch Probieren läßt sich die richtige Stellung des Schiebers ermitteln. Dadurch, daß man das Verhältnis der auf die beiden Platten fließenden Ströme mißt, hat man den Vorteil, daß Schwankungen in der Emission des Glühdrahtes keine Rolle spielen.

Versuch 2. im elektrischen Felde. Für die Diffusion im elektrischen Felde wurde ein zweiter Apparat konstruiert (Fig. 3). Bei ihm war die Platte A für die zurückkehrenden Elektronen fortgelassen, die Platte B war größer gemacht, sie hatte 65 mm Durchmesser. Der Abstand zwischen Loch und Platte betrug 7 mm. Bei dem einen Rohr traten die Elektronen durch ein Loch von $^1/_2$ mm Durchmesser in den Raum zwischen Loch und Platte, bei einem anderen Rohr befand sich an Stelle des Loches ein Schlitz von $^1/_2$ mm Breite und 5 mm Länge. Der Glühdraht stand quer vor dem Schlitz. Der Schlitz war gewählt worden, um die Elektronen nicht nur in einer Vorzugsrichtung wie beim Loche eintreten zu lassen. Es ist zu erwarten, daß bei nicht zu niedrigen Drucken, da ja nach wenigen Zusammenstößen schon alle Richtungen gleich wahrscheinlich sein werden, dasselbe beobachtet wird in beiden Fällen. Die Messungen zeigten in beiden Fällen vollständige Übereinstimmung. Der Aufbau des Apparates im Vakuumgefäß war derselbe wie bei dem oben beschriebenen Apparate.

Die Schaltung war folgende: zwischen dem Glühdraht und dem Loch bzw. Schlitz lag eine beschleunigende Spannung. Die Auffange-

platte war über ein Galvanometer geerdet. Das Feld zwischen Auffangeplatte und Loch wurde durch eine Batterie mit Spannungsteiler und Kommutator angelegt.

Bei beiden Versuchen waren die Zuführungen zu den Galvanometern über geerdete Aufhänger geführt. Um eine Beeinflussung der Galvanometerablesungen durch Kriechströme über die äußere Wand des Glasgefäßes zu vermeiden, waren zwischen den Einschmelzstellen der spannungführenden und der Galvanometerzuleitungen geerdete Schutzringe aus Stanniol auf der Glaswandung angebracht.

Alle Kupferteile des Apparates wurden vor dem Einsetzen in das Vakuumgefäß durch Abbrennen mit Salpetersäure sorgfältig gereinigt. Evakuiert wurde mit einer dreistufigen Diffusionsdampfstrahlpumpe aus Glas. Nach dem Evakuieren wurde das ganze Rohr in einem elektrischen Ofen während dauernden Pumpens 8 bis 10 Stunden lang auf etwa 400° erhitzt. Zwischen Pumpe und Apparatur befand sich ein U-Rohr, das während der Dauer der Versuche mit flüssiger Luft gekühlt wurde. Der Gasdruck in der Apparatur wurde mit einem Mac Leodschen Manometer gemessen.

IV. Messungen.

A. Im feldfreien Raume. Die Messungen im feldfreien Raume wurden folgendermaßen ausgeführt. Es waren sowohl die Platten A und B als auch K geerdet, A und B über Galvanometer von etwa 10^{-10} Amp. pro Skalenteil Empfindlichkeit. Vor Beginn der ersten Messungen wurde der Glühdraht stark geglüht, während dauernd gepumpt wurde, dann wurde die Pumpe abgestellt und das zu untersuchende Gas in die Apparatur hineingelassen. Die Messungen wurden bei Drucken von einigen zehntel bis zu einigen tausendstel Millimetern gemacht. Nach etwa 30 Minuten langem Glühen des Glühdrahtes war die Elektronenemission genügend konstant. Wie weiter oben erwähnt wurde, spielten langsame Änderungen der Emission keine Rolle Die beschleunigende Spannung zwischen Glühdraht und Loch wurde stufenweise geändert und die zu jeder Spannung gehörenden Elektronenströme an den Galvanometern abgelesen. Die Emission des Glühdrahtes wurde absichtlich um das 5- bis 10fache geändert, um eine eventuelle Abhängigkeit des Verhältnisses der auf die beiden Platten fließenden Ströme von der Emission des Glühdrahtes zu untersuchen. Dieses Verhältnis erwies sich als unabhängig von der Temperatur des Glühdrahtes. Bei diesen Stromstärken traten also Störungen durch Raumladungen nicht auf.

Es wurden Kurven gemessen in einem Gemisch von etwa 23 % He und 77 % Ne, in heliumfreiem Neon und in Argon. Das Ne-He-Gemisch war vorher durch Zirkulation über in flüssiger Luft gekühlte Kohle von seinen geringen Verunreinigungen durch Stickstoff, Sauerstoff und Kohlenwasserstoffe gereinigt worden. Das Argon ließ man stundenlang durch ein Entladungsrohr mit einer Magnesium- und einer Kupferelektrode zirkulieren. Hierdurch konnte es noch weitgehend von Verunreinigungen befreit werden*. Heliumfreies Neon war von der Philips' Glühlampenfabrik in Eindhoven freundlichst zur Verfügung gestellt worden.

Zunächst je ein Beispiel für Neon, Neon—Helium und für Argon. In Fig. 4 ist als Abszisse die Energie der Elektronen in Volt aufgetragen, als Ordinate die gemessenen $N/\overline{N}$-Werte, Bei Argon sieht man eine starke Abhängigkeit der $N/\overline{N}$-Werte von V. Da unser $N/\overline{N}$ proportional der freien Weglänge λ ist, zeigt der Verlauf der Kurve in Argon die große Änderung der freien Weglänge mit der Geschwindigkeit, wie sie von C. Ramsauer** und H. F. Mayer*** gefunden ist. Bei Ne–He ist λ nahezu konstant, es zeigt einen langsamen geringen Anstieg mit wachsendem V. Aus den Messungen von $N/\overline{N}$ wollen wir nun die mittlere freie Weglänge bestimmen. Bei der Frage nach dem Absolutwerte der mittleren Weglänge ist zunächst zu erörtern, wie weit unser Apparat wirklich $N/\overline{N}$ mißt. Hierzu müßte der Durchmesser des Loches in der Platte A klein sein gegen λ. Das ist nur bei den niedrigsten Drucken der Fall. Bei diesen ist dann aber die Bedingung $\lambda \ll a$ nicht mehr erfüllt, so daß es fraglich ist, ob die Diffusionsgleichungen noch anwendbar sind. Der Einfluß des zu großen Loches äußert sich darin, daß $\overline{N}$ zu klein gemessen wird, somit $N/\overline{N}$ und damit λ zu groß.

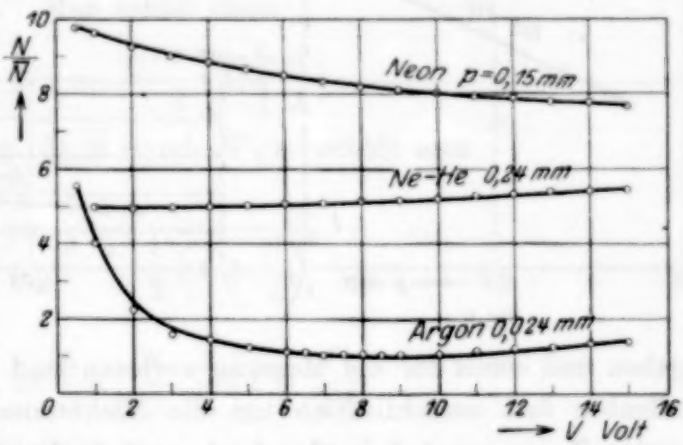


Fig. 4.

* Ne—He und Argon war von der Firma Lindes Eismaschinen, heliumfreies Neon von der Firma Philips' Glühlampenfabrik freundlichst zur Verfügung gestellt worden. Beiden Firmen sei an dieser Stelle bestens gedankt.

** C. Ramsauer, Ann. d. Phys. **64**, 513, 1921; **66**, 546, 1921; **72**, 345, 1923.

*** H. F. Mayer, ebenda **64**, 451, 1921.

In Fig. 5 sind für Ne—He und Argon die auf einen Druck von 1 mm umgerechneten Werte von λ_0, wie sie sich aus der Gleichung $\frac{N}{\overline{N}} = \frac{4}{3}\frac{\lambda}{a}$ aus den gemessenen Werten von $N/\overline{N}$ berechnen lassen, in ihrer Abhängigkeit vom Druck dargestellt. Daran erkennt man deutlich, daß der sich für λ_0 ergebende Wert nicht konstant ist, sondern mit wachsendem Druck zunimmt. Man kann leicht zeigen, daß die Abhängigkeit der λ-Werte vom Druck in der Tat durch die zu große Abmessung des Loches bedingt ist. Zu dem Zweck berechnen wir die Zahl derjenigen Elektronen, die, anstatt auf die Auffangeplatte, in das Innere des Loches

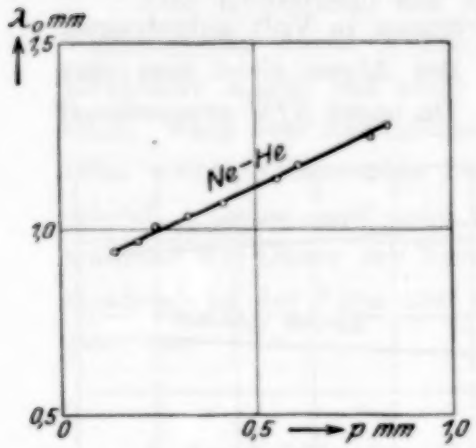


Fig. 5.

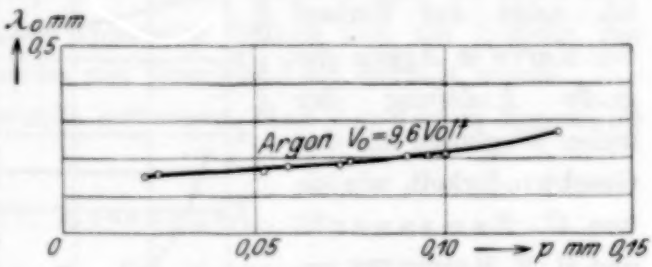


Fig. 5a.

gehen und somit für die Messung verloren sind. Hierbei handelt es sich offenbar fast ausschließlich um die Elektronen, die bereits bei ihrem ersten Zusammenstoß in das Loch zurückreflektiert werden. Die Elektronen treten geradlinig durch das Loch in der Platte A in den Raum zwischen den beiden Platten. Ohne einen erheblichen Fehler zu machen, kann man für die Rechnung annehmen, daß die Elektronen vor ihrem ersten Zusammenstoß sämtlich in der Achse des Rohres laufen. Die Zahl derjenigen Elektronen, welche nach einem Zusammenstoß in das Loch reflektiert werden, ergibt sich zu

$$\frac{1}{2\lambda}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\lambda}} \int_0^{\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}} \sin\alpha \, d\alpha \, dx.$$

r ist der Radius des Loches. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Elektron in das Loch zurückgeworfen wird, ist also

$$\frac{1}{2\lambda}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\lambda}} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}\right) dx.$$

Ist $N_0 = \overline{N} + N$, wo $\overline{N}$ die Gesamtzahl der zurückgehenden, N die Zahl der auf die zweite Platte gelangenden Elektronen und N_0 die Zahl der von der ersten Platte ausgehenden Elektronen, so ist die Zahl der verlorenen Elektronen

$$N_0 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{J}{\lambda}\right), \text{ wenn } J = \int_0^\infty \frac{x . e^{-\frac{x}{\lambda}}}{\sqrt{x^2 + r^2}}\, dx.$$

Dies Integral wurde für die verschiedenen λ-Werte graphisch ausgewertet. Die Zahl der auf der Platte A gemessenen Elektronen ist also

$$\overline{N'} = \overline{N} - N_0 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{J}{\lambda}\right).$$

In den meisten der betrachteten Fälle ist $N \ll \overline{N}$, so daß in erster Näherung $\overline{N} = N_0$ wird. Man erhält dann

$$\overline{N'} = \overline{N} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{J}{\lambda}\right).$$

Ersetzt man in Gleichung (3) $\overline{N}$ durch $\overline{N'}$, so erhält man

$$\frac{N}{\overline{N'}} = \frac{4}{3}\frac{\lambda}{a} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{J}{\lambda}\right)},$$

und für λ ergibt sich

$$\lambda = \frac{3}{4} a \cdot \frac{N}{\overline{N'}} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{J}{\lambda}\right).$$

Nach dieser Formel sind also die mittleren Weglängen durch sukzessive Approximation aus den gemessenen $N/\overline{N'}$-Werten zu berechnen. Berechnet man auf diese Weise λ und rechnet es auf den Druck von 1 mm um, so erhält man folgendes Bild für die Abhängigkeit der korrigierten λ_0-Werte vom Druck (Fig. 6).

Wie man sieht, stimmen nun beim Ne–He die aus den Drucken zwischen 0,15 und 0,8 mm aus den gemessenen $N/\overline{N}$-Werten berechneten λ_0-Werte innerhalb der Versuchsgenauigkeit überein. Bei höheren Drucken, wenn die freie Weglänge von der Größenordnung des Lochdurchmessers wird, haben die durch das 1 mm weite Loch austretenden Elektronen keine einheitliche Richtung mehr, es findet bereits Diffusion in dem Loche statt, die Voraussetzungen, unter denen unsere Korrektionsformel berechnet wurde, gelten also nicht mehr. Bei Argon liegt das Druckgebiet wegen der kleineren freien Weglänge niedriger, bei Drucken zwischen 0,024 und 0,1 mm. In Fig. 7 und 8 sind die $1/\lambda_0$-Werte von

Argon und Neon eingetragen und die von C. Ramsauer gemessenen Werte dazugezeichnet. Beim Neon liegen unsere Kurven um etwa 10 % tiefer als die Ramsauerschen. Bei Argon zeigt sich qualitativ derselbe Verlauf, doch liegt das Maximum bei unseren Messungen schon bei 9,6 Volt, während die Ramsauerschen Kurven das Maximum bei 13,2 Volt zeigen. Die Lage des Maximums ist aber bei allen von uns gemessenen Kurven dieselbe. Unsere Messungen zeigen in bezug auf die

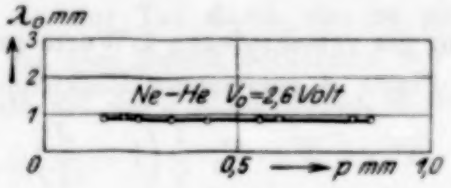


Fig. 6.

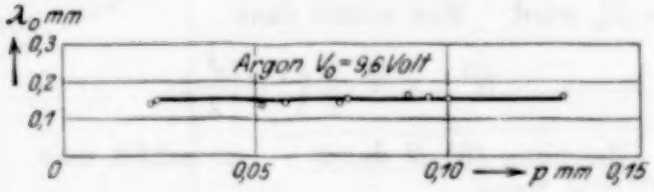


Fig. 6a.

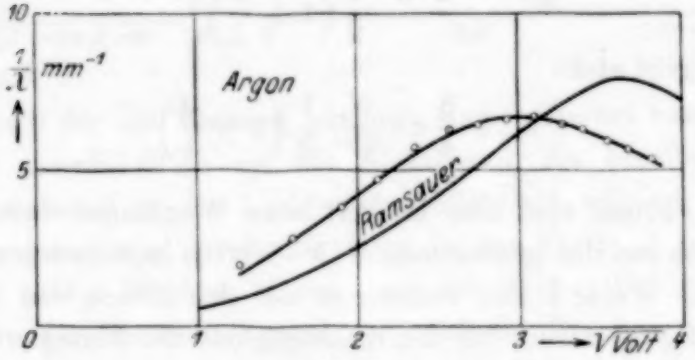


Fig. 7.

Lage des Maximums bessere Übereinstimmung mit den nach einer qualitativen Methode von G. Hertz* gemessenen Werten, der ein Maximum in Argon bei etwa 10 Volt findet.

Im Ne–He ist die freie Weglänge bei Geschwindigkeiten zwischen 2 und 15 Volt annähernd konstant, es zeigt sich ein langsamer Anstieg mit zunehmender Geschwindigkeit. Die freie Weglänge bei 15 Volt ist etwa 10 % größer als die bei 2 Volt. Fig. 9 zeigt den Verlauf von λ_0, gewonnen aus den $N/\overline{N}'$-Werten.

---

* G. Hertz, Proc. Amsterdam **25**, 90, 1922, Nr. 3 u. 4.

Es war weiter eine Reihe von Messungen ausgeführt worden, bei der der Abstand zwischen den Platten A und B variiert werden konnte. Die aus den bei verschiedenem Abstand gemessenen $N/\overline{N}$-Werten berechneten λ-Werte zeigten keine erkennbare Abhängigkeit vom Plattenabstand.

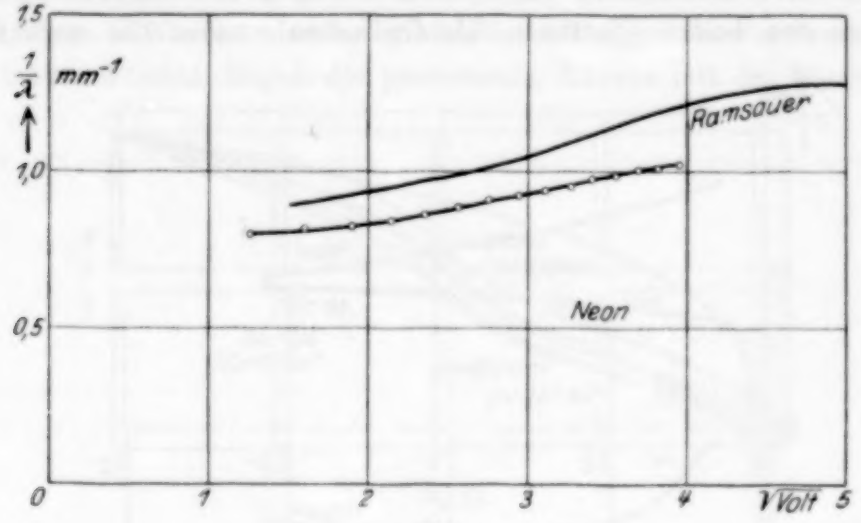


Fig. 8.

Der Plattenabstand konnte zwischen 7 und 20 mm variiert werden. In der Tabelle sind die λ-Werte verzeichnet, die sich aus den bei verschiedenem Plattenabstand gemessenen $N/\overline{N}$-Werten berechnen. Man erkennt, daß die Werte innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmen.

a mm	Ne—He 0,33 mm λ mm	Ne—He 0,61 mm λ mm	Argon 0,024 mm λ mm
7	—	—	6,67
8	3,12	2,06	—
10	3,03	—	—
12	—	2,10	6,83
14	—	2,07	6,62
16	3,01	2,04	—
19	3,09	—	—

B. Messungen im elektrischen Felde. Die Messungen im elektrischen Felde wurden so vorgenommen, daß bei dem zweiten beschriebenen Apparat (Fig. 3) bei konstanter beschleunigender Spannung zwischen Glühdraht und Ausgangsplatte das Feld zwischen Ausgangsplatte und Auffangeplatte variiert wurde. Die gemessenen Werte wurden auf gleiche Emission des Glühdrahtes dadurch reduziert, daß zwischen je zwei oder mehr Ablesungen der Strom gemessen wurde, der auf die Auffangeplatte kommt, wenn zwischen Ausgangs- und Auffangeplatte kein

Feld besteht. In den Kurven wurde als Abszisse $\frac{V_a - V_0}{V_0} = z$ aufgetragen, wo V_0 die Energie der Elektronen an der Ausgangsplatte, V_a ihre Energie an der Auffangeplatte bedeutet. Negative Werte von z bedeuten also beschleunigende, positive dagegen verzögernde Felder zwischen den beiden Platten. Als Ordinaten wurden die zugehörigen

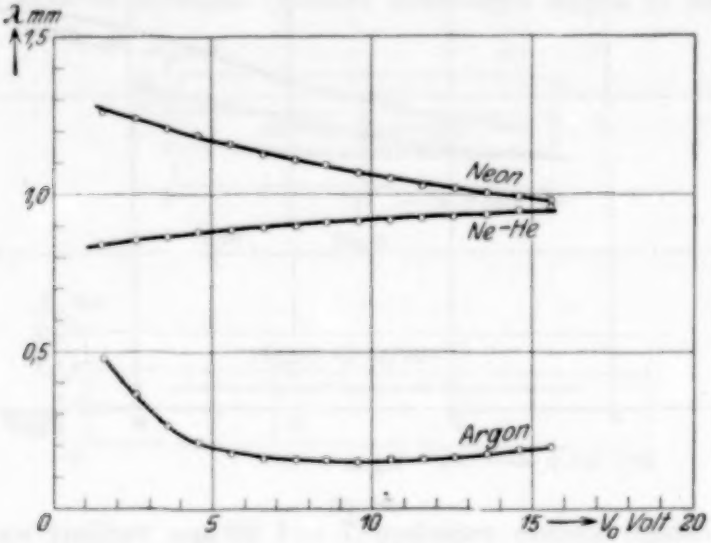


Fig. 9.

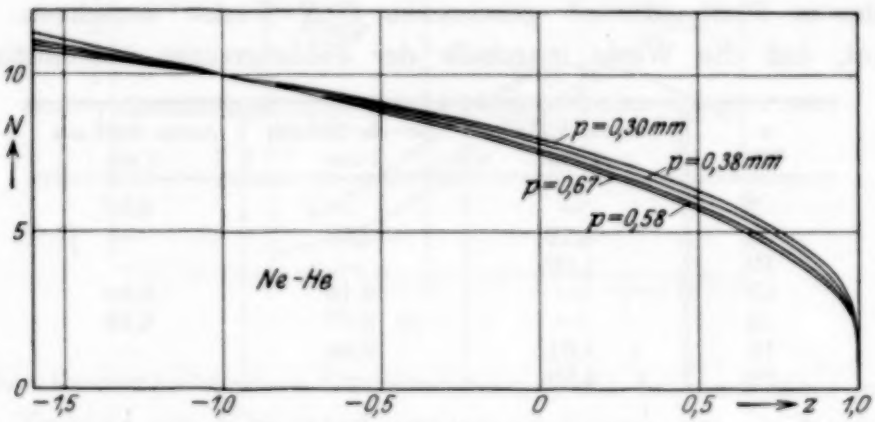


Fig. 10.

gemessenen N-Werte aufgetragen. Die Kurven waren so gezeichnet, daß sie für $z = -1$ durch den Punkt $+10$ gingen (Fig. 10). Die Figur zeigt die theoretischen Kurven bei verschiedenen Drucken. Man erkennt, daß die für kleinere Drucke berechneten Kurven im Gebiet von $z = -1{,}5$ bis $z = +0{,}9$ einen langsameren Abfall zeigen als die Kurven für höhere Drucke. Von $z = 0{,}9$ bis $z = 1$ ist der Abfall der Kurven für niedrige Drucke steiler als der für Kurven mit höherem

Druck. Fig. 11 zeigt die in Ne–He gemessenen Kurven für $V_0 = 12$ Volt, bei verschiedenen Drucken zwischen 0,19 und 0,83 mm. Die bei kleineren Drucken gemessenen Kurven zeigen auch hier von $z = -1$ bis $z = 0{,}9$ einen langsameren Abfall als die bei höheren Drucken gemessenen. Die stark gezeichnete Kurve ist die theoretische für den Druck von 0,38 mm. Bei kleinen z-Werten, also bei großen beschleunigenden Feldern zwischen den beiden Platten, liegen die gemessenen Kurven mit der theoretischen

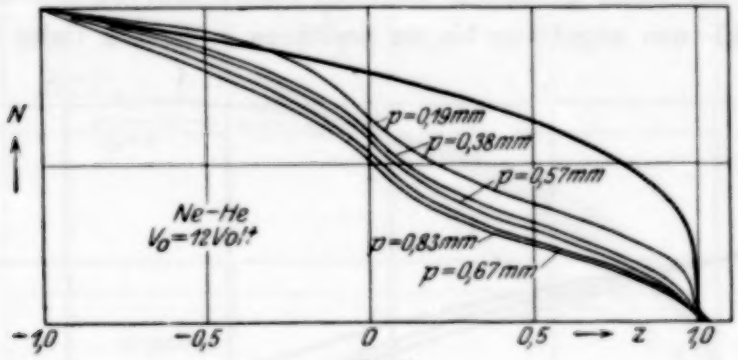


Fig. 11.

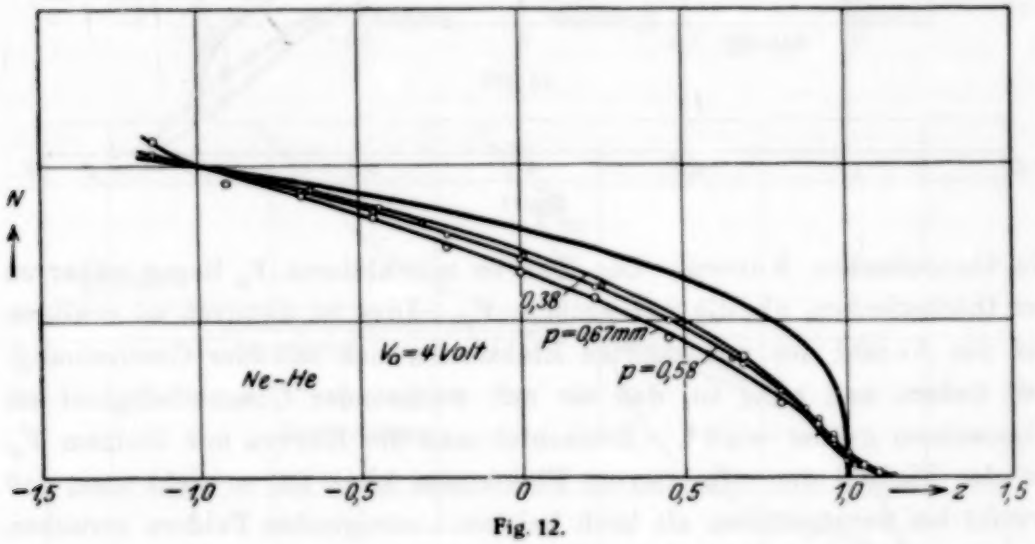


Fig. 12.

nahe zusammen. Dann zeigen die gemessenen Kurven einen stärkeren Abfall und verlaufen unterhalb der theoretischen Kurve. Fig. 12 und 13 zeigen Kurven mit $V_0 = 4$ Volt und $V_0 = 2$ Volt. Man sieht, daß diese Kurven besser mit den theoretischen übereinstimmen, als die Kurven mit $V_0 = 12$ Volt. Die Abweichungen von der theoretischen Kurve beginnen bei kleinen negativen z-Werten, also kleinen beschleunigenden Spannungen zwischen den Platten. Die Abweichungen werden dann mit größer werdendem z, größer und zwar sind die Abweichungen der Kurven

mit kleinem V_0 kleiner als die der Kurven mit großem V_0. Diese Abweichungen haben wir als Einfluß der an der Auffangeplatte reflektierten Elektronen zu deuten. Bei negativen z-Werten, wo wir zwischen Loch und Platte beschleunigende Felder haben, werden die an der Auffangeplatte reflektierten Elektronen zurückgehalten. Geht z zu kleinen negativen und schließlich zu positiven Werten, so wird die Anzahl der durch Reflexion verlorenen Elektronen immer größer, unsere N-Werte werden also zu klein gemessen werden, unsere Kurven müssen in dem Gebiet von kleinen negativen bis zu positiven z-Werten tiefer liegen als

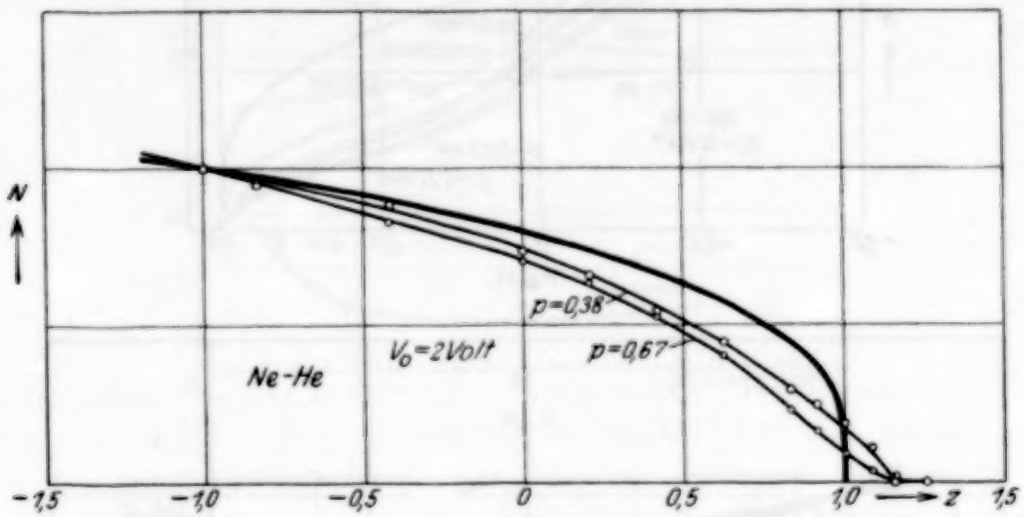


Fig. 13.

die theoretischen Kurven. Die Kurven mit kleinem V_0 liegen näher an der theoretischen, als die mit großem V_0. Dies ist dadurch zu erklären daß die Anzahl der reflektierten Elektronen sich mit der Geschwindigkeit ändert, und zwar so, daß sie mit wachsender Geschwindigkeit im allgemeinen größer wird *. Betrachtet man die Kurven mit kleinem V_0, wo der Einfluß der reflektierten Elektronen klein ist, so sieht man, daß sowohl bei verzögernden als auch bei beschleunigenden Feldern zwischen Loch und Platte der Verlauf der Kurven durch die Theorie richtig wiedergegeben wird.

Bei den in Argon gemessenen Kurven zeigt sich deutlich die Abhängigkeit der freien Weglänge von der Geschwindigkeit. In Fig. 14 und 15 sind Kurven dargestellt, die bei verschiedenen Drucken die Ab-

* Man vergleiche den Artikel von P. Lenard und A. Becker über Kathodenstrahlen im Handbuch der Experimentalphysik (Leipzig, Akad. Verlagsges., 1927) **14**, 342 ff. und 387 ff.

hängigkeit der gemessenen N-Werte von V_0 und von z zeigen. Die Kurven sind so gezeichnet, daß sie für $z = 0$ durch denselben Punkt gehen. Hier wurde $z = 0$ gewählt, weil bei Argon die Kurven mit großem V_0 bei $z < 0$ infolge der Abhängigkeit der freien Weglänge

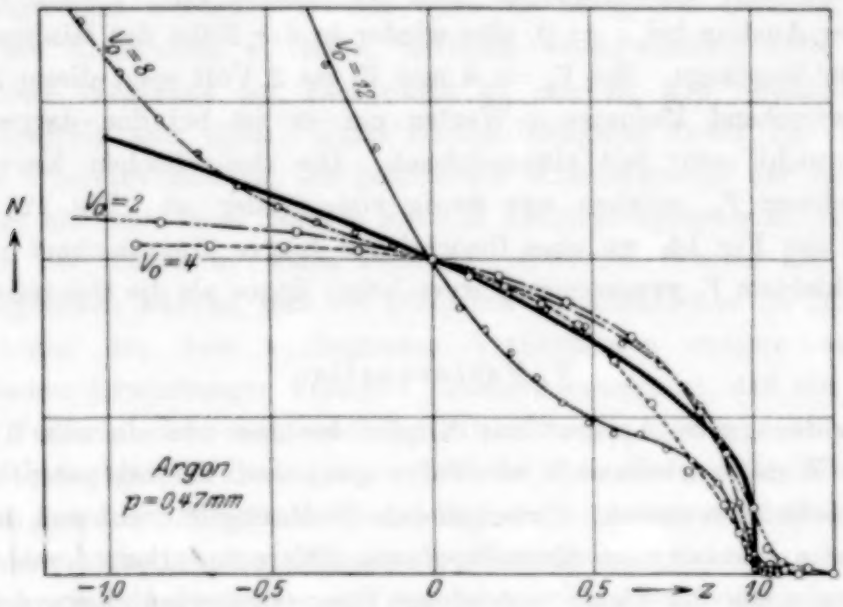


Fig. 14.

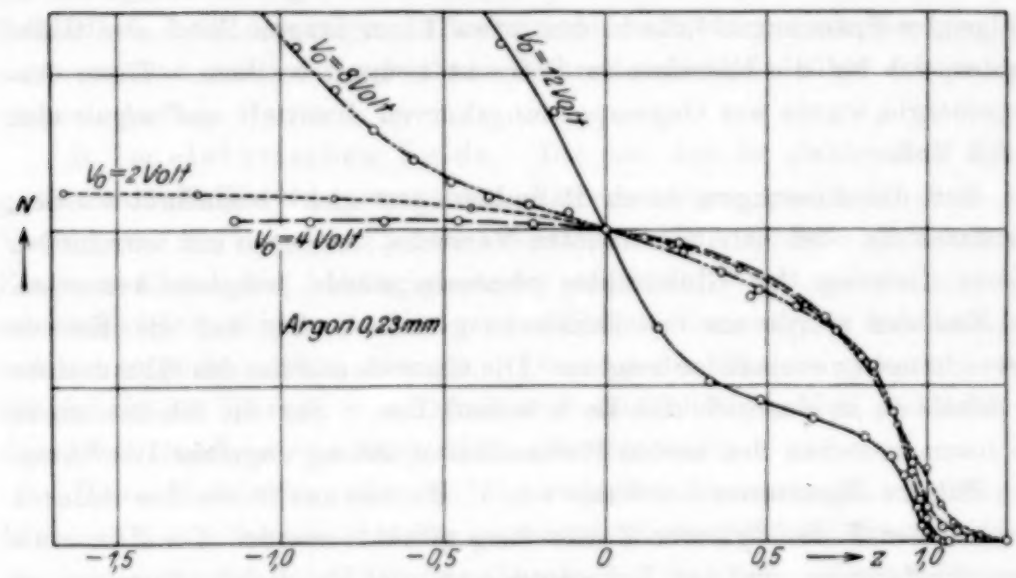


Fig. 15.

von der Geschwindigkeit einen starken Anstieg zeigen. Verfolgt man die Kurven von positiven zu negativen z-Werten, so zeigen die Kurven mit $V_0 = 12$ Volt bei $z = 0{,}5$ einen steilen Anstieg. Bei $z = 0{,}5$ ist $V_a = 6$ Volt, die mittlere Energie der Elektronen zwischen den

beiden Platten ist also 9 Volt, die mittlere Weglänge hat hier ihr Minimum. Bei kleiner werdendem z wird die Energie der Elektronen größer, die mittlere Weglänge also auch. Da unsere gemessenen N-Werte Funktion von λ sind, müssen sie von $z = 0{,}5$ ab auch größer werden, wie es die Kurven auch zeigen. Bei den Kurven mit $V_0 = 8$ Volt beginnt der Anstieg bei $z = 0$, also wieder in der Nähe des Minimums der mittleren Weglänge. Bei $V_0 = 4$ und $V_0 = 2$ Volt setzt dieser Anstieg bei entsprechend kleineren z-Werten ein, er ist bei den dargestellten Kurven nicht mehr mit eingezeichnet. Die theoretischen Kurven mit verschiedenen V_0 weichen nur wenig voneinander ab (Fig. 12). Man erkennt aus Fig. 14, wo eine theoretische Kurve eingezeichnet ist, daß die mit kleinem V_0 gemessenen Kurven höher liegen als die theoretischen *.

V. Fehlerquellen.

Da der ganze Apparat aus Kupfer bestand und da alle Teile in gleicher Weise vorbehandelt worden waren, sind Kontaktpotentialdifferenzen nicht zu erwarten. Zwischen dem Wolframglühdraht und der Ausgangsplatte bestand eine Kontaktpotentialdifferenz. Dazu kommt noch die Energie, die die Elektronen infolge ihrer Geschwindigkeitsverteilung beim Verlassen des Glühdrahtes haben und die Energieverteilung, die sie infolge des Spannungsabfalls in dem etwa 1 mm langen Stück des Glühdrahtes, das für die Emission in Betracht kommt, besitzen. Diese Anfangsenergie wurde aus Gegenspannungskurven ermittelt und ergab sich zu 0,6 Volt.

Daß die Messungen durch Raumladungen nicht beeinflußt wurden, war durch die oben bereits erwähnten Versuche, bei denen mit verschieden starker Emission des Glühdrahtes gemessen wurde, festgestellt worden. Die Emission wurde um das Zehnfache geändert, ohne daß die Kurven Abweichungen voneinander zeigten. Die Gesamtemission des Glühdrahtes zur Platte Z, in der sich das Loch befand, durch das die Elektronen in den Raum zwischen den beiden Platten traten, betrug ungefähr 10^{-5} Amp.

Falsche Elektronen im Sinne von C. Ramsauer** wurden dadurch vermieden, daß der Zylinder Z sehr lang gewählt wurde. Da Z in etwa 1 mm Entfernung von der Rohrwand war, und da die Zuführungen zu den Platten in Glasrohren lagen, waren Störungen durch falsche Elektronen ausgeschlossen.

---

* G. Hertz und R. K. Kloppers, Phys. ZS. **26**, 868, 1922.

** C. Ramsauer, Ann. d. Phys. **64**, 513, 1921.

VI. Diskussion der Resultate.

A. Feldfrei. Infolge der Notwendigkeit der Korrektion für die in das Loch zurückreflektierten Elektronen kann das hier beschriebene Meßverfahren nicht als Methode zur genauen Messung der mittleren Weglänge angesehen werden. Hierzu wäre es nötig, die Öffnung, durch welche die Elektronen eintreten, wirklich verschwindend klein gegen die mittlere Weglänge der Elektronen zu machen, was technisch aber recht schwierig sein wird. Unter Berücksichtigung dieser Unsicherheit kann die Übereinstimmung des gefundenen Absolutwertes der mittleren Weglänge als auch ihres Ganges mit der Elektronengeschwindigkeit mit den nach der Ramsauerschen Methode gefundenen Werten als Beweis dafür angesehen werden, daß die Diffusion der Elektronen im feldfreien Raum unter den hier vorliegenden Verhältnissen entsprechend den theoretischen Erwartungen erfolgte. Bemerkenswert ist, daß die theoretischen Formeln sich auch noch bei Drucken als gültig erweisen, bei denen keineswegs die Bedingung erfüllt ist, daß die mittlere Weglänge klein ist gegen den Plattenabstand. Hieraus wird man schließen dürfen, daß die Geschwindigkeitsrichtungen der Elektronen, welche parallel durch das Loch eintreten, schon nach den ersten Zusammenstößen praktisch gleichmäßig über alle Richtungen verteilt sind, daß man also bei der Behandlung von derartigen Diffusionsproblemen schon nach wenigen Zusammenstößen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit aller Richtungen rechnen darf.

B. Im elektrischen Felde. Die aus den im elektrischen Felde gemessenen N-Werten gewonnenen Kurven zeigen qualitativ denselben Verlauf, wie er von der Theorie erwartet wurde. Einflüsse reflektierter Elektronen und die Abhängigkeit der mittleren Weglänge von der Geschwindigkeit verhinderten eine genaue Übereinstimmung der theoretischen mit den experimentellen Kurven. Die von der Theorie geforderte Abhängigkeit der Kurven vom Druck war deutlich bemerkbar, und zwar in demselben Sinne, wie es theoretisch erwartet wurde.

Diese Messungen, die die theoretischen Erwartungen bestätigen, können also als Argument dafür angesehen werden, daß die Vorstellungen, die man sich nach der Diffusionstheorie von den Bewegungen langsamer Elektronen in Gasen zu machen hat, richtig sind.

VII. Zusammenfassung.

Aus den theoretischen Überlegungen über die Bewegungen langsamer Elektronen unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes hat

G. Hertz gefolgert, daß diese Bewegungen stets als Diffusionsvorgang aufzufassen sind. Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, durch Versuche über Elektronendiffusion in Edelgasen diese Theorie zu prüfen und zu untersuchen, wie weit die ihr zugrunde gelegten Annahmen über den Verlauf der Zusammenstöße zwischen Elektronen und Atomen der Wirklichkeit entsprechen. Zu diesem Zwecke sind zwei Reihen von Versuchen gemacht worden.

Die erste Versuchsreihe behandelt die Diffusion von Elektronen in Edelgasen in dem feldfreien Raume zwischen zwei auf gleichem Potential befindlichen Platten. Die Elektronen gehen dabei von einem Punkte der einen Platte aus und es wird das Verhältnis der Zahl der auf die andere Platte gelangenden Elektronen zu der Zahl der durch Rückdiffusion auf die Ausgangsplatte zurückgelangenden Elektronen gemessen. Wie durch theoretische Überlegungen gezeigt wird, sollte nach der Diffusionstheorie dieses Verhältnis gleich $\frac{4}{3}\frac{\lambda}{a}$ sein, wenn a den Abstand der Platten und λ die mittlere Weglänge der Elektronen bedeutet. Als experimentelle Schwierigkeit ergab sich dabei die Unmöglichkeit, die Elektronenquelle genügend klein gegen die mittlere Weglänge zu machen, doch konnte der sich hierdurch ergebende Fehler durch eine Korrektur ausgeglichen werden. Auf diese Weise war es möglich, aus den Meßergebnissen die mittlere Weglänge der Elektronen zu bestimmen. Sie ergab sich für die untersuchten Gase, Neon, Argon und ein Ne-He-Gemisch, innerhalb der hauptsächlich durch die Unsicherheit der erwähnten Korrektion bedingten Fehlergrenze in Übereinstimmung mit den nach direkten Methoden gewonnenen Werten. Insbesondere trat die von Ramsauer gefundene starke Abhängigkeit der mittleren Weglänge in Argon von der Elektronengeschwindigkeit außerordentlich deutlich hervor.

Die zweite Versuchsreihe behandelt die Diffusion im elektrischen Felde. Hier wurde die Zahl der auf die zweite Platte gelangenden Elektronen in ihrer Abhängigkeit von einer verzögernden oder beschleunigenden Spannung zwischen den beiden Platten gemessen und mit den sich aus der Theorie für diesen Fall ergebenden Formeln verglichen. Auch hier zeigte sich im Charakter der Kurven eine weitgehende Übereinstimmung mit der Theorie. Die sich ergebenden Abweichungen, insbesondere bei größeren Elektronengeschwindigkeiten, ließen sich durch die nicht zu vermeidende Elektronenreflexion an der Auffangeplatte erklären. In Argon ergaben sich Abweichungen gerade von solcher Art,

wie sie nach der Diffusionstheorie infolge der Veränderlichkeit der mittleren Weglänge mit der Elektronengeschwindigkeit zu erwarten sind. Als Ergebnis kann somit ausgesprochen werden, daß die Diffusionstheorie die Bewegung von langsamen Elektronen in Edelgasen jedenfalls innerhalb der bis jetzt erreichbaren Meßgenauigkeit richtig darstellt.

Meinem sehr verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. G. Hertz, möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aussprechen für die Anregung zu dieser Arbeit und die freundliche Unterstützung, die er mir bei ihrer Durchführung dauernd zuteil werden ließ.

Über die Lichtzerstreuung in Wasser.

Von **G. I. Pokrowski** in Moskau.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 30. Oktober 1928.)

In dieser Mitteilung wird der Ramaneffekt in Wasser beschrieben, welcher die Besonderheit hat, daß keine schmalen Linien, sondern diffuse Banden im Spektrum der Sekundärstrahlung zu beobachten sind. Die Frequenzen, die den Maximis dieser Banden und den erregenden Linien entsprechen, bilden Differenzen, welche einer Absorptionsbande mit der Wellenlänge von 3,04 μ und der Halbwertsbreite von 0,54 μ zuzuschreiben sind. Das stimmt mit dem Absorptionsspektrum des Wassers überein.

Seit einiger Zeit habe ich mit Hilfe eines Quarzspektrographen die Lichtzerstreuung in fein dispersen Kolloiden im Ultraviolett studiert. Dabei ergab sich, daß im Spektrum des gestreuten Lichtes gewisse Banden vorhanden waren, welche im Spektrum des einfallenden Lichtes (Quecksilberquarzlampe) fehlten. Die eingehendere Erforschung der Frage zeigte, daß dieselbe Erscheinung auch im destillierten Wasser unverändert zum Vorschein trat.

In Fällen, wenn das Licht mit Wellenlängen kleiner als etwa 0,32 μ durch ein dickes Glas abgeblendet wurde, blieben die Banden bis etwa 0,37 μ unverändert. Das zeigte, daß hier keine Fluoreszenzerscheinung vorhanden war. Somit mußte man hier einen Ramaneffekt* vermuten. Bei einem solchen Effekt entspricht, wie bekannt, die Frequenzdifferenz der erregenden Primär- und der Sekundärlinien einer Frequenz gewisser Absorptionsbanden im ultraroten Teile des Spektrums. Ist dabei λ_0 die Wellenlänge des Lichtes der Primärlinie, λ die Wellenlänge der Sekundärbande und λ_1 die Wellenlänge der Absorptionsbande im Ultrarot, so ergibt eine einfache Rechnung, daß

$$\lambda_1 = \frac{\lambda \lambda_0}{\lambda_0 - \lambda}$$

ist.

Ist im Ultraroten eine mehr oder weniger diffuse Bande vorhanden, so muß man erwarten, daß auch die Sekundärbanden diffus sind. Man

---

* Vgl. C. V. Raman, Ind. Journ. Phys. **2**, III, I, 1928. Gr. Landsberg und L. Mandelstam, ZS. f. Phys. **50**, 769, 1928. A. Carrelli, P. Pringsheim und B. Rosen, ebenda **51**, 511, 1928.

kann auch nach den Halbwertgrenzen der Sekundärbanden die entsprechenden Halbwertgrenzen der ultraroten Bande berechnen.

In Fig. 1 sind die Photographien des Primär- und Sekundärspektrums für einen Ablenkungswinkel von 90 Grad gegeben.

In der Tabelle 1 sind die entsprechenden Zahlen zusammengestellt, welche als Mittelwerte nach den Ausmessungen mehrerer Photographien erhalten wurden. Die berechneten Werte von λ_1', λ_1 und λ_1'' sind mit den

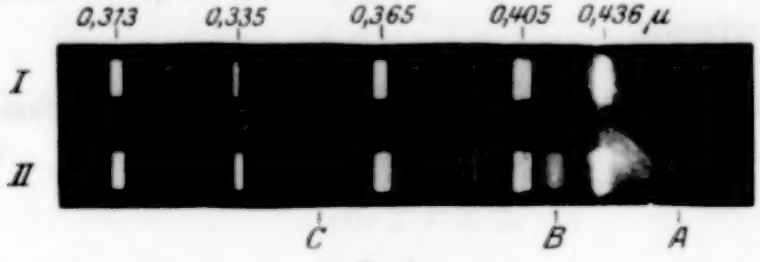


Fig. 1.
I. Primärspektrum. II. Sekundärspektrum.

Messungsergebnissen von Aschkinass* zusammengestellt. Wie ersichtlich, ist die Übereinstimmung ausgezeichnet, obwohl die Halbwertgrenzen nur bei den drei stärksten Banden gemessen werden konnten. Daraus kann man also den Schluß ziehen, daß die Intensitätsverteilung in den Sekundärbanden quantitativ der Verteilung der Absorption im Ultrarot entspricht.

Tabelle 1.

Primärlinien	Bezeichnung in Fig. 1	Sekundärbanden			Ultrarotbande		
		Untere Halbwertgrenze	Maximum	Obere Halbwertgrenze	Untere Halbwertgrenze	Maximum	Obere Halbwertgrenze
λ_0		λ'	λ	λ''	λ_1'	λ_1	λ_1''
0,297 μ		—	0,327	—	—	3,06	—
0,303		—	0,337	—	—	3,01	—
0,313	C	0,352	0,349	0,345	2,82	3,04	3,37
0,335		—	0,376	—	—	3,07	—
0,365	B	0,420	0,415	0,410	2,79	3,03	3,33
0,390		—	0,447	—	—	3,06	—
0,405	A	0,473	0,468	0,460	2,82	3,01	3,38
Mittelwerte					2,81 μ	3,04 μ	3,36 μ
Nach Messungen von Aschkinass					2,82 μ	3,04 μ	3,35 μ

* E. Aschkinass, Wied. Ann. **55**, 401, 1895.

Photographien des Sekundärspektrums, welche mit einem Polarisator vor dem Kollimatorspalt des Spektrographen ausgeführt worden sind, zeigen eine große Schwächung der Banden in dem Falle, daß der elektrische Vektor des gestreuten Lichtes in der Einfallsebene liegt. Das deutet auf eine intensive Polarisation des Lichtes, wie es in ähnlichen Fällen auch zu erwarten wäre.

Zum Schluß spreche ich meinen besten Dank Herrn Prof. N. E. Uspenski aus für sein freundliches Entgegenkommen und die Unterstützung dieser Experimente.

Moskau, Physikalisch. Institut d. Techn. Hochschule, Oktober 1928.

Zum Davisson-Germereffekt.

Von **K. Schaposchnikow** in Iwanowo-Wosnessensk.

(Eingegangen am 15. Oktober 1928.)

Es wird eine Erklärung des Davisson-Germereffekts auf Grund der mechanischen Lichtquantentheorie gegeben.

Die bekannten Versuche von Davisson und Germer bestätigen die de Broglieschе Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

nicht vollkommen. Andere Verfasser* zeigen, daß hier die allgemeinere Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{mv}\sqrt{\frac{V}{V+E}} \tag{1}$$

gilt, wo V ein beschleunigendes Potential, E das Gitterpotential bedeuten. Die Gleichung (1) wird auf Grund der de Broglie-Schrödingerschen Theorie abgeleitet, und zwar ist

$$n = \sqrt{\frac{V+E}{V}}$$

ein Brechungsindex eines Kristalls.

Im folgenden will ich zeigen, daß die Relation (1) ganz einfach aus der mechanischen Lichtquantentheorie folgt. Besonders ist zu bemerken, daß damit kein Gebrauch von der de Broglieschen Phasenwelle gemacht wird.

Wir nehmen an, daß in den erwähnten Versuchen eine eigenartige Erscheinung zustande kommt, die wie folgt beschrieben werden kann: Elektronen verlieren bei Zusammenstößen mit Atomen ihre Impulse, und dadurch werden Lichtquanten emittiert. Von dieser Strahlung interessiert uns nur eine solche, die sich in der ursprünglichen Richtung der Elektronen ausbreitet. Die so emittierte Lichtwelle erleidet im Kristall eine Beugung und erzeugt Photoelektronen, die sich wieder in der Richtung des gebeugten Strahles bewegen. Offenbar erhalten wir dadurch eine qualitative Erklärung der Versuche.

Nach dem Impulserhaltungssatz haben wir

$$mv_1 = \frac{h\nu}{c_1}, \tag{2}$$

* H. Bethe, Naturwiss. **16**, 333, 1928, Nr. 19; E. Rupp, Ann. d. Phys. **85**, 981, 1928.

wo v_1 und c_1 bzw. die Elektronen- und die Lichtgeschwindigkeit im Kristall bedeuten. Ich will hier darauf hinweisen, daß der Ausdruck $h\nu/c_1$ des Impulses eines Lichtquants, der übrigens auch von anderen Verfassern* intuitiv eingeführt wird, für die mechanische Lichtquantentheorie eigentümlich** ist.

Nun haben wir offenbar:

$$\frac{mv^2}{2} = eV,$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = e(V+E).$$

Dazu kommt noch die Impulsgleichung vom Typus (2):

$$mv = \frac{h\nu}{c},$$

die für den Fall der verschwindend kleinen Werte von E gilt. Die Gleichung (2) und die drei letzten Gleichungen lösen die Aufgabe vollständig. Wir haben nämlich

$$\frac{v_1}{v} = \frac{c}{c_1} = n = \sqrt{\frac{V+E}{V}}$$

und

$$mv\sqrt{\frac{V+E}{V}} = \frac{h}{\lambda},$$

wo $\lambda = c_1/\nu$ die Wellenlänge im Kristall bedeutet.

Es ist also nicht notwendig, die de Broglie sche Phasenwelle zur Erklärung des genannten Effekts heranzuziehen, und das um so mehr, weil uns eigentlich kein Versuch die enorm große Geschwindigkeit dieser Welle beweist.

Iwanowo-Wosnessensk, Polytechnisches Institut, Oktober 1928.

---

* L. S. Ornstein und H. C. Burger, ZS. f. Phys. **30**, 253, 1924; L. de Broglie, Ondes et mouvements, 1926, S. 90; L. Flamm, Naturwiss. **15**, Nr. 28, 1927. Die zwei letztgenannten Verfasser haben gezeigt, daß die Lichtbrechung durch die Änderung des Impulses (von $h\nu/c$ in $h\nu/c_1$) erklärt wird und daß $\frac{c}{c_1} = n$ gleich dem Brechungsindex ist. Diese letzte Bemerkung werden wir weiter im Text gebrauchen.

** K. Schaposchnikow, Bull. de l'inst. polytechn. à Ivanovo-Vosniesensk **11**, 15, 1928.

Über den Einfluß des Wasserstoffs auf die lichtelektrische Elektronenemission des Kaliums.

Von **Rud. Suhrmann** und **Hans Theissing** in Breslau.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Oktober 1928.)

Läßt man die Oberfläche kompakten Kaliums sechs Stunden lang unter Wasserstoff von Atmosphärendruck stehen, der vorher einer gründlichen Reinigung unterzogen wurde, so ändert sich die lichtelektrische Empfindlichkeit nicht. Auch innige Berührung zwischen Kalium und Wasserstoff an einer Platinmohroberfläche, auf der sich das Kalium in monoatomarer Schicht befindet, ruft keine Empfindlichkeitserhöhung hervor. Das an Kalium beobachtete spektrale selektive Maximum ist also wohl nicht auf die Einwirkung molekularen Wasserstoffs zurückzuführen. Nach Versuchen des einen der Verfasser (Phys. ZS. im Druck) wird es dadurch hervorgerufen, daß positive Wasserstoffionen an der Metalloberfläche absorbiert werden und hierbei eine Art chemische Verbindung mit den zugehörigen Kaliumatomen eingehen.

Auf Grund der in den letzten Jahren erschienenen Arbeiten*, die den Einfluß von Gasen auf die lichtelektrische Elektronenemission des Kaliums zum Gegenstand haben, hat sich die Ansicht herausgebildet**, daß die spektrale Selektivität des Kaliums dadurch hervorgerufen wird, daß Kaliumatome in eine Gasschicht (oder bei den hydrierten Zellen in Kaliumhydrid***) eingebettet sind und infolgedessen auf ankommende Lichtwellen besser ansprechen können, als wenn sie durch benachbarte Metallatome hierin gestört werden. Je nach der Art des aufgebrachten Gases ist die Lage des selektiven Maximums verschieden; während Sauerstoff nach Pohl und Pringsheim**** ein Maximum bei 400 mμ, nach Wiedmann† und Fleischer†† bei 313 mμ hervorruft, wird das bei 440 mμ auftretende Maximum dem Einwirken von Wasserstoff zugeschrieben. Wiedmann erhielt es, wenn er feuchten Wasserstoff auf die Kaliumoberfläche einwirken ließ, Fleischer, entweder indem er entgastes Kalium mit Wasserstoff von 1 mm Quecksilbersäule über Nacht stehen ließ, oder indem er einen in der Kaliumzelle

* G. Wiedmann, Verh. d. D. Phys. Ges. **17**, 343, 1915; **18**, 333, 1916; B. Gudden u. R. Pohl, ZS. f. Phys. **34**, 245, 1925; R. Fleischer u. H. Dember, ZS. f. techn. Phys. **7**, 133, 1926; R. Fleischer, Ann. d. Phys. **82**, 75, 1927.

** Vgl. z. B. R. Pohl, Naturwiss. **14**, 217, 1926, und B. Gudden in Geiger-Scheel, Handb. d. Phys. Bd. XIII, S. 124.

*** R. Pohl u. P. Pringsheim, Verh. d. D. Phys. Ges. **13**, 219, 1911.

**** Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 625, 1913.

† Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **19**, 135, 1922.

†† Ann. d. Phys. **82**, 243, 1927.

vorhandenen mit Wasserstoff beladenen Platindraht elektrisch glühte.

Im Gegensatz hierzu konnte Richardson* dadurch, daß er Kalium mit Wasserstoff in Berührung brachte, keine Änderung der lichtelektrischen Empfindlichkeit des Metalles erzielen. Es erschien daher wünschenswert, den Einfluß des Wasserstoffs auf das Kalium nochmals zu untersuchen und dabei den verwendeten Wasserstoff vor der Einwirkung auf das Metall einer gründlichen Reinigung zu unterziehen, da zu vermuten war, daß bei Wiedmann und Fleischer geringe Verunreinigungen des Wasserstoffs eine entscheidende Rolle gespielt haben konnten.

Die Versuche wurden in der Weise vorgenommen, daß zunächst Kalium in eine an der Hochvakuumapparatur befindliche Zelle destilliert und die Empfindlichkeitskurve (in Abhängigkeit von der Wellenlänge) aufgenommen wurde. Darauf ließ man die Kaliumoberfläche sechs Stunden lang mit sorgfältig gereinigtem Wasserstoff von Atmosphärendruck stehen, evakuierte und nahm wiederum die Empfindlichkeitskurve auf. Dann brachte man Wasserstoff von einigen Zehntelmillimetern Druck in die Zelle, schickte eine Glimmentladung hindurch (Kalium als Kathode) und ermittelte die Empfindlichkeitskurve nochmals.

Da der erste Versuch, bei dem man molekularen Wasserstoff auf die kompakte Kaliumoberfläche wirken ließ, negativ ausfiel, wurde das Kalium in einem zweiten Versuch dadurch in engste Berührung mit dem Wasserstoff gebracht, daß man es in „monoatomarer“** Schicht auf eine Platinmohroberfläche aufdestillierte und darauf mit Wasserstoff belud. Nun mußte die große Oberfläche des Platinmohrs, sowie sein beträchtliches Adsorptionsvermögen für Wasserstoff einen guten Kontakt zwischen Kalium und Wasserstoff gewährleisten. Schließlich schickte man noch eine Glimmentladung durch die zweite Zelle hindurch. Nach jeder Operation wurde eine Empfindlichkeitskurve aufgenommen.

Apparatur. Das Licht einer Quarzquecksilberlampe wurde zunächst zweimal in einem Quarzdoppelmonochromator von C. Leiss, Berlin-Steglitz, spektral zerlegt und fiel dann entweder auf eine vor dem Austrittsspalt befindliche Thermosäule von C. Zeiss, oder, wenn

---

* Proc. Roy. Soc. (A) **107**, 387, 1925.

** Der Begriff „monoatomar“ ist nicht so zu verstehen, daß die Unterlage mit einer zusammenhängenden einatomigen Schicht von Kaliumatomen bedeckt ist, sondern daß einzelne Kaliumatome oder auch stellenweise vielleicht Anhäufungen von solchen auf der Platinmohroberfläche verteilt sind.

diese zur Seite geschoben war, durch eine Quarzlinse hindurch in die lichtelektrische Zelle. Vor dem Eintrittsspalt befand sich ein photographischer Lichtverschluß.

Die Thermosäule stand mit einem Paschengalvanometer von 2 bis $3 \cdot 10^{-10}$ Amp./Skt. Empfindlichkeit in Verbindung; sie wurde mit einer Hefnerkerze auf cal geeicht. Die Kathode der Zelle war mit einem Quadrantelektrometer nach Dolezalek verbunden, dessen Empfindlichkeit durch Veränderung des Nadelpotentials von 60 bis 900 Skt./Volt variiert werden konnte. Das ganze System hatte eine Kapazität von 35 bis 70 cm, je nach Höhe des Nadelpotentials; das Anodenpotential betrug 150 Volt.

Die für die Versuche verwendete Zelle bestand aus einer Glaskugel von etwa 6 cm Radius, an die ein Lichttubus von 8 cm Länge mit auf-

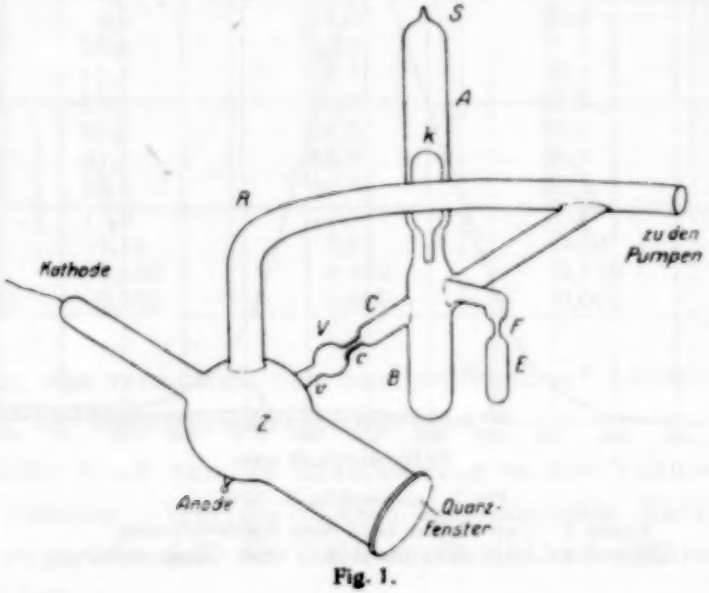


Fig. 1.

gekittetem Quarzfenster angesetzt war. Dem Tubus gegenüber war die aus einer kreisrunden Silberplatte bestehende Kathode unter Vermittelung eines Quarzschliffes isoliert eingeführt. Glaskugel und Lichttubus wurden innen versilbert und die Versilberung mit einem eingeschmolzenen Platindraht in Verbindung gebracht, der als Anodenzuführung diente. An die Zelle Z waren, wie aus Fig. 1 ersichtlich, ein weites Pumprohr R und eine Vorrichtung zum Eindestillieren von Alkalimetall angeschmolzen, die beide wiederum mit dem Hochvakuumpumpenaggregat und einem Mc Leod in Verbindung standen. Als Kittmaterial für das Quarzfenster und den Quarzschliff wurde ein Wachs-Kolophoniumgemisch benutzt, das sich beim Arbeiten mit Alkalimetall sehr gut bewährt

hat. Zwischen Zelle und Pumpenaggregat befand sich eine mit flüssiger Luft gekühlte Quecksilberfalle.

Durchführung der Versuche und Versuchsergebnisse. Das zu verwendende Kalium wurde zuerst an einer getrennten Vakuumapparatur mehrfach destilliert und unter Hochvakuum in eine kleine Ampulle eingebracht, wobei das Metall den Hals der Ampulle anfüllte.

Darauf evakuierte man die Versuchsapparatur, füllte sie mit Stickstoff und öffnete die Destilliervorrichtung an der Stelle S (Fig. 1). Im Stickstoffstrom wurde nun der Hals der Kaliumampulle k aufgebrochen, k in das Rohr A eingeworfen und bei S zugeschmolzen. Nachdem man auf Klebvakuum evakuiert und die Apparatur sorgfältig ausgeheizt

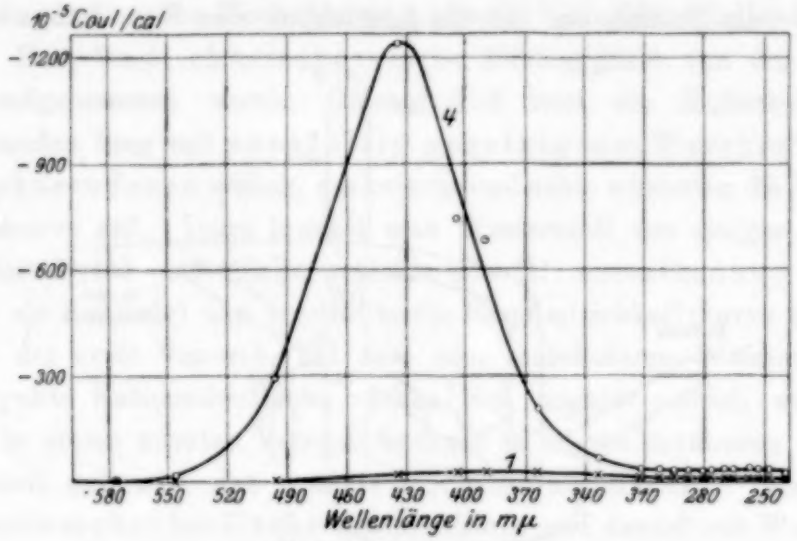


Fig. 2. Kompaktes Kalium.
Kurve 1. Unmittelbar nach dem Aufdestillieren.
Kurve 4. Nach dem Durchgang einer Glimmentladung.

hatte, ließ man das Kalium aus k nach B laufen und destillierte von dort eine geringe Menge nach C, der Rest wurde in das Kölbchen E gebracht, das bei F abgeschmolzen wurde.

Nunmehr wurde in einem ersten Versuch das Kalium aus C in die kugelförmige Vorlage V und von dort ganz allmählich auf die Zellenkathode in kompakter Schicht aufdestilliert und unmittelbar danach die Empfindlichkeitskurve aufgenommen (Tabelle 1); sie ist in Fig. 2, und in größerem Maßstab in Fig. 3 als Kurve 1 eingetragen. Die Abszissen dieser Figuren geben die Wellenlängen, die Ordinaten die mit den einzelnen Quecksilberlinien erhaltenen lichtelektrischen Aufladungen in Coul./cal wieder. Wie man erkennt, besitzt Kurve 1 noch ein schwaches Maximum

Tabelle 1. Lichtelektrische Elektronenemission an einer kompakten Kaliumschicht.

Wellenlänge	Lichtelektrische Aufladungen in 10^{-5} Coul./cal			
	Unmittelbar nach dem Auldestillieren	24 Stunden danach	Nach 6stündigem Stehen unter H_2 von Atmosphärendruck	Nach dem Durchgang einer Glimmentladung bei 0,5 mm H_2
mμ	Kurve 1	Kurve 2	Kurve 3	Kurve 4
239,9	11,0	10,4	12,8	21,4
248,2	8,7	10,9	11,1	31,8
254,0	7,6	8,5	10,8	33,5
257,6	9,0	9,7	10,5	35,9
265,5	8,6	9,6	10,3	33,4
269,9	9,0	9,9	9,8	34,2
276,0	8,8	10,8	11,1	31,7
280,3	8,7	9,3	9,3	28,9
289,3	9,3	10,7	10,4	31,9
296,7	9,6	11,0	10,9	31,1
302,2	10,4	12,1	12,1	34,5
313,2	11,5	13,1	12,4	33,1
334,1	17,2	18,9	17,5	64,4
365,5	24,5	24,5	26,0	203
390,7	27,1	25,9	25,2	681
404,7	23,9	24,5	22,5	746
435,8	18,8	17,7	16,5	1234
496,0	4,14	3,81	3,58	291
546,1	0,159	0,157	0,118	18,6
577,9	0,082	0,087	0,061	3,55

bei 400 mμ, das vermutlich von Sauerstoffspuren* herrührt, die in dem Silberbelag der Zelle zurückgeblieben sind**.

Die Zelle blieb nun 24 Stunden lang an der Vakuumapparatur bei laufenden Pumpen. Wie die danach aufgenommene Kurve 2 (Tabelle 1) in Fig. 3 zeigt, hat sich die Zellenempfindlichkeit während dieser Zeit kaum geändert.

Nun wurde Wasserstoff aus einer Bombe über erhitztes Kupfer geleitet, in einem mit flüssiger Luft gekühlten Rohr ausgefroren und darauf in die Apparatur bis zu Atmosphärendruck eingelassen. Die Kaliumoberfläche blieb 6 Stunden lang mit diesem Wasserstoff in Berührung. Die nach dem Evakuieren erhaltene Empfindlichkeitskurve 3 ist jedoch so gut wie ungeändert, wie man aus Fig. 3 und Tabelle 1 erkennt. Molekularer Wasserstoff hatte also keinen Einfluß auf die kompakte Kaliumoberfläche.

* R. Pohl u. P. Pringsheim, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 637, 1913.

** Silber vermag Sauerstoff gut zu absorbieren.

Wurde durch den Wasserstoff jedoch nach Elster und Geitel* eine Glimmentladung hindurchgeschickt (Kurve 4 in Fig. 3 und Tabelle 1), so erhielt man die gleiche Empfindlichkeitskurve, wie sie Pohl und Pringsheim** früher gefunden haben mit einem Maximum bei 440 mμ und einer Ausbeute von $1{,}2 \cdot 10^{-2}$ Coul./cal, also auch von der gleichen Größenordnung wie bei Pohl und Pringsheim.

Da noch die Möglichkeit bestand, daß der molekulare Wasserstoff von der Kaliumoberfläche in zu geringen Mengen adsorbiert wurde und infolgedessen keine Erhöhung der lichtelektrischen Empfindlichkeit hervorrief, führten wir eine zweite Versuchsreihe durch, bei der wir

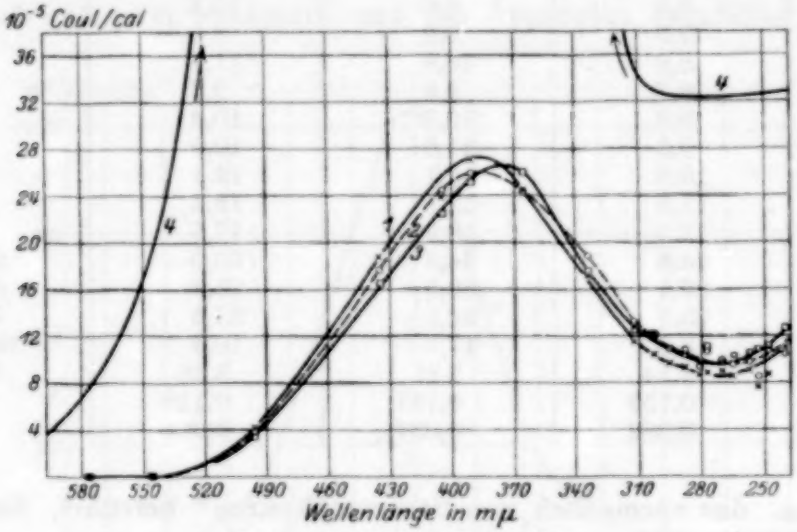


Fig. 3. Kompakte Kaliumschicht.
Kurve 1. Nach dem Aufdestillieren.
Kurve 2. 24 Stunden danach.
Kurve 3. Nach sechsstündigem Stehen in H_2 von Atmosphärendruck.
Kurve 4. Nach dem Durchgang einer Glimmentladung.

die Silberkathode vorher mit einer Schicht von Platinmohr überzogen und hierauf Kalium in äußerst dünner Schicht aufbrachten. Durch die große Oberfläche des Platinmohrs und sein Adsorptionsvermögen für Wasserstoff mußten die Kaliumatome in äußerst guten Kontakt mit dem molekularen Wasserstoff gelangen.

Das Aufdestillieren der dünnen Kaliumschicht geschah in folgender Weise. Zunächst wurde eine so geringe Menge Kalium von C (Fig. 1) nach der Vorlage V destilliert, daß diese nur mit einem dünnen Kaliumhauch überzogen war; nun wurde V und v und die Zellenwandung vorsichtig erwärmt und dadurch die Platinmohroberfläche der Zellenkathode

* J. Elster u. H. Geitel, Phys. ZS. **11**, 257, 1910.
** R. Pohl u. P. Pringsheim, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 173, 1913.

mit einer äußerst dünnen Kaliumschicht überzogen. Die Kapillare *c* verhinderte, daß weiterer Kaliumdampf aus *C* auf die Kathode gelangte, wodurch deren Empfindlichkeit sich dauernd geändert hätte*. Wie man aus Fig. 5, Kurve 8 und Kurve 9 und aus Tabelle 2 ersieht, veränderte sich die Empfindlichkeit einer solchen Schicht in Anbetracht ihrer großen Labilität innerhalb von 24 Stunden relativ wenig.

Kurve 5 in Fig. 4 (Tabelle 2) gibt die Empfindlichkeit des Platinmohrs wieder, Kurve 6 die Empfindlichkeit einer auf Platinmohr niedergeschlagenen monoatomaren Kaliumschicht. Die rote Grenze einer solchen Schicht liegt bei etwa 500 mμ; von da ab steigt ihre Empfindlichkeit dauernd normal an, auch im Ultravioletten zeigt sich kein Maximum der Empfindlichkeit**.

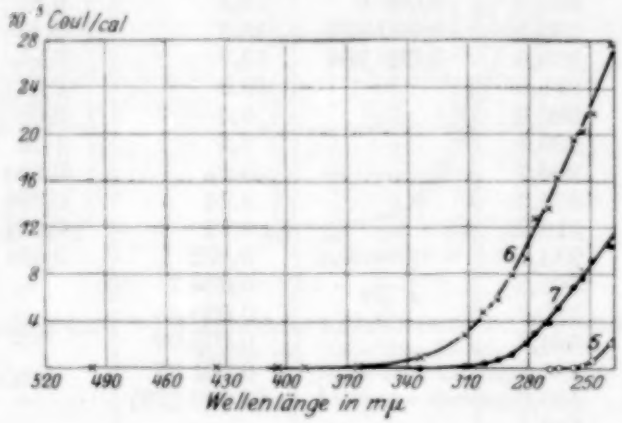


Fig. 4.

Kurve 5. Platinmohr.
Kurve 6. Monoatomare Kaliumschicht auf Platinmohr.
Kurve 7. Dieselbe Schicht nach dem Beladen mit H_2.

Wurde nun eine solche auf Platinmohr befindliche Kaliumschicht 6 Stunden lang in gründlich gereinigtem Wasserstoff von Atmosphärendruck stehengelassen, so nahm ihre lichtelektrische Empfindlichkeit sehr stark ab, wie Kurve 7 in Fig. 4 und Tabelle 2 zeigen. Besonders stark ist die Empfindlichkeitsabnahme an der langwelligen Grenze. Eine Zunahme der Empfindlichkeit ist jedenfalls durch die enge Berührung von molekularem Wasserstoff und Kalium nicht erfolgt.

Wird jetzt von neuem eine Spur Kalium aufdestilliert, so nimmt die Empfindlichkeit wieder bis auf die Werte zu, die man nach dem

---

* Die leichte Veränderlichkeit dünner Alkalimetallschichten erschwert das Arbeiten mit ihnen außerordentlich. H. E. Ives (Astrophys. Journ. **60**, 209, 1924) erreicht Konstanz der Schichtdicke bei Kalium dadurch, daß er die Zelle in ein mit flüssiger Luft gefülltes Gefäß einbaut. Der von uns angewendete Kunstgriff erfüllte diesen Zweck jedoch in gleicher Weise.

** Auch auf blanken Platinblechen haben wir inzwischen monoatomare K-Schichten mit normalen Empfindlichkeitskurven erhalten, die bis 240 mμ kein Maximum erkennen lassen. Wir sind dabei (in Ergänzung der Versuche von H. E. Ives, Astrophys. Journ. **60**, 209, 1924) festzustellen, ob auch an solchen Kurven ein Vektoreinfluß bei Benutzung polarisierten Lichtes zu bemerken ist.

Tabelle 2. Lichtelektrische Elektronenemission an monoatomaren Kaliumschichten.

Wellenlänge mμ	Lichtelektrische Aufladungen in 10^{-5} Coul./cal				
	Platinmohr allein	Nach dem Aufbringen der Kaliumschicht	Nach Beladen der Kathodenoberfläche mit H_2	Nach dem Aufbringen einer weiteren Kaliumschicht	Dieselbe Schicht 24 Stunden danach
	Kurve 5	Kurve 6	Kurve 7	Kurve 8	Kurve 9
239,9	2,10	27,6	10,5	29,4	23,0
248,2	0,607	21,8	9,1	23,4	19,6
254,0	0,186	20,3	7,68	22,0	17,3
257,6	0,060 6	19,5	6,83	21,3	16,5
265,5	0,000 835	16,2	5,16	17,1	13,4
269,9	0,000 254	13,7	3,85	14,2	11,6
276,0	—	12,8	2,88	13,6	10,8
280,3	—	9,4	2,06	10,6	8,5
289,3	—	7,9	1,16	8,48	6,79
296,7	—	5,81	0,684	6,96	5,30
302,2	—	4,74	0,388	5,94	4,14
313,2	—	2,79	0,097	3,85	2,70
334,1	—	0,832	0,001 54	1,74	1,07
365,5	—	0,055 7	—	0,317	0,141
390,7	—	0,008 45	—	0,055 4	0,016 7
404,7	—	0,005 98	—	0,009 1	0,001 79
435,8	—	0,001 65	—	(0,000 247)	(0,000 100)
496,0	—	(0,000 123)	—	—	—
546,1	—	—	—	—	—
577,9	—	—	—	—	—

ersten Aufdestillieren einer K-Schicht erhielt, wie der Vergleich von Kurve 7 (nach dem Beladen mit H_2) in Fig. 4 (Tabelle 2) und Kurve 8 (nach dem Aufbringen einer weiteren K-Schicht) in Fig. 5 (Tabelle 2), sowie der Vergleich von Kurve 8 und Kurve 6 (nach dem Aufbringen der ersten K-Schicht) in Fig. 4 (Tabelle 2) erkennen läßt.

Schließlich wurden in einem dritten Versuch kompakte und in einem vierten Versuch monoatomare K-Schichten in der gleichen Weise wie im ersten und zweiten Versuch behandelt und deren Ergebnisse durchweg bestätigt. Die mit Wasserstoff beladene monoatomare K-Schicht setzten wir diesmal noch einer Glimmentladung aus und erhielten dadurch eine geringe Empfindlichkeitserhöhung, wie man beim Vergleich von Kurve 10 und Kurve 11 in Tabelle 3 und in Fig. 6 erkennt.

Diskussion der Ergebnisse. Die Versuche an den kompakten Kaliumschichten dürften einwandfrei beweisen, daß molekularer Wasserstoff keinen Einfluß auf die lichtelektrische Emission des Kaliums ausübt, denn nach sechsstündigem Stehen unter Atmosphärendruck hätte sich andernfalls eine Änderung der Empfindlichkeitskurve

zeigen müssen. Ist von früheren Beobachtungen ein solcher bereits bei geringen Wasserstoffdrucken gefunden worden, so ist der verwendete Wasserstoff wohl nicht genügend gereinigt und getrocknet gewesen. Das bei 440 mμ liegende Maximum tritt erst auf, wenn durch die lichtelektrische Zelle eine Glimmentladung in Wasserstoff geschickt wird;

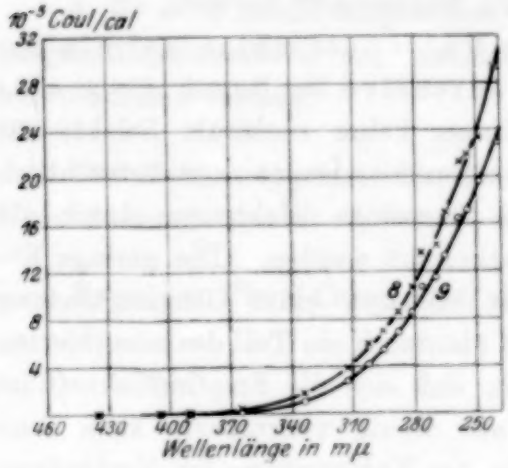


Fig. 5.
Kurve 8. Monoatomare Kaliumschicht auf Platinmohr.
Kurve 9. Dieselbe Schicht 24 Stunden danach.

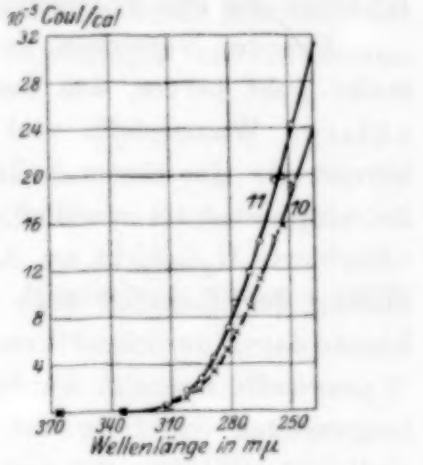


Fig. 6.
Monoatomare Kaliumschicht auf Platinmohr
Kurve 10. Nach dem Beladen mit H_2.
Kurve 11. Nach dem Durchgang einer Glimmentladung.

Tabelle 3.

Lichtelektrische Elektronenemission an einer monoatomaren Kaliumschicht. Einfluß einer Glimmentladung in H_2.

Wellenlänge mμ	Lichtelektrische Aufladungen in 10^{-5} Coul./cal	
	Nach Beladen der Kathodenoberfläche mit H_2 Kurve 10	Nach dem Durchgang einer Glimmentladung bei 0,5 mm H_2 Kurve 11
239,9	—	—
248,2	19,2	24,4
254,0	15,8	19,9
257,6	14,8	19,7
265,5	11,1	14,4
269,9	8,8	11,8
276,0	6,76	9,2
280,3	5,21	6,98
289,3	3,40	4,48
296,7	1,92	2,68
302,2	1,21	1,70
313,2	0,366	0,543
334,1	0,003 90	0,010 4
365,5	(0,000 067)	0,000 078
390,7	—	—
404,7	—	—
435,8	—	—

hierbei bewirken die auf die Kaliumoberfläche auftreffenden H^+-Ionen das Entstehen des spektralen Maximums, wie der eine von uns kürzlich nachgewiesen hat*. Bringt man also Wasserstoff dadurch mit dem Kalium in Berührung, daß man einen in der Kaliumzelle befindlichen Platin- oder Palladiumdraht glüht, so rufen die hierbei austretenden H^+-Ionen das nun auftretende spektrale Maximum** hervor.

Aus den Versuchen an dünnen Kaliumschichten auf Platinmohr geht hervor, daß auch sehr intensive Berührung des molekularen Wasserstoffs und des Kaliums keine spektrale Selektivität hervorruft. In diesem Falle wird die Emission sogar noch beträchtlich herabgesetzt, vermutlich, weil die langsamen Elektronen durch die adsorbierte H_2-Schicht am Austritt verhindert werden. Die geringe Erhöhung der Emission nach dem Durchschicken einer Glimmentladung könnte darauf zurückzuführen sein, daß hierdurch ein Teil des adsorbierten Wasserstoffs beseitigt wurde. Daraus, daß sich die Empfindlichkeit im langwelligen Spektralgebiet hierbei nur wenig vergrößert, kann man vielleicht schließen, daß eine Resonanz des Kaliumatoms (in Verbindung mit einem H^+-Ion***) nur dann möglich ist, wenn die Unterlage aus Kalium oder vielleicht einem ähnlichen Metall besteht; durch die benachbarten Platinatome wird sie jedenfalls unterdrückt. Eigentümlich ist, daß man eine infolge Wasserstoffbeladung unempfindlich gewordene Kalium-Platinmohrkathode durch Aufdestillieren einer weiteren dünnen Kaliumschicht wieder auf die erste Empfindlichkeit bringen kann. Dieser Umstand legt die Vermutung nahe, daß frisch aufdestilliertes Kalium den auf der Platinmohroberfläche sitzenden Wasserstoff von dort zu verdrängen vermag, so daß man durch Aufbringen neuen Kaliums wieder eine „monoatomare“ **** Kaliumoberfläche wie zu Anfang (vor der H_2-Beladung) herstellt†.

Zusammenfassung. 1. Gründlich gereinigter und getrockneter Wasserstoff übt im molekularen Zustand keinen Einfluß auf die lichtelektrische Empfindlichkeit des Kaliums aus.

---

* R. Suhrmann, Phys. ZS. (im Druck).

** Vgl. R. Fleischer, Ann. d. Phys. **82**, 75, 1927.

*** Vgl. die oben zitierte im Druck befindliche Arbeit von R. Suhrmann in der Phys. ZS.

**** Vgl. die Fußnote ** auf S. 454.

† Der in den Kurven und Tabellen infolge der quantitativen Bestimmung der Empfindlichkeitskurven hervortretende Unterschied der Empfindlichkeit bei monoatomaren und kompakten Schichten im langwelligen Gebiet soll später ausführlich diskutiert werden.

2. Es wird ein Verfahren beschrieben relativ beständige „monoatomare" Kaliumschichten herzustellen.

3. An „monoatomaren" Kaliumschichten auf Platinmohr wird die lichtelektrische Empfindlichkeit durch Beladung mit molekularem Wasserstoff beträchtlich herabgesetzt.

4. Es wird darauf hingewiesen, daß man das spektrale Maximum der Empfindlichkeitskurve des Kaliums durch Aufbringen von H^+-Ionen hervorzurufen vermag.

Der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft sind wir für die Unterstützung unserer Arbeiten zu verbindlichstem Dank verpflichtet.

Breslau. Phys.-Chem. Inst. der Techn. Hochschule, Oktober 1928.

Die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität von Gläsern.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von **W. Gerlach** und **N. Little** in Tübingen.

(Eingegangen am 20. November 1928).

Verschiedene untersuchte Glassorten haben einen großen Temperaturkoeffizienten der Suszeptibilität, welcher auf paramagnetische Bestandteile in denselben zurückzuführen ist.

Für die Temperaturabhängigkeit der magnetischen spezifischen Suszeptibilität gelten die beiden Gesetze von Curie: die diamagnetische Suszeptibilität ist unabhängig von der Temperatur, die paramagnetische Suszeptibilität ändert sich mit der Temperatur gemäß χT bzw. $\chi (T - \Delta) = C$ (Kamerlingh Onnes). Diese Gesetze gelten nur für magnetisch einheitliche Körper. Da jedem paramagnetischen Körper aus allgemeinen Atomstrukturgründen auch eine diamagnetische Komponente zuzuschreiben ist, muß bei kleiner paramagnetischer Suszeptibilität dieser Anteil so berücksichtigt werden, daß zu dem temperaturabhängigen paramagnetischen Gliede die temperaturunabhängige diamagnetische Suszeptibilität additiv hinzuzufügen ist. Ein experimentelles Beispiel hierfür geben die Messungen der Suszeptibilität von Platin und Palladium nach W. Kopp*. Ebenso muß bei der Untersuchung diamagnetischer Körper eine etwa vorhandene paramagnetische Komponente berücksichtigt werden**.

Da bei der Faradayschen Methode zur Untersuchung der Suszeptibilität von Flüssigkeiten und Gasen durch Messung der Kraft auf ein in den betreffenden Medien im inhomogenen Felde hängendes Stäbchen die Suszeptibität des letzteren bekannt sein muß, haben wir Messungen des Temperaturkoeffizienten der Suszeptibilität von Gläsern ausgeführt. Es wurden sechs verschiedene Glassorten, die bei Zimmertemperatur teils dia-, teils paramagnetisch waren, zwischen Zimmertemperatur und $+ 70^{\circ}$ C untersucht. In der folgenden Tabelle wird gegeben: die Suszeptibilität bei 19° C, ein mittlerer Temperaturkoeffizient

---

* W. Kopp, Diss. Zürich, 1919. Sehr deutlich tritt der Einfluß des diamagnetischen Gliedes auch in der Suszeptibilität der Alkalimetalle im festen und flüssigen Zustande hervor.

** Vgl. H. Buchner, Bemerkungen zu der von A. Glaser gefundenen Anomalie des Diamagnetismus der Gase. Im Druck in den Ann. der Physik.

zwischen den in Klammern angegebenen Temperaturen und die Änderung der Suszeptibilität pro 1° bei Zimmertemperatur.

Nr.	$K \cdot 10^6$	Temperaturkoeffizient in %		$\Delta K \cdot 10^9$ pro 1°
1	— 0,67	$-0{,}2_4$		— 1,6
2	— 0,58	$-0{,}4_0$	(19—40°)	— 2,3
3	— 0,46	$-0{,}6_0$		— 2,9
4	— 0,46	$-0{,}6_0$		— 2,9
5	— 0,33	$-0{,}2_2$	(19—67°)	— 0,7
7	+ 0,41	$-0{,}9_8$	(19—75°)	— 4,0
8	— 0,47	$-0{,}3_1$	(19—40°)	— 1,5

Sämtliche Glassorten (verschiedene Thüringer, Hartglas, Pyrex, gefärbte Kunstgläser) haben unabhängig von dem Absolutwert der Suszeptibilität die gleiche Größenordnung des Temperaturkoeffizienten, dessen Vorzeichen auf paramagnetischen Anteil zurückzuführen ist: der Betrag der diamagnetischen Suszeptibilität wächst, der der paramagnetischen nimmt ab mit steigender Temperatur.

Die Änderung der Suszeptibilität pro Grad ist zehnmal größer als die Größenordnung der Suszeptibilität der Gase. Würde man selbst die Temperatur auf ein hundertstel Grad konstant halten, so ließe sich die Gassuszeptibilität auf nur 10% angeben. Messungen der Suszeptibilität von Gasen bei niederen Drucken verlangen Stäbchen, deren Suszeptibilität pro Grad sich um weniger als 10^{-11} bis 10^{-12} ändert, wenn man eine Temperaturkonstanz von ein hundertstel Grad als erreichbar ansieht.

Daß die Suszeptibilität von Gläsern außerordentlich stark temperaturabhängig ist, haben übrigens schon Kamerlingh Onnes und Perrier* beobachtet. Aus ihren Zahlen folgt sogar die Gültigkeit des Curieschen Gesetzes für Glas bei tiefen Temperaturen für ein Glas, welches bei Zimmertemperatur diamagnetisch war, wie wir aus folgenden Zahlen der genannten Verfasser berechnen:

Temperatur	$K \cdot 10^6$	$\chi \cdot 10^6$	$\chi (T-2) \cdot 10^6$
290° abs.	diamagnetisch		—
78	+ 2,8	1,2	91,2
20,3	+ 12,1	4,9	89,67
13,9	+ 19,0	7,6	90,44

Tübingen, Physikalisches Institut.

* H. Kamerlingh Onnes und A. Perrier, Comm. Leiden Nr. 124a, 1911.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Untersuchungen über die durch α-Strahlen erregte Röntgenstrahlung.

Von **W. Bothe** und **H. Fränz** in Charlottenburg.

Mit 16 Abbildungen. (Eingegangen am 25. Oktober 1928.)

Einleitung und Übersicht. Die Anregung der charakteristischen Röntgenstrahlen einiger Elemente durch α-Bestrahlung wurde von Chadwick*, Rutherford und Richardson** sowie Chadwick und Russell*** nachgewiesen. Mit größerer Genauigkeit hat dann Slater**** an einigen Schwerelementen (Pt, Au, Pb) die Absorptionskurven der Röntgenstrahlen aufgenommen, welche durch die α-Strahlen der vom aktiven Niederschlag befreiten Radiumemanation erregt werden; es zeigte sich, daß die *K*- und *L*-Strahlung dieser Elemente, sowie beim Zinn die *K*-Strahlung auftritt. Alle diese Autoren bedienten sich zum Nachweis der Strahlung der Ionisationsmethode. Diese Methode dürfte für die genauere Erforschung dieser Erscheinung wenig geeignet sein, da sie verhältnismäßig unempfindlich ist. Die Intensität der sekundären Röntgenstrahlen ist nämlich unter den praktisch erreichbaren Bedingungen nur außerordentlich klein.

Weit empfindlicher für Röntgenstrahlen ist der Spitzenzähler, wenn man ihn mit einem Gas füllt, welches die betreffenden Strahlen stark absorbiert. In der Tat konnten die Verfasser† mittels eines argongefüllten Zählers leicht die Erregung der Al-, Fe-, Zn *K*- und der Au *L*-Strahlung durch die α-Strahlen des Poloniums nachweisen. In der folgenden Ziffer 2 wird dieser Nachweis auf weitere Bereiche des periodischen Systems und auf die *M*-Strahlung ausgedehnt.

Im Gegensatz zu den oben aufgeführten früheren Untersuchungen, bei welchen die α-Strahlenquelle unmittelbar der Versuchssubstanz aufliegen mußte, damit die Röntgenintensitäten meßbar wurden, hatte bei unserer Versuchsanordnung das Poloniumpräparat einigen Abstand von der Substanz, so daß die primären α-Strahlen in erster Näherung als

---

* J. Chadwick, Phil. Mag. **24**, 594, 1912; **25**, 193, 1913.

** E. Rutherford und H. Richardson, ebenda **25**, 722, 1913.

*** J. Chadwick und A. S. Russell, Proc. Roy. Soc. **88**, 217, 1913; A. S. Russell und J. Chadwick, Phil. Mag. **27**, 112, 1914.

**** F. P. Slater, Phil. Mag. **42**, 904, 1921.

† W. Bothe und H. Fränz, ZS. f. Phys. **49**, 1, 1928.

leidlich parallel angesehen werden konnten. Es war daher möglich, die Reichweite der α-Strahlen durch sukzessive Abbremsung zu variieren und dabei die Änderung der Röntgenintensität zu verfolgen, mit anderen Worten, es konnte die „Anregungsfunktion" aufgenommen werden. Hierüber wird in Ziffer 3 und 4 berichtet*.

Schließlich werden in Ziffer 5 und 6 einige Schlüsse über die Ausbeute an charakteristischen Strahlen und ihre Abhängigkeit von der Ordnungszahl des Strahlers gezogen. Für die Al K-Strahlung wurde eine angenäherte Absolutbestimmung der Ausbeute vorgenommen.

Auf die theoretische Bedeutung der erhaltenen Resultate wird in Ziffer 7 eingegangen werden.

1. Versuchsanordnung. Die benutzte Versuchsanordnung war im wesentlichen dieselbe wie bei unseren Versuchen über Atomzertrümmerung (a. a. O. Fig. 3); sie ist in Fig. 1 nochmals schematisch wiedergegeben. *Po* ist das bereits früher benutzte, aus zwei Teilen bestehende, sehr reine Poloniumpräparat von 0,6 bis 0,3 mg Ra-Äquivalent. Die Substanzschicht war im allgemeinen so dick, daß sie zur vollständigen Abbremsung der α-Strahlen ausreichte. *Al* sind Aluminiumfolien zur Absorption der Röntgenstrahlen, *Gl* geeichte Glimmerfolien zum Abbremsen der α-Strahlen. Die Glimmerfolien waren (ebenso wie früher schon die Al-Folien) auf einem besonderen Rad leicht vertauschbar angeordnet (R_2 in Fig. 3 a. a. O), und zwar so, daß sie im Mittel senkrecht von den α-Strahlen durchsetzt wurden.

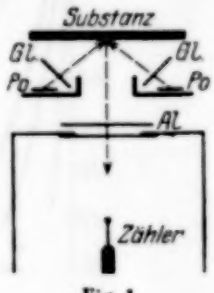


Fig. 1.

Der Zähler war bei diesen Versuchen durchweg mit einem Gemisch von 80 % Argon + 20 % Stickstoff gefüllt. Unter diesen Umständen können die etwa auftretenden Atomtrümmer (H-Strahlen) gänzlich gegen die Röntgenstrahlen vernachlässigt werden, wie aus der vorigen Untersuchung hervorgeht. Auch die reflektierten α-Teilchen spielten keine Rolle, da das Zählerfenster stets so dick gewählt wurde, daß es die reflektierten α-Strahlen absorbierte. Als Material für das Zählerfenster diente Kollodium, wenn die Strahlung nur wenig kurzwelliger war als die Al K-Kante, in allen anderen Fällen Aluminium.

* Um die Kleinheit der zu messenden Strahlungsintensitäten zu illustrieren, sei angeführt, daß unsere Anordnung, als Röntgenrohr aufgefaßt, mit einem „Röhrenstrom" von rund 10^{-13} Amp. und mit einem Nutzeffekt arbeitete, welcher durchschnittlich nur um etwa eine Zehnerpotenz größer als der eines gewöhnlichen Röntgenrohres war (Ziffer 6).

Das Zählverfahren war dasselbe wie in der vorigen Untersuchung. Größtenteils wurde photographisch registriert.

2. Identifizierung der Strahlungen. Bei einer Reihe von Elementen zwischen $Z = 12$ und 30 wurde eine Strahlung festgestellt, deren Durchdringungsvermögen bei Berücksichtigung des K-Absorptionssprunges von Al auf eine ständig mit wachsendem Z abnehmende Wellenlänge schließen ließ. In Fig. 2 ist der größte Teil der hierauf bezüglichen Meßresultate wiedergegeben. (Ca wurden fortgelassen, um die Figur nicht zu sehr zu verwirren.) Gleichzeitig sind die theoretischen Ab-

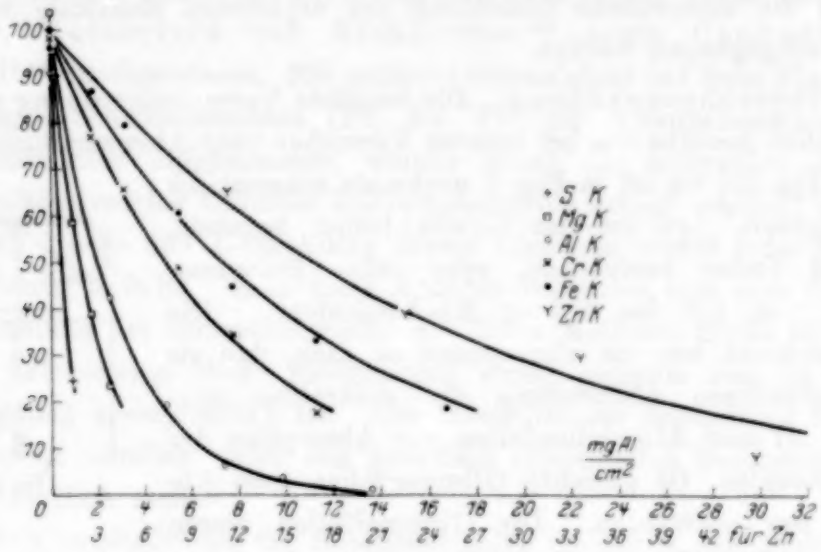


Fig. 2.

sorptionskurven für die K-Strahlungen dieser Elemente in Aluminium eingetragen. Als effektive Wellenlänge $\lambda_{\text{eff.}}$ wurde bei der Berechnung der Schwerpunkt der $K\alpha$- und $K\beta$-Linie genommen. Die Umrechnung zwischen Wellenlängen und Absorptionskoeffizienten geschah hier wie auch stets im folgenden an Hand der von E. Jönsson* kürzlich aufgestellten Gesetzmäßigkeiten und Tabellen, welche sich dabei aufs beste bewährten. Die so errechneten Absorptionkoeffizienten sind in Tabelle 1 zusammengestellt. An diesen Werten mußte für den Vergleich mit den

Tabelle 1. K-Strahlungen.

$Z =$	12	13	16	20	24	26	30
$\lambda_{\text{eff.}}$ . . . . Å	9,78	8,23	5,30	3,29	2,23	1,89	1,40
$(\mu/\varrho)_{\text{Al}}$	538	336	1470	410	138	90	39,4

* E. Jönsson, Diss. Uppsala (Uppsala Universitets Årsskrift 1928). Siehe auch Nature **120**, 695, 1927.

Messungen noch eine Korrektion von + 4 % angebracht werden, um dem teilweise etwas schrägen Durchgang der Strahlen durch die Absorptionsfolien Rechnung zu tragen.

Die Fig. 2 zeigt durchgängige Übereinstimmung der theoretischen *K*-Absorptionskurven mit den Beobachtungen innerhalb der Meßfehler. Dabei liegen die Wellenlängen zwischen 1,4 und 9,8 Å, die Massenabsorptionskoeffizienten in Al zwischen 39,4 und 1470 Å.$^{-1}$ Die Übereinstimmung in einem so weiten Bereich zeigt, daß außer der *K*-Strahlung bei diesen Elementen keine andere Strahlung, insbesondere keine Bremsstrahlung in merklicher Intensität entsteht; zum mindesten müßte eine solche weit außerhalb des hier untersuchten Härtebereichs liegen.

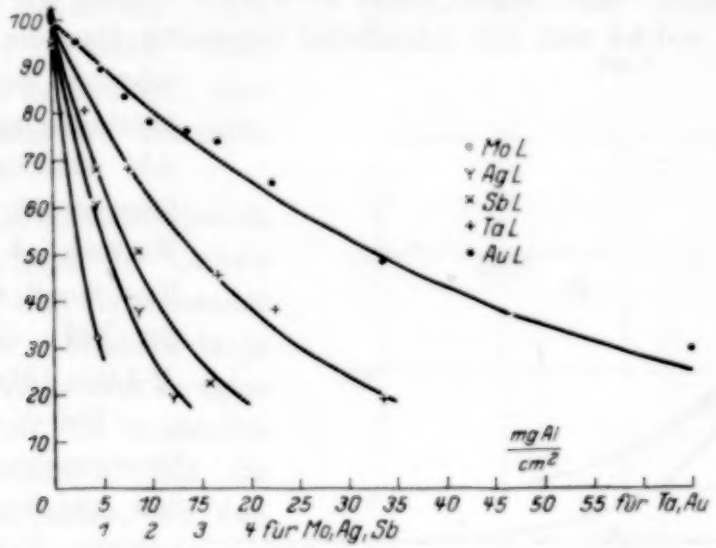


Fig. 3.

Beim Zink ($Z = 30$) war die *K*-Strahlung bereits sehr schwach. Beim Selen ($Z = 34$) trat eine neue, sehr weiche Strahlung auf, welche wiederum mit ständig abnehmender Wellenlänge bis zum Wismut ($Z = 83$) verfolgt werden konnte. In Fig. 3 sind die hierauf bezüglichen Beobachtungen wiedergegeben (wieder unter Weglassung einiger Elemente). Diese Strahlung stellt zweifellos die *L*-Strahlung dar. Allerdings liegen hier die Verhältnisse weniger einfach als bei der *K*-Strahlung. Wegen der Ausdehnung und des Linienreichtums des *L*-Spektrums kann hier keine „effektive Wellenlänge" theoretisch berechnet werden, zumal die Möglichkeit besteht, daß die drei Unterserien in anderem Stärkeverhältnis angeregt werden, als bei den sonst üblichen Anregungsarten. Deshalb wurden durch die Beobachtungspunkte Exponentialkurven gelegt, aus denen der Absorptionskoeffizient und die „experimentelle" effektive

Wellenlänge bestimmt wurde. Diese ist in Tabelle 2 mit den Wellenlängen der stärksten L-Linie ($L\alpha$) zusammengestellt. Die Übereinstimmung ist wiederum zufriedenstellend.

Tabelle 2. L-Strahlungen.

$Z =$	34	42	47	51	73	77	79
$(\mu/\varrho)_{Al}$ exp. . .	421	1310	606	418	46	41	21,6
$\lambda_{eff.}$ exp. . . Å	9,1	5,1	3,8	3,3	1,51	1,44	1,15
$L\alpha$ . . . . . Å	9,0	5,4	4,1	3,4	1,52	1,35	1,27

In entsprechender Weise wurde noch beim Wismut die M-Strahlung beobachtet, welche sich mit erheblicher Intensität über die bereits sehr schwach gewordene L-Strahlung lagerte (Fig. 4). Als effektive Wellenlänge ergab sich aus der Messung 4,7 Å; diese liegt somit wiederum in der Nähe der stärksten M-Linie ($M\alpha = 5{,}1$ Å).

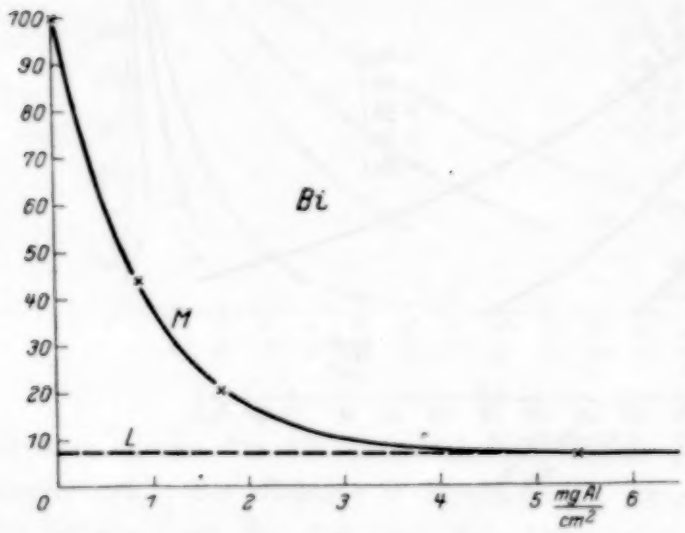


Fig. 4.

Bei diesen Absorptionsmessungen schien es uns zweckmäßig, keine größere Meßgenauigkeit anzustreben, als zur Identifizierung der Strahlungen nötig war, um das wertvolle Präparat möglichst weitgehend für die folgenden interessanteren Probleme ausnutzen zu können.

Tabelle 3.

R_L	Al K		Ca K		Fe K		Ta L	
cm	J' beob.	J korr.	J' beob.	J korr.	J' beob.	J korr.	J' beob.	J korr.
1,04	12	12	—	—	33	33	—	—
1,50	120	128	30	32	56	58	74	84
2,36	461	552	123	134	251	264	402	487
3,10	923	1187	296	330	635	673	856	1113
3,85	1427	1985	589	670	1247	1337	1622	2204

3. **Die totale Anregung.** Die Intensität der Röntgenstrahlen als Funktion der Luftreichweite R_L der α-Strahlen wurde für Al, Ca, Fe und Ta aufgenommen; bei dem letzten Element handelt es sich um die L-Strahlung, bei den übrigen um die K-Strahlung. Die Ergebnisse zeigt Tabelle 3 (J' beob.) und Fig. 5 bis 8 (gestrichelte Kurven). Die Zahlen der Tabelle sind die wirklich gezählten, ihre Wurzeln geben also den mittleren Fehler.

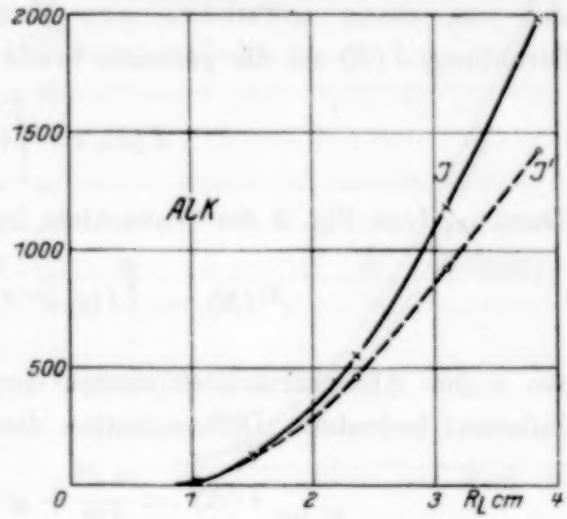


Fig. 5.

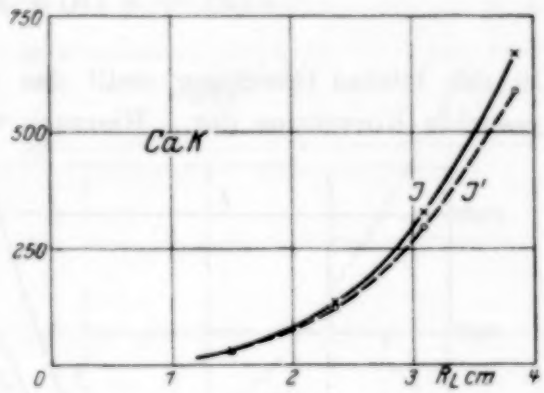


Fig. 6.

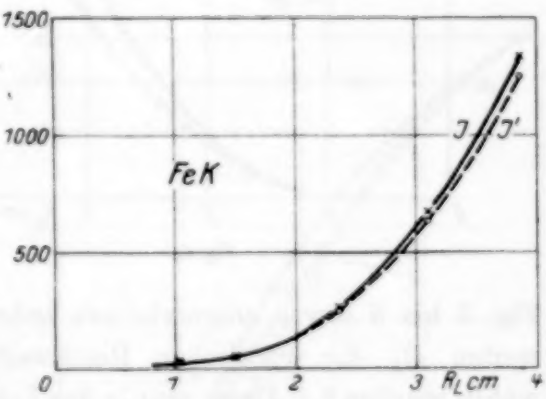


Fig. 7.

Diese Zahlen stellen jedoch noch nicht ganz die „totale Anregung", d. h. die Intensität der von den α-Strahlen längs ihrer Bahn insgesamt erregten Strahlung dar. Es ist nämlich zu berücksichtigen, daß die Strahlung im Innern der Versuchssubstanz entsteht und vor ihrem Austritt aus dieser bereits eine nicht unbeträchtliche Absorption erleidet. Die Korrektion hierfür läßt sich einfach berechnen, wenn man sowohl die α-Strahlen als auch die zur Beobachtung kommenden Röntgenstrahlen als annähernd parallel ansieht. Es sei (Fig. 9) ϑ der Einfallswinkel der α-Strahlen, während die Röntgenstrahlen die Schicht senkrecht verlassen. Die Reichweite der α-Strahlen in der Substanz sei R. Mit $i(R)$ bezeichnen wir die „differentiale Anregung", d. h. die Intensität

der von einem α-Teilchen pro Zentimeter Bahnlänge erregten Strahlung, $J(R)$ sei die gesuchte totale Anregung:

$$J(R) = \int_0^R i(x)\,dx. \tag{1}$$

Dann ist laut Fig. 9 die beobachtete Intensität

$$J'(R) = \int_0^R i(x)\, e^{-\mu(R-x)\cos\vartheta}\,dx, \tag{2}$$

wo μ den Absorptionskoeffizienten der Röntgenstrahlung in der eigenen Substanz bedeutet. Differentiation dieser Gleichung nach R ergibt

$$i(R) = \frac{dJ'}{dR} + \mu\cos\vartheta\,.\,J'(R); \tag{3}$$

nach (1) folgt

$$J(R) = J'(R) + \mu\cos\vartheta\int_0^R J'(x)\,dx. \tag{4}$$

In der letzten Gleichung stellt das zweite Glied der rechten Seite die gesuchte Korrektion dar. Hiernach wurden zunächst die Kurven J' der

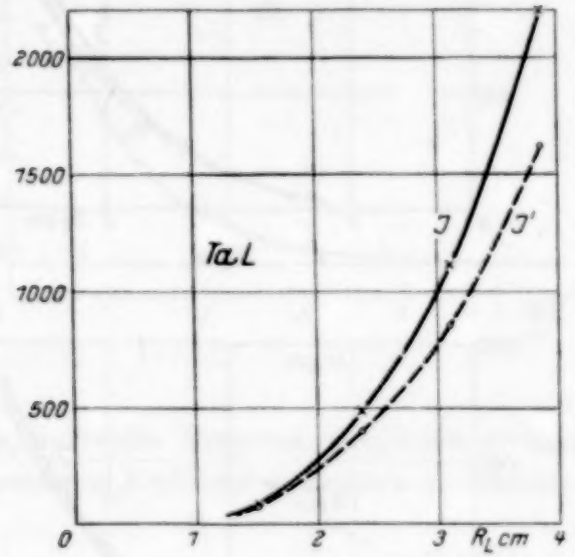


Fig. 8.

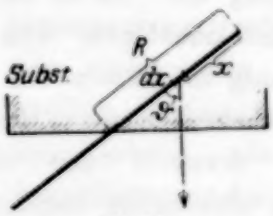


Fig. 9.

Fig. 5 bis 8 etwas umgezeichnet, indem als Abszissen statt der Luftreichweiten R_L die wirklichen Reichweiten R in der Versuchssubstanz gewählt wurden*. Dann wurde das Integral in (4) planimetrisch bestimmt. Für ϑ wurde ein Mittelwert (53°) eingesetzt.

* Nach E. Marsden und T. S. Taylor, Proc. Roy. Soc. **88**, 443, 1913; E. Marsden und H. Richardson, Phil. Mag. **25**, 184, 1913.

Die so korrigierten Werte sind in Tabelle 3 unter „J korr." aufgeführt. Die entsprechenden Kurven sind in Fig. 5 bis 8 ausgezogen (J). Man sieht, daß die Korrektion die Kurvenform nicht sehr stark beeinflußt. In Fig. 10 sind die korrigierten Kurven vereinigt. Der Maximalwert von J ist überall $= 100$ gesetzt. Die Punkte für Ca K, Fe K und Ta L fallen dabei so dicht zusammen, daß nur die Kurve für Fe eingetragen wurde. Dagegen sondert sich die Al K-Kurve deutlich ab. In allen vier Fällen zeigt sich ein sehr starker Anstieg der totalen Anregung mit der Geschwindigkeit v der α-Strahlen (es ist zu bedenken, daß schon die Reichweite rasch mit v anwächst). Die Eisenkurve läßt sich annähernd darstellen durch

$$J = \text{const. } v^9.$$

Andere Elemente waren für die Aufnahme der totalen Anregungskurve weniger geeignet, weil entweder die erregte Strahlung zu schwach oder die anzubringende Korrektion zu groß und daher zu unsicher war.

4. Die differentiale Anregung. Unmittelbarer als die totale Anregung J, in deren Wert das Gesetz der Geschwindigkeitsabnahme der α-Strahlen eingeht, interessiert die differentiale Anregung i, welche durch Gleichung (3) gegeben ist. Die hier-

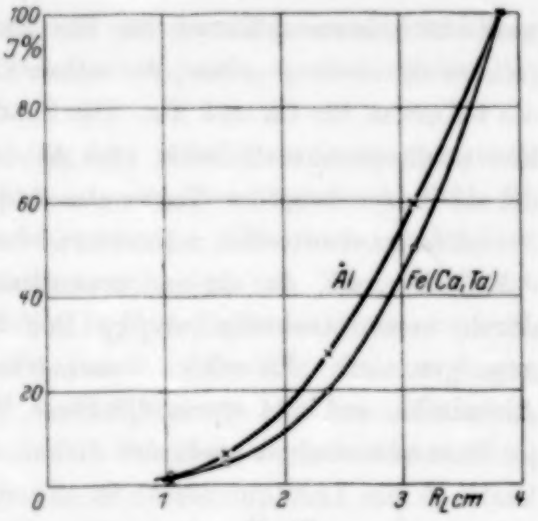


Fig. 10.

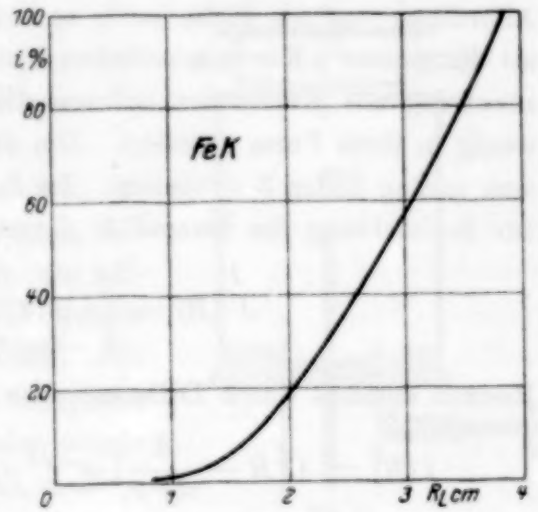


Fig. 11.

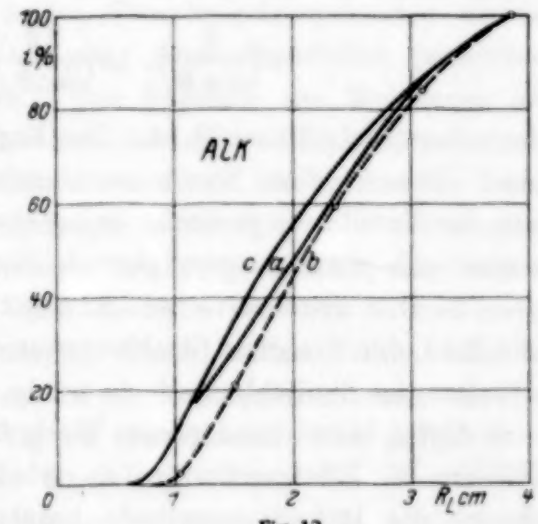


Fig. 12.

nach berechnete i-Kurve ist für Fe in Fig. 11, für Al in Fig. 12 (Kurve a) wiedergegeben; denselben Charakter wie die Fe-Kurve haben die i-Kurven für Ca und Ta. Die Sonderstellung des Aluminiums kommt hier noch charakteristischer zum Ausdruck, als bei der totalen Anregung: die Al-Kurve zeigt im Gegensatz zu den übrigen eine deutliche Inflexion.

Die so ermittelten i-Kurven stehen an Genauigkeit naturgemäß den J-Kurven nach, da sie im wesentlichen durch Differentiation aus den durch verhältnismäßig wenige Punkte festgelegten J'-Kurven hervorgegangen sind. Es schien daher wünschenswert, die Verhältnisse beim Aluminium auf eine etwas direktere Weise nachzuprüfen. Hierzu wurde als Sekundärstrahler statt der dicken Al-Folie eine solche von nur $3{,}2\,\mu$ Dicke (5 mm Luftäquivalent) in die Apparatur eingesetzt. Die hiermit aufgenommene Kurve (b in Fig. 12) zeigt unmittelbar die Inflexion. Allerdings war die Folie noch zu dick, als daß man diese Kurve schon als die genaue i-Kurve ansprechen könnte, aber sie wird durch die noch anzubringende Korrektion auf unendlich dünne Schicht verhältnismäßig wenig in ihrer Form geändert. Um diese Korrektion zu ermitteln, kann man analog Ziffer 3 vorgehen. Ist δ die Dicke der Al-Folie, so kommt zur Beobachtung die Intensität

$$J'(R) = \int_{R-\delta/\cos\vartheta}^{R} i(x)\, e^{-\mu (R-x)\cos\vartheta}\, dx. \qquad (2\,\mathrm{a})$$

Hieraus entsteht durch Differentiation

$$i(R) = i\left(R - \frac{\delta}{\cos\vartheta}\right) \cdot e^{-\mu\delta} + \frac{dJ'}{dR}(R) + \mu\cos\vartheta \,.\, J'(R.) \qquad (3\,\mathrm{a})$$

Nach dieser Gleichung kann man sukzessive

$$i\left(\frac{\delta}{\cos\vartheta}\right),\quad i\left(\frac{2\delta}{\cos\vartheta}\right),\quad i\left(\frac{3\delta}{\cos\vartheta}\right)\cdots$$

berechnen, da $i(0) = 0$ ist. Das Ergebnis stellt die Kurve c der Fig. 12 dar. Obwohl diese Kurve im einzelnen von der durch Differentiation aus der Totalkurve gewonnenen (a) etwas abweicht, zeigt sie die Inflexion sogar noch etwas ausgeprägter als diese.

5. Die Ausbeute an AlK-Strahlung. Um Absolutwerte für die Zahl der erregten Strahlungsquanten pro einfallendes α-Teilchen zu erhalten, ist die Zählermethode wenig geeignet, da es schwerlich möglich sein dürfte, hinreichend genaue Werte für die absolute Empfindlichkeit des Zählers für Röntgenstrahlen zu erhalten. Es wurde daher für diesen Zweck die Ionisationsmethode benutzt. Diese ist allerdings so wenig

empfindlich, daß sie nur für die Elemente mit der intensivsten Strahlung in Frage kommt. Wir beschränkten uns daher auf eine solche Bestimmung für Aluminium.

Die Versuchsanordnung zeigt Fig. 13. Das Poloniumpräparat *Po* befand sich in einer Sauerstoffatmosphäre unmittelbar über der Al-Folie F_1, in der die α-Strahlen vollständig absorbiert wurden. Die von den α-Strahlen ausgelöste Sekundärstrahlung gelangte durch den mit Wasserstoff gefüllten Raum *R* und zwei dünne Al-Folien F_2 F_3 in die Ionisationskammer *K*. Die kreisrunde Öffnung der Kammer hatte einen Durchmesser von 8 mm, der Abstand zwischen den Folien F_1 und F_3 betrug 15,5 mm. Zwischen F_2 und F_3 konnten Absorptionsfolien in den Strahlengang gebracht werden Die innere Elektrode der Ionisationskammer war mit einem empfindlichen Einfadenelektrometer verbunden. Die Ionisationskammer war mit Luft gefüllt, ihre Tiefe war so groß, daß die eintretende Al *K*-Strahlung praktisch vollständig im Innern absorbiert wurde.

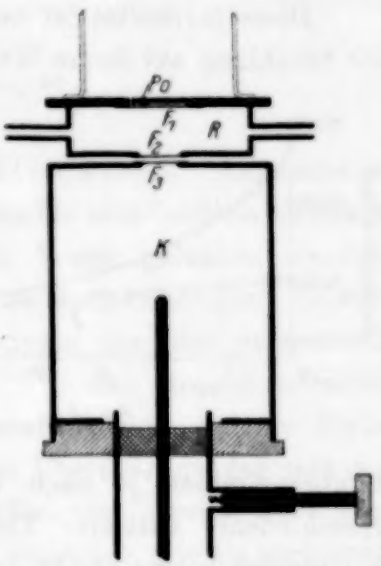


Fig. 13.

Bei den Ionisationsmessungen war im Gegensatz zu den Zählungen zu erwarten, daß neben den Röntgenstrahlen auch die *H*-Strahlen zur Beobachtung kamen, welche teils dem Präparat selbst entstammten, teils im Aluminium als Atomtrümmer ausgelöst wurden; die Wirkung der *H*-Strahlen wurde nämlich jetzt nicht durch ihre Zahl, sondern durch ihr sehr großes Ionisationsvermögen bestimmt. Eine Trennung der beiden Strahlungskomponenten wurde dadurch erreicht, daß in den Strahlengang Absorptionsfolien passender Ordnungszahl eingeschaltet wurden. Das Ergebnis der Messungen ist in Fig. 14 dargestellt; als Abszisse ist das α-Strahlen-Luftäquivalent der eingeschalteten Absorptionsfolien, als Ordinate der gemessene Ionisationsstrom in Ionenpaaren/sec eingetragen. Die durch × bezeichneten Punkte sind mit Absorptionsfolien aus Aluminium erhalten, die beiden durch ⊙ bezeichneten Punkte mit einer Zinnfolie von 0,42 cm und einer Silberfolie von 1,1 cm Luftäquivalent. Diese beiden Folien reichen ebenso wie die Aluminiumfolie von 6,9 cm Luftäquivalent aus, um die Al *K*-Strahlung praktisch vollständig zu absorbieren. Der durch diese Folien nicht absorbierte Teil der Strahlung (durch die gestrichelte Kurve dargestellt) ist als *H*-Strahlung zu deuten. Die beobachtete

Intensität dieser Strahlung ist in genügender Übereinstimmung mit den Resultaten unserer früheren Versuche über die Zertrümmerung des Aluminiums, welche mit demselben Präparat ausgeführt worden sind*.

Die Differenz zwischen den Punkten × und der gestrichelten Kurve ist der Al K-Strahlung zuzuschreiben, wie sich aus der Absorbierbarkeit dieser Komponente bestätigt: die ausgezogene Kurve ist erhalten durch Addition einer theoretischen Absorptionskurve der Al K-Strahlung $\left[\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)_{\text{Al}} = 349$; siehe Ziffer 2$\right]$ zu der gestrichelten Kurve. Für die Abszisse 0 ergibt sich somit eine Al K-Intensität von $I = 8350$ Ionenpaaren/sec.

Diese Intensität ist nun noch zu korrigieren für die Absorption, die die Strahlung auf ihrem Wege bis zu der Ionisationskammer erleidet. Die Dicke der gesamten Al-Schicht zwischen Präparat und Ionisationsraum betrug $D = 3{,}7 \cdot 10^{-3}$ cm, die Absorption im Wasserstoff des Raumes R kann vernachlässigt werden, die Luftschicht zwischen R und K hatte eine Dicke $D' = 0{,}2$ cm. Weiter ist zu beachten, daß die Röntgenstrahlen je nach der Schiefe der einfallenden α-Strahlen in verschiedener mittlerer Tiefe der Al-Schicht entstehen. Eine einfache Mittlungsrechnung ergibt dann für das Verhältnis der wirklich erregten Intensität I_0 zu der beobachteten I

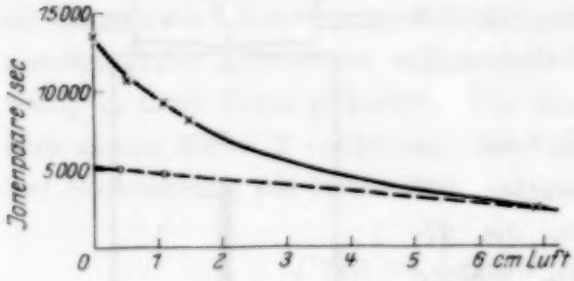


Fig. 14.

$$\frac{I_0}{I} = e^{\mu D + \mu' D'} \frac{\int_0^R i(x)\,dx}{\int_0^R i(x)\,\frac{e^{\mu(R-x)} - 1}{\mu(R-x)}\,dx},$$

wo μ und μ' die Absorptionskoeffizienten der Al K-Strahlung in Al und Luft und $i(x)$ die differentiale Anregungsfunktion bedeuten. Da $i(x)$ aus Ziffer 4 bekannt ist, lassen sich die Integrale graphisch auswerten;

* Die von der Unterlage des Präparats ausgehende Au L-Strahlung ist nach früheren Versuchen so schwach, daß sie außer Betracht bleiben kann, zumal sie wegen ihrer großen Härte im wesentlichen in der gestrichelten Kurve mitenthalten sein müßte.

ihr Verhältnis ergibt sich zu 0,675. Damit berechnet sich $I_0 = 2{,}5 \cdot 10^5$ Ionenpaare/sec. Nimmt man den Energieverbrauch für jedes gebildete Ionenpaar zu 35 e-Volt*, die Energie eines Al K-Quants zu 1500 e-Volt an, so ergibt dies

$$\frac{2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 35}{1500} = 5770 \text{ Quanten/sec.}$$

Da das Poloniumpräparat 0,35 mg Ra äquivalent war und somit $\frac{1}{2} \cdot 0{,}35 \cdot 3{,}5 \cdot 10^7 = 6{,}2 \cdot 10^6$ α-Teilchen pro Sekunde einseitig aussandte, ferner der räumliche Öffnungswinkel für die Röntgenstrahlen 0,21 betrug, so ergibt sich schließlich für die Zahl der pro α-Teilchen längs einer Reichweite von 3,85 cm erzeugten Al K-Quanten

$$\frac{5770 \cdot 4\pi}{6{,}2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}21} = 0{,}056 \text{ **}.$$

6. Die Ausbeuten bei anderen Elementen. Angenäherte Relativwerte für die Ausbeute an Röntgenquanten für verschiedene Elemente können aus unseren Zählungen auf folgende Weise gefunden werden. Zunächst ist die Absorption im Zählerfenster zu berücksichtigen. Soweit das Zählerfenster aus Aluminium bestand, wurden die hier gemessenen Absorptionskoeffizienten benutzt (Ziffer 2). Für das Kollodiumfenster wurde die Absorption mittels eines Kollodiumfilms von gleicher Dicke direkt gemessen; die Resultate waren in guter Übereinstimmung mit den nach Jönsson berechneten Absorptionskoeffizienten, wenn man dem Kollodium eine „effektive Ordnungszahl" 7,4 zuschrieb, wie sie auch nach

---

* Direkte Messungen dieser Zahl liegen nur für härtere Röntgenstrahlen vor: H. Kulenkampff (Ann. d. Phys. **79**, 97, 1926) fand von 6000 Volt Röhrenspannung aufwärts den Wert 35,5 e-Volt. Man kann jedoch auch die Messungen an Elektronenstrahlen hierfür heranziehen. Da die K-Ionisierungsarbeit für Stickstoff 400 e-Volt beträgt, haben wir in unserem Falle mit Photoelektronen von 1500 — 400 = 1100 e-Volt zu rechnen. Für solche findet man nach Messungen von G. A. Anslow (Phys. Rev. **25**, 484, 1925) als Energieverbrauch 25 e-Volt, während J. F. Lehmann und T. H. Osgood (Proc. Roy. Soc. **115**, 609, 1927) zwischen 200 und 1000 e-Volt einen konstanten Energieverbrauch von 45 e-Volt messen. Die 400 e-Volt Anregungsenergie des Stickstoffs gehen durch innere Absorption der N K-Strahlung ebenfalls praktisch vollständig in Elektronen von rund 400 Volt über. In Anbetracht der Unvollkommenheit der vorliegenden Versuchsdaten schien es uns am richtigsten, den Kulenkampffschen Wert für den Energieverbrauch extrapolatorisch zu verwenden.

** Hieraus berechnet sich, daß der Zähler auf jedes siebente bis achte eintretende Al K-Quant ansprach. Dies ist auch nach früheren Versuchen etwa zu erwarten (W. Bothe, ZS. f. Phys. **37**, 547, 1926).

der chemischen Konstitution etwa zu erwarten ist. Die Tabelle 4 enthält in Spalte 3* die Zahl der beobachteten Ausschläge pro Minute und pro Milligramm Ra-Äquivalent der Strahlungsquelle für eine Luftreichweite der α-Strahlen von 3,85 cm, nur korrigiert für die Selbstabsorption (Ziffer 3). Spalte 4 enthält die hieraus und aus den in Spalte 2 aufgeführten Fensterdicken in der angegebenen Weise berechneten auffallenden Intensitäten.

Tabelle 4.

1. Strahlung	2. Fensterdicke mg/cm²	3. I/min . mg	4. I auffall.	5. Empf. E	6. Relative Ausbeute	7. Absolute Ausbeute pro 1000 α
Mg K	3,28 Al	1510	9400	0,88	10 700	54
Al K	8,17 Al	453	8750	0,78	11 200	56
S K	4,6 Koll. + 0,2 Al	477	3140	0,38	8 300	42
Ca K	4,6 Koll. + 0,2 Al	1250	2110	0,73	2 900	15
Fe K	9,5 Al	91	221	0,255	870	4,7
	5,7 Al	150	256	0,255	1 000	
Zn K	5,7 Al	45	57	0,118	480	2,4
Se K	17,0 Al	etwa 8	11	0,058	190	etwa 1,0
Se L	5,7 Al	545	6760	0,83	8 140	41
Mo L	4,6 Koll. + 0,2 Al	563	2740	0,38	7 200	36
Pd L	4,6 Koll. + 0,2 Al	552	1290	0,252	5 100	26
Sn L	4,6 Koll. + 0,2 Al	1560	2740	0,80	3 430	17
Sb L	4,6 Koll. + 0,2 Al	1270	1880	0,76	2 470	12
Ta L	9,5 Al	54	86	0,137	630	3,2
Ir L	9,5 Al	48	72	0,101	710	3,6
Au L	9,5 Al	24	32	0,086	370	1,9
Bi L	4,6 Koll. + 5,6 Al	etwa 14	17	0,063	270	etwa 1,4

Weiter mußte die Abhängigkeit der Quantenempfindlichkeit des Zählers von der Wellenlänge bekannt sein. Hierzu wurde folgende Annahme gemacht, welche von der Wirklichkeit nicht allzu weit entfernt sein dürfte. Die Empfindlichkeit, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß der Zähler auf ein durch das Fenster eintretendes Strahlungsquant anspricht, ist proportional der Wahrscheinlichkeit, daß ein Quant in einer gewissen „wirksamen Schicht“ des Füllgases ein Photoelektron erzeugt,

* Wo die Zahlen der Spalte 3 für eine direkte Bestimmung zu groß waren, wurde die Intensität der Röntgenstrahlen in bekanntem Verhältnis herabgesetzt.

mit anderen Worten, die Empfindlichkeit ist proportional dem in der wirksamen Gasschicht absorbierten Bruchteil der einfallenden Strahlung*; dieser ist

$$E = 1 - e^{-\mu_A d},$$

wo μ_A der Absorptionskoeffizient im Füllgas, d die wirksame Schichtdicke ist. Auf Grund der früher gefundenen Form des wirksamen Bereiches eines Spitzenzählers** wurde $d = 1$ cm geschätzt; im übrigen hängt das Resultat nicht sehr stark von der Wahl von d ab. Diese relativen Empfindlichkeiten sind in Spalte 5 der Tabelle 4 aufgeführt. Schließlich erhält man die relativen Ausbeuten durch Division der Zahlen in Spalte 4 und 5; sie sind in Spalte 6 eingetragen. Legt man dann noch den in Ziffer 5 gefundenen Absolutwert für die Ausbeute an Al K-Strahlung zugrunde, so berechnen sich die in Spalte 7 eingetragenen Absolutwerte für die übrigen Strahlungen. Sie stellen die Zahlen der von je 1000 α-Teilchen von 3,85 cm Reichweite längs ihrer ganzen Bahn erregten Quanten dar. In Fig. 15 sind sie graphisch gegen die Ordnungszahl und die Wellenlänge der zugehörigen Absorptionskante aufgetragen. Ihrer ganzen Herleitung nach können diese Zahlen kaum mehr als die Größenordnung richtig wiedergeben. Der allgemeine Gang dürfte jedoch gesichert sein, er bleibt selbst bei sehr verschiedenen Annahmen über die Empfindlichkeit des Zählers erhalten.

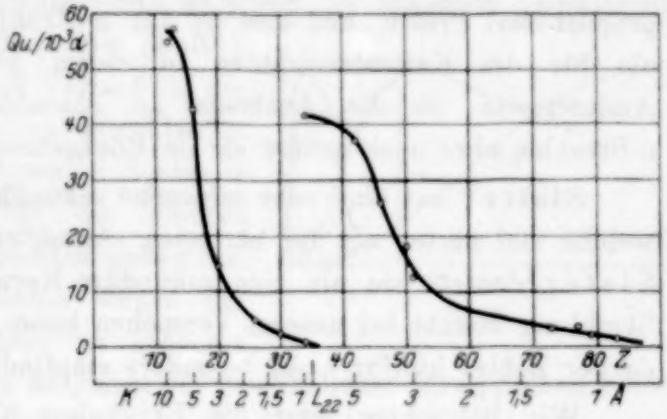


Fig. 15.

7. Diskussion der Ergebnisse. In Ziffer 2 wurde gezeigt, daß die α-Strahlen keine Bremsstrahlung erzeugen, welche nach Härte und Intensität mit der charakteristischen Strahlung vergleichbar wäre. Hierin

* Die infolge „innerer Absorption" der charakteristischen Argonstrahlung entstehenden „Photoelektronen zweiter Art", welche nach Auger z. B. jede K-Ionisation eines Argonatoms mit fast 100% Wahrscheinlichkeit begleiten, bedeuten natürlich keine Komplikation, denn sie treten praktisch gleichzeitig mit den eigentlichen Photoelektronen auf und können daher höchstens die Größe der Zählerausschläge, nicht aber ihre Zahl beeinflussen.

** W. Bothe, ZS. f. Phys. **37**, 563, 1926.

liegt ein Unterschied gegenüber den Elektronenstrahlen, für welche, allgemein gesprochen, das Bremsspektrum eine Intensität von derselben Größenordnung wie das charakteristische Spektrum hat. Dieser Unterschied beruht auf der großen Masse des α-Teilchens; er ist leicht zu verstehen auf Grund der bekannten Vorstellungen, welche man sich über die Entstehung des Bremsspektrums gebildet hat. Man kann nämlich folgende grobe Überschlagsrechnung anstellen. Nach dem klassischen Ansatz von Sommerfeld ist die von einem Strahlenteilchen während eines Atomzusammenstoßes ausgestrahlte Energie bestimmt durch das Integral über die Bremszeit

$$\int e^2 \dot{v}^2 \, dt$$

(e, m, v = Ladung, Masse und Geschwindigkeit des Strahlenteilchens). Nun ist bei gleicher Stoßkonfiguration die Beschleunigung $\dot{v}$ proportional e/m, ferner die Bremszeit proportional $1/v$, also der obige Ausdruck proportional $e^4/m^2 v$, und dies ist für α-Strahlen einige 10^5 mal kleiner als für die Kathodenstrahlen in einem gewöhnlichen Röntgenrohr. Andererseits ist die Ausbeute an charakteristischer Strahlung für α-Strahlen eher noch größer als im Röntgenrohr (Ziffer 6).

Slater* hat eine sehr schwache sekundäre γ-Strahlung beobachtet, welche viel härter als die härtesten charakteristischen Strahlungen ist; Slater deutete sie als eine sekundäre Kernstrahlung. Eine so harte Strahlung konnte bei unseren Versuchen kaum zur Beobachtung gelangen, da der Zähler hierfür nicht besonders empfindlich ist.

Wir betrachten jetzt die Ergebnisse über die Intensität der charakteristischen Röntgenstrahlung. Der Primärvorgang bei der Anregung ist ein Ionisationsprozeß. Jedes ausgesandte Quant der K-Serie zeigt z. B. an, daß ein Atom in der K-Schale ionisiert wurde. Dagegen kann man nicht sagen, daß jedes in der K-Schale ionisierte Atom auch ein K-Quant aussenden muß. Wie nämlich Rosseland** theoretisch und L. Meitner und Auger*** experimentell gezeigt haben, besteht eine beträchtliche Wahrscheinlichkeit, daß ein in der K-Schale angeregtes Atom unter Aussendung nicht eines K-Quants, sondern eines Elektrons in den Grundzustand zurückkehrt, so, als ob das ursprünglich entstehende Strahlungsquant schon im selben Atom in einer weiter „außen“ liegenden Schale wieder absorbiert würde. Die Wahrscheinlichkeit dieser „inneren

---

* F. P. Slater, a. a. O.

** S. Rosseland, ZS. f. Phys. **14**, 173, 1923.

*** L. Meitner, ebenda **17**, 60, 1923; P. Auger, C. R. **177**, 169, 1923.

Absorption" steigt mit abnehmender Ordnungszahl an*. Dagegen ist mit einiger Sicherheit anzunehmen, daß diese Wahrscheinlichkeit für ein gegebenes Element unabhängig ist von der Art der Anregung, insbesondere also in unserem Falle unabhängig von der Geschwindigkeit der anregenden α-Strahlen. Daher können unsere Kurven für die differentiale Anregung (Fig. 11 und 12) unmittelbar als „differentiale Ionisationskurven" für die *K*- und *L*-Schalen aufgefaßt und als solche diskutiert werden.

Es liegt nahe, nach Analogien mit der gewöhnlichen Gesamtionisation durch α-Strahlen zu suchen, wie man sie mißt, wenn man α-Strahlen unmittelbar in eine Ionisationskammer eintreten läßt. Diese ist fast ausschließlich auf Rechnung der äußeren, leicht gebundenen Atomelektronen zu setzen, die inneren Elektronen liefern nur einen sehr kleinen Beitrag dazu (jedes α-Teilchen von Polonium erzeugt insgesamt etwa 50000 primäre Ionenpaare). Die differentiale Gesamtionisation in Abhängigkeit von der α-Reichweite ist durch die bekannte „Braggsche Kurve" gegeben (Fig. 16, Kurve „Luft"). Ganz ähnlich ist auch der Verlauf für die Ionisation durch Elektronenstrahlen**. Man wird erwarten können, daß ebenso die Ionisationskurven für die inneren Atomelektronen ein Maximum aufweisen, nur wird dieses Maximum wegen der größeren Ionisierungsarbeit bei größeren α-Reichweiten liegen, als dasjenige der gewöhnlichen Braggschen Kurve. Man wird daher nicht fehlgehen, wenn man sich die hier gewonnenen Kurven in der in Fig. 16 schematisch dargestellten Weise ergänzt denkt. Hiernach gehören die beobachteten Kurventeile ausschließlich dem aufsteigenden Ast der Braggschen Kurve an. Das Umbiegen zum Maximum ist nur in der Al*K*-Kurve zu erkennen; in der Tat ist Al dasjenige der untersuchten Elemente, bei welchem die in Betracht kommende Ionisierungsspannung am kleinsten ist (1550 Volt).

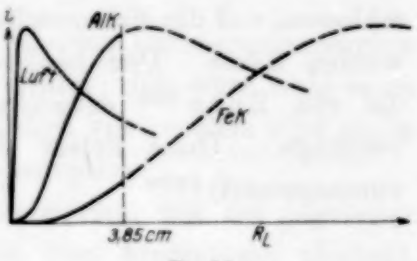


Fig. 16.

---

* P. Auger, C. R. **180**, 65, 1925; **182**, 773, 1926; Ann. de phys. **6**, 229, 1926; W. Kossel, ZS. f. Phys. **19**, 333, 1923; W. Bothe, Phys. ZS. **26**, 410, 473, 1925. Zur theoretischen Deutung dieses Verhaltens vgl. G. Wentzel, ZS. f. Phys. **43**, 524, 1927.

** Auch die differentiale Anregungsfunktion für langwellige Spektrallinien zeigt ein Maximum, welches demjenigen der Braggschen Kurve analog sein dürfte; vgl. Franck und Jordan, Handb. d. Phys. XXIII, 723, 1926; W. Hanle, Die Naturwissensch. **15**, 832, 1927; P. Bricout, Journ. de phys. et le Radium **9**, 88, 1928.

Gerade dieser Anfangsteil der Ionisierungskurve ist nun von besonderem Interesse im Hinblick auf die Frage nach der Ionisierungs- und Anregungsgrenze. Nach der von J. J. Thomson* auf klassischer Grundlage entwickelten Theorie der Ionisation sollte die Minimalenergie, welche das Strahlenteilchen zur Anregung besitzen muß, den Wert haben

$$T_{\text{min.}} = \frac{(m+\mu)^2}{4\,m\,\mu}\,W \tag{5}$$

(m = Teilchenmasse, μ = Elektronenmasse, W = Ionisierungsenergie).

Dies entspricht beim Aluminium einer minimalen α-Reichweite von 1,6 cm beim Ca, Fe und Ta würde diese Minimalreichweite sogar größer als die volle Reichweite der α-Strahlen des Poloniums sein, d. h. bei diesen Elementen dürften die beobachteten Strahlungen überhaupt nicht auftreten. Somit versagt die Thomsonsche Theorie, welche sich in anderen Bereichen bewährt hat, in der Nähe der Anregungsgrenze. Auf diesen Umstand hat früher schon Gerthsen** hingewiesen und daraus geschlossen, daß die Bahngeschwindigkeit der Atomelektronen berücksichtigt werden müsse. Dem heutigen Stande der Atomtheorie angemessener ist die von Born*** entwickelte quantenmechanische Theorie der Stoßvorgänge. Diese liefert als Ionisationsgrenze (unendliche Kernmasse vorausgesetzt)****

$$T_{\text{min.}} = W. \tag{6}$$

Die entsprechenden Minimalreichweiten sind nun in allen Fällen unmeßbar klein, sie betragen nur kleine Bruchteile eines Millimeters. Obwohl unsere Messungen wegen Intensitätsmangels nicht annähernd bis zu so kleinen Reichweiten ausgedehnt werden konnten, ist doch der ganze Verlauf der Ionisationskurven durchaus im Einklang mit einem solchen Ergebnis. Somit gehören die hier untersuchten Erscheinungen zu denjenigen, deren theoretische Behandlung der neuen Quantenmechanik vorbehalten ist. Dabei sind im Gegensatz zu der äußeren Ionisation, welche durch die große Mannigfaltigkeit der Übergangsmöglichkeiten, sekundäre Prozesse usw. kompliziert wird, die hier in Frage stehenden Vorgänge von besonderer Einfachheit und daher zur Prüfung der quantenmecha-

---

* J. J. Thomson, Phil. Mag. **23**, 449, 1912.

** C. Gerthsen, ZS. f. Phys. **36**, 540, 1926.

*** M. Born, ebenda **38**, 803, 1926; Götting. Nachr. 1926, S. 146.

**** Der Unterschied zwischen den beiden Theorien kann kurz so formuliert werden, daß bei Thomson die positiven Atomladungen in keiner Weise an dem eigentlichen Stoßprozeß teilnehmen, während man nach Born annehmen muß, daß auch der Atomkern in direkte Wechselwirkung mit dem Strahlenteilchen tritt.

nischen Stoßtheorie vielleicht besonders geeignet. Die Ansätze hierfür liegen bereits in einer Arbeit von Elsasser vor*.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß für Elektronenstrahlen die beiden Ausdrücke (5) und (6) für die Ionisationsgrenze zusammenfallen, so daß dieser Fall weniger charakteristisch ist als derjenige der α-Ionisation.

Auf die absolute Stärke der Ionisation und ihre Materialabhängigkeit lassen sich aus unseren Intensitätsmessungen nur unbestimmte Schlüsse ziehen, da hierbei die innere Absorption eine entscheidende Rolle spielt. Für die Argon-*K*-Strahlung beträgt z. B. die Wahrscheinlichkeit der inneren Absorption nach Auger** 0,93; mit zunehmender Ordnungszahl also zunehmender Ionisierungsarbeit nimmt sie ab. Da sich andererseits in Ziffer 6 (Fig. 15) ein allgemeiner Anstieg der Quantenausbeute mit abnehmender Ordnungszahl ergeben hat, muß erst recht die totale *K*- und *L*-Ionisation stark ansteigen. Aus allgemeinen Überlegungen heraus ist dies durchaus verständlich.

Es hat übrigens den Anschein, daß bei kleinen Ionisierungsenergien der Anstieg der Quantenausbeute langsamer erfolgt; dies wäre wohl so zu deuten, daß der Anstieg der Ionisation allmählich kompensiert wird durch einen noch stärkeren Anstieg der inneren Absorption.

Schließlich kann man noch die Frage aufwerfen, wie bei gegebener Ionisierungsarbeit die erregte Intensität von dem Atomniveau abhängt. Aus Fig. 15 ist z. B. zu ersehen, daß die S *K*-Kante nahe mit der Mo L_{22}-Kante, die Ca *K*-Kante mit der Sb L_{33}-Kante zusammenfällt, und daß in beiden Fällen die zugehörigen Röntgenintensitäten etwa gleich groß sind. Dies ist sehr auffällig, da die Zahl der *L*-Elektronen viermal so groß wie die der *K*-Elektronen ist. Man könnte hiernach vermuten, daß die *L*-Strahlung eine viel stärkere innere Absorption erleidet als die entsprechende *K*-Strahlung. Dies scheint jedoch nach Augers Versuchen nicht der Fall zu sein. So muß man schließen, daß die mittlere Ionisierungswahrscheinlichkeit für ein *L*-Elektron erheblich kleiner ist als für ein *K*-Elektron mit gleicher Ionisierungsenergie.

Zusammenfassung. Die Anregung der *K*-, *L*- und *M*-Strahlung durch α-Strahlen von Polonium wird in dem Wellenlängenbereich von 1,1 bis 10 Å an einer größeren Zahl von Elementen mittels des Spitzenzählers nachgewiesen. Eine merkliche Bremsstrahlung tritt, wie zu erwarten, nicht auf.

* W. Elsasser, ZS. f. Phys. **45**, 522, 1927.

** P. Auger, a. a. O.

Die K- und L-Anregungskurven für α-Strahlen werden an einigen Elementen aufgenommen und bezüglich ihrer Analogie mit der Braggschen Kurve diskutiert.

Hinsichtlich der Anregungsgrenze widersprechen die Ergebnisse der Thomsonschen Theorie der Ionisation, nicht aber der Bornschen Quantenmechanik der Stoßvorgänge.

Die Ausbeute an Al K-Strahlung wird nach der Ionisationsmethode absolut gemessen. Die Ausbeuten für die übrigen charakteristischen Strahlungen werden hieran angeschlossen, indem plausible Annahmen über die Empfindlichkeit des Zählers als Funktion der Wellenlänge gemacht werden.

Es ergibt sich für die K- und L-Strahlung ein allgemeiner Abfall der Ausbeute mit zunehmender Ordnungszahl. Dasselbe gilt a fortiori für die totale K- und L-Ionisation.

Die mittlere Ionisierungswahrscheinlichkeit ist für ein L-Elektron wesentlich kleiner als für ein K-Elektron mit gleicher Ionisierungsenergie.

Nachtrag bei der Korrektur. In einer kürzlich erschienenen Arbeit beschreibt E. Lorenz* interressante Versuche über die Anregung der Al K-Strahlung durch Kathodenstrahlen. Diese Versuche sind den unseren mit α-Strahlen ganz analog. Es zeigt sich, daß die differentiale Anregungskurve auch in diesem Falle ein ausgeprägtes Maximum hat. Während aber nach unseren Messungen das Maximum bei α-Anregung selbst mit der 3000fachen Anregungsenergie noch nicht erreicht wird, tritt es nach Lorenz bei Elektronenanregung schon für die 10 bis 11fache Anregungsenergie ein.

Charlottenburg, Oktober 1928.

---

* E. Lorenz, ZS. f. Phys. **51**, 71, 1928.

Zur Theorie der Elektronenstreuung und der Stoßerregung.

Von **J. Holtsmark** in Trondhjem.

(Eingegangen am 29. Oktober 1928.)

Aus den Eigenfunktionen eines Systems, bestehend aus einem Atom und einem Elektron, wird eine der Wellengleichung des Systems befriedigende Lösung aufgebaut, die im Unendlichen in eine ebene Welle und gestreute Kugelwellen zerfällt. Es wird ein System von unendlich vielen Differentialgleichungen aufgestellt, deren Lösungen die gestreuten Wellen darstellen. Aus der Intensität der Wellen findet man in bekannter Weise die Streustrahlung und die Anregungswahrscheinlichkeit. Es wird gezeigt, daß das Problem immer auf ein dreidimensionales zurückgeführt werden kann. Während des Streuprozesses sind im allgemeinen alle Eigenfunktionen des Atoms angeregt, diese Anregung kann durch eine Änderung des Atomfeldes ersetzt werden (Polarisation des Atoms). Dauernd können nur solche Eigenfunktionen angeregt werden, zu deren Anregung die Energie des Elektrons ausreichend war. Auch bei strenger Lösung des Problems gelangt man zu der früher von Faxén und dem Verfasser behandelten Differentialgleichung. Sowohl die elastisch gestreute als auch die durch einen unelastischen Stoß gestreute Elektronenstrahlung sind als Wellen darstellbar, die sich in einem Medium mit einem Brechungsindex bewegen. Letzterer wird durch das Feld des Atoms in demjenigen Zustand bestimmt, in den es durch den Stoß versetzt wurde. Eine bestimmte Streustrahlung entsteht durch Quellen, die aus den Produkten der Strahlung der übrigen Zustände mit den entsprechenden Entwicklungskoeffizienten des Atomfeldes nach den Atomeigenfunktionen bestehen.

§ 1. Die Theorie der Streuung und der Stoßerregung ist seit der ersten Arbeit Borns* mehrfach behandelt worden. So hat Dirac** die Bornsche Methode, die eine Darstellung der gestreuten Elektronenstrahlung in den Koordinaten sucht, auf eine Darstellung in Impulsen umgedeutet. Die Resultate dieser beiden Arbeiten sind völlig äquivalent, weil dieselben Vernachlässigungen und dasselbe Lösungsverfahren benutzt werden. Die Arbeit Borns wurde von Elsasser*** fortgeführt. Mensing**** versuchte den Stoß langsamer Elektronen an einer geladenen Kugelschale streng durchzurechnen, und fand, daß diese Näherung eine zu grobe ist, um quantitative Aussagen zu gestatten. Faxén und der Verfasser†, †† berechneten streng die Streuung langsamer Elektronen an einem festen Atomfeld, die Rechnung ergab Kurven für die Abhängigkeit

* M. Born, ZS. f. Phys. **37**, 863, **38**, 803, 1926.
** P. M. Dirac, ZS. f. Phys. **44**, 585, 1927.
*** W. Elsasser, ZS. f. Phys. **45**, 522, 1927.
**** L. Mensing, ZS. f. Phys. **45**, 603, 1927.
† H. Faxén und J. Holtsmark, ZS. f. Phys. **45**, 307, 1927 (mit l. c. I zitiert).
†† J. Holtsmark, ZS. f. Phys. **48**, 231, 1928.

des Wirkungsquerschnitts von der Elektronengeschwindigkeit, die den experimentellen nahe kommen. Oppenheimer hat in einer kurzen Notiz* den Einfluß der Resonanz zwischen dem freien und dem gebundenen Elektron besprochen und hat weiterhin die Polarisation** der erregten Strahlung untersucht. Wir wollen im folgenden versuchen, die Theorie soweit wie möglich ohne Vernachlässigungen aufzustellen, und werden dabei auf die erwähnten Arbeiten im einzelnen zurückkommen.

§ 2. Der Einfachheit halber wollen wir von vornherein das Problem dadurch einschränken, daß wir den Elektronenspin und die Bewegung der Kernmasse vernachlässigen, das streuende Atom soll ein neutrales Wasserstoffatom sein, und der betrachtete unendliche Raum soll nur dieses Wasserstoffatom und ein freies Elektron enthalten. Dieses Problem ist entartet***, die Lösung des Problems kann daher nur durch Auferlegung von Randbedingungen eindeutig gemacht werden, so daß sie wesentlich von diesen willkürlich vorgeschriebenen Randbedingungen abhängt. Unsere Aufgabe ist es, solche Randbedingungen aufzustellen, die mit dem Experiment verträglich sind, und die dazugehörige Lösung zu finden. Wir bemerken sogleich, daß eben diese Entartung es ermöglicht, einen Elektronenstrom bei gleichbleibender Gesamtenergie durch Superposition mehrerer Eigenfunktionen zu konstruieren, indem wir die Lösung aus lauter stationären Wellen aufbauen, durch deren gleichzeitiges Bestehen die Strahlung entsteht.

§ 3. Unsere Lösung könnten wir uns zunächst aus einem Atom und einem in unendlicher Ferne befindlichen, sich auf das Atom zu bewegenden Wellenzug zusammengesetzt denken. Im Laufe der Zeit würde der Wellenzug das Atom passieren und dadurch mehr oder weniger zerstört werden, ebenso würde im Atom im allgemeinen eine Änderung eintreten. Eine solche Problemstellung führt aber zu außerordentlich komplizierten mathematischen Verhältnissen, und wir wollen daher in genauer Analogie zu der Berechnung der Beugung an optischen Gittern oder der Streuung von Lichtwellen an Hindernissen eine unendliche ebene Welle betrachten, die sich fortwährend am Atom vorbeibewegt. Eine solche Welle ist wohl in einem bestimmten Moment, aber für keine endliche Zeit mit der Differentialgleichung verträglich, wir müssen daher andere Wellen hinzuaddieren, so daß die gesamte Wellenbewegung eine Lösung darstellt****.

---

* J. R. Oppenheimer, Proc. Nat. Acad. Amer. **14**, 261, 1928.

** J. R. Oppenheimer, ebenda **13**, 800, 1927.

*** Vgl. M. Born, l. c.

**** Dasselbe suchen auch Born und Dirac. Ihre erste Näherung gibt das Verhalten der Welle, wie sie sein würde, wenn plötzlich das Atomfeld eingeschaltet wird, unmittelbar nach diesem Einschalten (vgl. § 6).

§ 4. Das Atom sei in seinem dreidimensionalen Raum x_1, y_1, z_1 durch die Eigenfunktionen und Eigenwerte

$$\psi_n^a, \quad W_n^a \tag{4,1}$$

gekennzeichnet. Das darauffallende Elektron sei als ebene unendliche Welle angesetzt:

$$e^{i(p x_2 - W t)}, \qquad W = \tfrac{1}{2} p^2, \tag{4,2}$$

d. h. die Lösung soll für $x_2 = \pm \infty$ in diese Welle übergehen. Die wirkliche Lösung ist natürlich nicht die Summe dieser beiden, sondern ein komplizierter sechsdimensionaler Ausdruck. Wenn wir die Lösung auf den dreidimensionalen Raum des Atomelektrons projizieren, so werden wir im allgemeinen finden, daß diese Projektion eine Funktion darstellt, die nach dem Eigenfunktionsystem ψ_n^a aufgelöst, aus vielen solchen aufgebaut ist. Man muß dies so deuten, daß bei Vorhandensein des zweiten Elektrons gewisse Wahrscheinlichkeiten auftreten, daß andere Eigenfunktionen des Atoms angeregt werden; die Koeffizienten der oben angedeuteten Entwicklung müssen in direkter Beziehung zu den Verweilzeiten stehen (vgl. § 6), und damit zu den Übergangswahrscheinlichkeiten. Suchen wir also diese Entwicklung.

§ 5. Alle Einheiten sollen nach Hartree* gewählt werden.

Einheit der Länge $= a_0 =$ Radius des H-Atoms,
Einheit der Masse $= \mu =$ Masse des Elektrons,
Einheit der Ladung $= \varepsilon =$ Ladung des Elektrons (mit positivem Zeichen),
Einheit der Energie $= \dfrac{2\varepsilon^2}{a_0} =$ zweifache Ionisationsenergie des H-Atoms.

Dann lautet die Wellengleichung des Gesamtsystems

$$(\Delta^a + \Delta^e)\psi + 2(\Phi^a + \Phi)\psi = 2i\frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{5,1}$$

Hier beziehen sich die Operatoren Δ^a bzw. Δ^e auf die Koordinaten des Atomelektrons bzw. des freien Elektrons, während

$$\Phi^a = \frac{1}{r_a},$$
$$\Phi = \frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_{ea}}, \tag{5,2}$$

$r_a =$ Abstand Kern–Atomelektron,
$r_e =$ Abstand Kern–freies Elektron,
$r_{ea} =$ Abstand der beiden Elektronen.

* D. R. Hartree, Proc. Camb. Phil. Soc. **24**, 89, 1928, Nr. 1.

Wir setzen als Lösung an eine Summe aus Produkten je einer normierten Eigenfunktion des neutralen Atoms: $\psi_n^a e^{i W_n^a t}$, die der Gleichung

$$\Delta^a \psi_n^a + 2 \Phi^a \psi_n^a = - 2 W_n^a \psi_n^a = 2 i \frac{\partial \psi_n^a}{\partial t} \tag{5,3}$$

genügt und einer Funktion von den Koordinaten des zweiten Elektrons und der Zeit ψ_n^e. Die Gesamtheit der Koordinaten des Atomelektrons bezeichnen wir kurz mit x_1, diejenigen des freien Elektrons mit x_2, also $dx_1 = (dx_1\, dy_1\, dz_1)$ usw. Setzen wir also in (5,1)

$$\psi = \sum_n \psi_n^a (x_1)\, \psi_n^e (x_2, t)\, e^{i W_n^a t}, \tag{5,4}$$

so folgt mit Benutzung von 5,3:

$$\sum_n \left\{ \psi_n^a \Delta \psi_n^e e^{i W_n^a t} + 2 \Phi \psi_n^a \psi_n^e e^{i W_n^a t} \right\} = \sum_n i \psi_n^a \frac{\partial \psi_n^e}{\partial t} e^{i W_n^a t}. \tag{5,5}$$

Das Summenzeichen muß hier und im folgenden in der Bezeichnungsweise von P. Jordan auch eine Integration über das Streckenspektrum einschließen. Hieraus gewinnen wir in üblicher Weise durch Multiplikation mit $\tilde{\psi}_{n'}^a e^{-i W_{n'}^a t}$ und Integration über dx_1 wegen der Orthogonalität und Normierung der ψ_n^a das Gleichungssystem

$$\Delta \psi_{n'}^e + \sum_n \int \tilde{\psi}_{n'}^a \psi_n^a \cdot 2 \Phi \cdot e^{i \left(W_n^a - W_{n'}^a \right) t} dx_1 \cdot \psi_n^e = i \frac{\partial \psi_{n'}^e}{\partial t}. \tag{5,6}$$

Die Integrale sind die Entwicklungskoeffizienten des „Störungsfeldes“ 2Φ nach den Atomeigenfunktionen. Wir bezeichnen sie mit $\Phi_{n n'}$, dann haben wir die den Diracschen analogen Gleichungen

$$\Delta \psi_{n'}^e + \sum_n 2 \Phi_{n n'} e^{i \left(W_n^a - W_{n'}^a \right) t} \psi_n^e = 2 i \frac{\partial \psi_{n'}^e}{\partial t}, \tag{5,7}$$

in welchen wir jedoch keine Auflösung der Funktionen $\psi_{n'}^e$ nach Eigenfunktionen vorgenommen haben.

Wir suchen sodann solche Funktionen $\psi_n^e (x_2, t)$, daß ψ das Produkt einer Funktion von x_1 und x_2 mit einer Funktion von t wird, dann sind (5,4) die Eigenlösungen des Systems (5,7).

Dies wird geleistet, wenn man

$$\psi_n^e (x_2 t) = \chi_n^e (x_2)\, e^{i \left[W_0 - \left(W_n^a - W_{n'}^a \right) \right] t} \tag{5,8}$$

setzt, wir erhalten dann nach Vertauschung von n und n' das neue Gleichungssystem

$$\Delta \chi_n^e (x_2) + \sum_{n'} 2 \Phi_{n' n} \chi_{n'} (x_2)$$

$$= - 2 \left[W_0 - \left(W_{n'}^a - W_n^a \right) \right] \chi_n (x_2) = - 2 W_n^e \chi_n (x_2) \tag{5,9}$$

W_0 ist die Gesamtenergie des Systems Atom + Elektron.

In den Gleichungen (5,9) ist die Elektronenresonanz und die Rückwirkung des Elektrons auf das Atom berücksichtigt, dagegen nicht der Elektronenmagnetismus.

§ 6. Betrachten wir jetzt das System (5,9), so kann man zunächst direkt aus der Form der Gleichungen schließen, daß in großer Entfernung vom Kern nur solche Funktionen χ_n merklich sind, die positiver Energie $W_0 - (W^a_{n'} - W^a_n)$ entsprechen. Denn in großer Entfernung verschwinden sämtliche $\Phi_{n'n}$ und wir haben unendlich viele Gleichungen des freien Elektrons. Ihre Lösungen müssen bei negativer Energie exponentiell gegen das Unendliche abfallen, nur das Vorhandensein der $\Phi_{n'n}$ in der Nähe des Nullpunkts bewahrt sie vor identischem Verschwinden. Es können also nur energetisch mögliche Anregungen dauernd bestehen bleiben.

Die Wahrscheinlichkeit, daß das Atom im Zustand n ist, ist definiert durch

$$\frac{\int \chi_n \bar{\chi}_n \, d x_2}{\sum_n \int \chi_n \bar{\chi}_n \, d x_2}, \tag{6,1}$$

da aber das Lösungssystem zu (5,9) ohne besondere Grenz- oder Anfangsbedingungen nur bis auf eine willkürliche lineare Transformation bestimmt ist, hat diese Relation vorläufig keinen Wert. Die in (6,1) auftretenden Integrale sind zum Teil divergent, nach Born können wir die Integration über den Raum x_2 durch die Integration über die Kugelfläche im großen Abstand R ersetzen. Dieses Integral ist konvergent und gibt das mittlere Amplitudenquadrat der Wellen, daraus findet man die Strömung durch Multiplikation mit p. Wir bemerken, daß man sich physikalisch den Inhalt der Gleichungen (5,9) so deuten kann: Die Wellen des freien Elektrons bewegen sich mit der Energie $W^e_n = W_0 - (W^a_{n'} - W^a_{n'})$ in einem Felde, wo das Quadrat des Brechungsindex durch

$$2 W^i_n + 2 \Phi_{nn}$$

gegeben ist, also in einem Felde, das durch das Atom in demjenigen Zustand hervorgebracht ist, in den es durch den Stoß versetzt wurde. Die Quellen der Strahlung werden aber durch die übrigen, $\chi_{n'}$ aber nicht χ_n enthaltenden Glieder gebildet, diese Glieder sind proportional zu den Matrixelementen der Übergänge $2\Phi_{n'n}$ und zu der Stärke der Erregung $\chi_{n'}$ in den anderen Zuständen. Dies Bild ist jedoch nur angenähert richtig, man muß noch hinzufügen, daß die Erregung der verschiedenen Zustände sich gegenseitig so beeinflußt, daß das Gleichungssystem wirklich befriedigt wird.

Die Lösungen von (5,9) sind zweierlei Art. Bei positiver Energie W_n^s ist χ_n^s eine stehende Welle, die asymptotisch in irgendwelche stehende Wellen mit der Energie W_n^s übergeht. Im Bereich des Atomfeldes erleidet die Welle eine kontinuierliche Phasen- und Amplitudenänderung gegenüber einer gedachten Welle, die sich ohne Atomfeld bewegt und asymptotisch in dieselbe wirkliche Welle übergehen würde. Wenn W_n^s negativ ist, so ist χ_n^s eine „Welle", die außerhalb des Atoms exponentiell abfällt und innerhalb des Atoms ähnlich wie die vorhin betrachtete verläuft. Im allgemeinen sind also alle Eigenfunktionen des Atoms angeregt, d. h. das Atomelektron wird durch das fremde Elektron vorübergehend für kurze Zeit in andere Zustände gebracht, oder man sagt lieber, es wird in seiner Bindung gelockert. Die „Resonanz" ergibt nur, daß die asymptotischen Wellengruppen sowohl aus dem einen wie aus dem anderen Elektron gebildet werden, das Verhältnis der beiden ist in der stehenden Welle völlig unbestimmt und kann nur durch die Randbedingungen festgelegt werden, hat aber auch keine Wirkung auf das Streuvermögen, die nicht mit (5,9) verträglich ist.

Die von verschiedenen Seiten gemachten Ansätze zur Lösung des Streuproblems in (5,9) beruhen auf wesentlichen Vernachlässigungen. Wir erhalten z. B. die Born-Diracsche Näherung, wenn wir links alle Glieder vernachlässigen, die nicht zu dem gerade betrachteten Übergang gehören, das übrigbleibende χ_n enthaltende Glied als inhomogenen Teil betrachten und darin für χ_n die ursprüngliche ebene Welle einsetzen. Die Born-Diracsche Näherung vernachlässigt demnach sowohl die Wirkung des Elektrons auf das Atom wie die Änderung der Welle durch das Atomfeld, sie dürfte daher in erster Näherung die Streuung darstellen, wie sie bei plötzlichem Einschalten des Atomfeldes unmittelbar nach diesem Einschalten sein würde. Die Näherung von Oppenheimer berücksichtigt die Rückwirkung des Elektrons auf das Atom, gibt aber auch das Verhalten unmittelbar nach Einschaltung des Feldes wieder. Wegen des sehr hohen Brechungsindex im Atomfeld ist diese erste Näherung völlig verschieden vom endgültigen Zustand*.

§ 7. Die Randbedingungen des Systems (5 9) sind:

1. Die χ_n müssen überall endlich sein;
2. Im Unendlichen sollen die χ_n eine ebene Welle und auslaufende Kugelwellen darstellen.

---

* Die schlechte Konvergenz des Verfahrens der sukzessiven Approximation dürfte wohl darauf beruhen, daß die erhaltenen Reihen wie Exponentialreihen konvergieren.

Die Koeffizienten $\Phi_{n'n}$ sind im Nullpunkt des r_s

$$\lim_{r_s \to 0} \Phi_{nn} = \frac{2}{r_s}, \tag{7,1}$$

$$\lim_{r_s \to 0} \Phi_{n'n} = \text{const} \cdot f(\vartheta_s \varphi_s), \qquad n' \neq n,$$

wie man leicht bestätigt; es haben also nur die Φ_{nn} dort einen einfachen Pol.

Die Funktionen χ_n^s sind Funktionen von r_s und den Polarwinkeln im x_s-Raum. Wir denken sie nach Kugelfunktionen aufgelöst:

$$\chi_n^s = \sum_{l,m} F_{n\,l\,m}(r_s)\, Y_{l\,m}(\vartheta_s, \varphi_s), \tag{7,2}$$

wo Y_{lm} die normierte Kugelfunktion der Ordnung l, m bedeutet.

Dann ist

$$\Delta \chi_n^s = \sum_{l,m} \left(\frac{d^2}{d r_s^2} + \frac{2}{r_s} \frac{d}{d r_s} \right) F_{n\,l\,m}\, Y_{l\,m}(\vartheta_s, \varphi_s) - \sum_{l,m} F_{n\,l\,m} \frac{l(l+1)}{r_s^2} Y_{l,m}(\vartheta_s, \varphi_s). \tag{7,3}$$

Durch Einsetzen von (6,3) in (5,9) folgt

$$\sum_{l,m} \left(\frac{d^2}{d r_s^2} + \frac{2}{r_s} \frac{d}{d r} - \frac{l(l+1)}{r_s^2} + 2 W_n^s \right) F_{n\,l\,m}(r_s)\, Y_{l\,m}(\vartheta_s \varphi_s) + \sum_{n'}{}' \sum_{l',m'} 2 \Phi_{n'n} F_{n'\,l'\,m'}\, Y_{l'\,m'}(\vartheta_s \varphi_s) = 0. \tag{7,4}$$

Zur Bestimmung der Randbedingungen für $r_s = 0$ reicht diese Gleichung in Verbindung mit (7,1) aus. Da die $F_{n\,l\,m}$ bei $r_s = 0$ endlich bleiben sollen, können wir eine Potenzreihe ansetzen:

$$F_{n\,l\,m} = \sum_i \alpha_{n\,l\,m}\, r_s^i. \tag{7,5}$$

Durch Einführen in (7,4) folgt mit (7,1)

$$\{ i(i+1) - l(l+1) \}\, \alpha_{n\,l\,m,\,i+1} + 2\, \alpha_{n\,l\,m\,i} = 0. \tag{7,6}$$

Der kleinste Exponent i in (7,5) folgt hieraus, wenn wir beachten, daß $\alpha_{n\,l\,m,\,i-1} = 0$ ist, aus der Bedingung

$$i(i+1) - l(l+1) = 0,$$

also

$$i = l.$$

Die Koeffizienten $\alpha_{n\,l\,m\,i}$ für $i = l$ dürfen demnach zunächst beliebig gewählt werden, alle folgenden werden dann durch (7,6) analoge Gleichungen bestimmt, in der auch die folgenden Glieder in der Entwicklung (7,1) berücksichtigt sind. Somit haben wir, wie zu erwarten

war, durch die Forderung des Endlichbleibens im Nullpunkt die Hälfte der zur Bestimmung des Systems nötigen Randbedingungen festgelegt.

Die übrigen Randbedingungen folgen teils aus der Forderung des Endlichbleibens im Unendlichen, teils aus der Forderung, daß die nicht exponentiell verschwindenden Wellen in die ebene Welle ε auslaufende Kugelwellen übergehen sollen. Die negativer Energie W_n entsprechenden χ_n müssen im Unendlichen die Form

$$\chi_n = e^{-\sqrt{-2W_n^\varepsilon}\cdot r_\varepsilon} \sum_{u=l}^{\infty} a_u r_\varepsilon^u$$

haben, wo a_l gewählt werden kann, während alle übrigen dadurch bestimmt werden, also für jedes χ_n eine Bedingung. Die positiver Energie entsprechenden Wellen gehen asymptotisch in mit $\sqrt{r}$ dividierte Besselsche Funktionen von der Ordnung $\pm (l + \frac{1}{2})$, d. h. in Kugelwellen über. Wenn sie auslaufende Wellen darstellen sollen, müssen sie asymptotisch die Form

$$\text{const}\,\frac{1}{r}\,e^{-ipr} = \frac{\text{const}}{r}\,(\cos(pr) - i\sin(pr))$$

annehmen, das gibt für jedes χ_n gerade eine Bedingung. Die gestreuten Strahlen, die keine Energieänderung erlitten haben, müssen asymptotisch die Summe aus der ebenen Welle

$$e^{ipx_3}$$

und Kugelwelle

$$\frac{1}{r}\,e^{ipr}$$

darstellen, wie in l. c. I ausgeführt.

Unter der Voraussetzung, daß das gebildete unendliche Gleichungssystem wirklich lösbar ist, haben wir damit die Frage der Randbedingungen erschöpft.

§ 8. Die weitere Diskussion geht von den Gleichungen (5,9) aus. Spalten wir zunächst aus der Summe das Glied mit χ_n ab, so können wir (5,9) schreiben:

$$\Delta\chi_n^\varepsilon(x_3) + 2\Phi_{nn}\chi_n(x_3) + W_n^\varepsilon\chi_n(x_3) = -\sum_{n'}{}' 2\Phi_{n'n}\chi_r(x_3). \quad (8,1)$$

wo der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß das Glied $n' = n$ fortzulassen ist. Das homogene System (5,9) ist jetzt formal als ein System von inhomogenen Gleichungen geschrieben. In der Theorie der Differentialgleichungen wird gezeigt, daß das Lösungssystem zu (5,9) außerhalb der singulären Stellen der Koeffizienten, und solange diese nicht umkreist werden, durch die Randbedingungen eindeutig festgelegt wird. Nach § 7 kennen wir die Lösung in der Nähe der singulären Stellen und

daher im ganzen Raum. Das Verhältnis der verschiedenen χ_n ist damit auch gegeben, so daß jedes als Produkt einer festen Funktion von x_2, n, n' und W mit χ_n geschrieben werden kann. Die rechtsstehende Summe ist daher immer gleich

$$A_{n'n}(x_2),\ \chi_n,$$

und ihre Wirkung in der Differentialgleichung kommt einer (zunächst unbekannten) Änderung der Funktion Φ_{nn} gleich. Daraus folgt, daß das Problem immer auf ein dreidimensionales zurückgeführt werden kann. In unserer früheren Arbeit haben wir die Wirkung dieser Glieder durch die Hinzufügung eines Polarisationsgliedes αr_1^{-4} zur potentiellen Energie Φ_{nn}, das in der Nähe des Kernes in zweckmäßig gewählter Weise zu Null abfällt, zu berücksichtigen versucht.

Zur Lösung des Systems (5,9) ist es nötig, bedeutende Vereinfachungen einzuführen, in der Tat ist es kaum möglich, außer in einfachen Fällen, zu numerischen Werten zu gelangen. Der einzig gangbare Weg scheint dann der zu sein, aus der Mannigfaltigkeit der Funktionen χ_n^s diejenigen auszusondern, die positiver Energie W_n^s entsprechen, die somit asymptotisch in Wellen übergehen. Die übrigen müssen dann in Polarisationsglieder zusammengefaßt werden. Eine weitere Vereinfachung erhalten wir, wenn wir die Abhängigkeit der $\Phi_{n'n}$ und der Polarisationsglieder von den Winkeln vernachlässigen und nur deren sphärische Mittelwerte (Koeffizient des nullten Gliedes in der Entwicklung nach Kugelfunktionen) berücksichtigen. Bei entsprechender Abänderung der Polarisation ist dies jedenfalls erlaubt, wie wir gleich sehen werden.

Wenn z. B. nur eine Art Streustrahlung mit unveränderter Energie möglich ist, erhalten wir mit den obigen Vernachlässigungen nur eine Gleichung zur Bestimmung von χ_n^s, diese ist von der Form

$$\Delta\chi_n^s + 2\Phi'_{nn}\chi_n^s + W_n^s\chi_n = 0, \tag{8,2}$$

wo Φ'_{nn} die Polarisation einschließt. Hier ist Φ'_{nn} im allgemeinen eine Funktion der Winkel $\vartheta_2\,\varphi_2$. Wenn wir in (8,2) den Ansatz machen

$$\chi_n = \sum_{lm} F_{nlm}(r)\,Y_{lm}(\vartheta\,\varphi), \tag{8,3}$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} \Delta\chi_n &= \sum_{lm} r^{-2}(r^2 F'_{nlm})\cdot Y_{lm} - \sum_{lm} F_{nlm}\cdot\frac{l(l+1)}{r^2}\cdot Y_{lm} \\ 2\Phi'_{nn}\chi_n^s &= \sum_{lm} 2\Phi'_{nn}\cdot F_{nlm}Y_{lm} \\ W_n^s\chi_n^s &= \sum_{lm} W_n^s\cdot F_{nlm}Y_{lm}. \end{aligned}\right\} \tag{8,4}$$

Einsetzen in (8,2), Multiplikation mit $\widetilde{Y}_{l'm'}$ und Integration über die Winkel ergibt das System von Differentialgleichungen:

$$r^{-2}(r^2 F'_{nlm})' + \sum_{l'm'} 2\,\Phi_{nnlml'm'} F_{nl'm'} + \left(W_n^2 - \frac{(l+1)\,l}{r^2}\right) F_{nlm} = 0. \quad (8{,}5)$$

Wenn die Entwicklungskoeffizienten von Φ'_{nn} mit Ausnahme von Φ'_{lmlm} zunächst vernachlässigt werden, kann die Gleichung nach der früher von Faxén und dem Verfasser gegebenen Methode gelöst werden [vgl. I, Gleichung (24,25)]*. Wenn $\delta(r)$ und $R(r)$ Funktionen von r sind, die die Gleichungen befriedigen:

$$\left.\begin{aligned} a_l(r) &= R(r)\cos\delta(r), \\ a_{-l-1}(r) &= R(r)\sin\delta(r), \end{aligned}\right\} \quad (8{,}6)$$

wo a_l und a_{-l-1} Lösungen der Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{da_l}{dr} &= (-)^{l+1}\,2\,\Phi\,p\,r^2 f_{-l-1}\,[a_l f + a_{-l-1} f_{-l-1}], \\ \frac{da_{-l-1}}{dr} &= (-)^{l}\,2\,\Phi\,p\,r^2 f_l\,[a_l f_l + a_{-l-1} f_{-l-1}] \end{aligned}\right\} \quad (8{,}7)$$

sind, mit $a_{-l-1} = 0$ für $r = 0$ ist, so ist

$$F_l(r) = \frac{R(r)}{p\,r}\left[\cos\delta(r)\,i^l J_{l+1/2}(p\,r) + \sin\delta(r)\,i^{-l} J_{-l-1/2}(p\,r)\right]\sqrt{\frac{\pi}{2\,p\,r}}. \quad (8{,}8)$$

eine überall endliche Lösung von (8,2).

Die Besselschen Funktionen $J_{l+1/2}$ und $J_{-l-1/2}$ sind immer Funktionen von der Form

$$\left(P_l\cos(p\,r) + Q_l\sin p\,r\right)\sqrt{\frac{2}{\pi\,p\,r}}, \quad (8{,}9)$$

wo P und Q Polynome mit ganzen negativen Potenzen von $(p\,r)$ sind. Daher ist

$$i^l F_l(r) = \frac{R^*(r)}{p\,r}\left[\cos\delta^*(r)\sin p\,r + \sin\delta^*(r)\cos p\,r\right] = \frac{R^*(r)}{p\,r}\sin\left(p\,r + \delta^*(r)\right). \quad (8{,}10)$$

---

* Wegen der Homogenität der Gleichungen können die F_{nlm} nicht enthaltenden Glieder der Summe durch eine Änderung von $\Phi_{nnlml'm'}$ berücksichtigt werden, genau wie wir zu Anfang von § 8 sahen.

Die Lösung kann also immer als eine stehende Welle aufgefaßt werden mit der von r abhängigen Amplitude $R^*(r)/pr$ und der Phase $pr + \delta^* r$. Die Forderung des Endlichbleibens ergibt $\delta^*(0) = 0$, da $R(r)$ für $r = 0$ von Null verschieden sein muß, wenn die Lösung nicht identisch verschwinden soll†.

In l. c. I ist gezeigt, wie man die Randbedingungen wählen muß, um aus Funktionen (8,10) eine Lösung aufbauen zu können, die aus einer einfallenden und gestreuten Wellen besteht, und die Streukoeffizienten sind berechnet. Wir gehen daher nicht darauf ein.

Auch bei einer strengen Behandlung von (8,5) bleiben die Lösungen von der Form (8,10), denn die in (8,5) vernachlässigten Glieder sind aus dem oben (8) genannten Grunde proportional zu F_{nlm}, und der Proportionalitätsfaktor ist eine Funktion von r, so daß die vernachlässigten Glieder einer Änderung von Φ_{nnlmlm} äquivalent wären. Wenn mehrere Arten von Streustrahlung möglich sind, erhalten wir anstatt (8,2) ein entsprechendes System von ebensoviel Differentialgleichungen, wie Anregungsmöglichkeiten vorhanden sind. Da nur die numerische Lösung praktisch in Frage kommt, erscheint es überflüssig, explizite Lösungen in der Form (8,10) hinzuschreiben. Wir erhalten auch hier Kugelwellen, deren Amplitudenquadrate die Intensität der Streustrahlung und daher die Stoßquerschnitte bestimmen. Als erste Näherung von $\Phi_{n'n}$ kommen dann die von Born und Elsasser berechneten Ausdrücke in Frage.

Die ausgeführten numerischen Rechnungen zeigen, daß es nicht unmöglich ist, innerhalb gewisser Grenzen die Streuung durch ein festes Atomfeld mit geeignet gewählter Polarisation darzustellen. Ich hoffe, demnächst darauf näher eingehen zu können.

Trondhjem, Physikal. Institut d. Techn. Hochschule, 26. Okt. 1928.

---

† Es ist vielleicht nicht überflüssig, zu bemerken, daß die von Oppenheimer in Proc. Nat. Acad. Amer. **13**, 802, 1927 aufgestellte Integralgleichung mit unserer (l. c. I) Darstellung übereinstimmt. Der Unterschied liegt nur in der Lösungsweise, indem Oppenheimer die Methode der sukzessiven Approximation benutzt, während wir eine direkte Lösung der Differentialgleichung gesucht haben.

Zur Quantenmechanik des radioaktiven Kerns.

Von **G. Gamow** z. Z. in Kopenhagen und **F. G. Houtermans** in Berlin.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 29. Oktober 1928.)

Auf Grund der von G. Gamow gegebenen quantenmechanischen Deutung des α-Zerfalls werden die Zerfallskonstanten der α-Strahler aus der Energie der α-Teilchen, den Atomnummern und gewissen charakteristischen Kernradien berechnet. Für je ein Element der radioaktiven Familien wird der Kernradius so berechnet, daß die Zerfallskonstante mit der Erfahrung übereinstimmt. Daraus werden — ohne spezielle Annahmen über den Potentialverlauf in unmittelbarer Nähe des Kerns — die Zerfallskonstanten der übrigen α-Strahler berechnet und in genäherter Übereinstimmung mit den experimentellen Werten gefunden. Daran schließen sich einige qualitative Betrachtungen über den Mechanismus des radioaktiven Zerfalls.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit* hat der eine von uns (G. G.) allgemeine Gesichtspunkte für das quantenmechanische Verständnis des α-Zerfalls radioaktiver Elemente angegeben. Die angenäherte Rechnung ergab dort schon qualitativ den der Geiger-Nutallbeziehung zugrunde liegenden Zusammenhang zwischen der Energie der α-Teilchen und der Zerfallskonstante der α-Strahler, auch ließ sich danach theoretisch für den Fall des Ra C′ eine experimentell gefundene** Abweichung von der Geiger-Nutallbeziehung erwarten.

Hier soll nun versucht werden, die absolute Größe der Zerfallskonstanten durch eine genauere Rechnung zu finden und mit den experimentellen Daten zu vergleichen. Dabei ergibt sich die Möglichkeit, einige weitere Folgerungen über die Struktur radioaktiver Kerne zu erhalten.

§ 1. Wir betrachten den Kern als Ausgangspunkt eines gedämpften ψ-Wellenzuges. Die ausgeschleuderten α-Partikel entsprechen der weglaufenden ψ-Welle, die Verminderung der $\psi\bar{\psi}$-Menge des α-Teilchens im Kern bedeutet den radioaktiven Zerfall.

Betrachten wir ein positives Teilchen, das sich unter dem Einfluß einer Zentralkraft um einen positiven Kern bewegt und eine positive Gesamtenergie E hat. Dann lautet die Schrödingersche Amplitudengleichung unter vorläufiger Vernachlässigung der Dämpfung

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - U)\Psi = 0, \tag{1}$$

---

* G. Gamow, ZS. f. Phys. **51**, 204, 1928. Vgl. auch E. Condon und J. C. Gurney (Nature **122**, 439, Sept. 1928), die genau die gleichen Gesichtspunkte wie die zitierte Arbeit zur Erklärung des α-Zerfalls heranzieht.

** J. C. Jacobsen, Phil. Mag. **47**, 23, 1924.

wenn, wie es hier und im weiteren geschehen soll, die azimutale Quantenzahl $j = 0$ gesetzt wird. Auf die etwaige Möglichkeit anderer Fälle werden wir am Schlusse zurückkommen. Führen wir die Transformation

$$\psi = \frac{\chi}{r} \tag{1a}$$

durch, so gilt

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E - U(r)]\chi = 0. \tag{2}$$

Wenn $U(r)$ im Unendlichen verschwindet, geht die Differentialgleichung (2) dort in die gewöhnliche Schwingungsgleichung über, und ihre Lösung besitzt daher die asymptotische Darstellung

$$\chi_\infty = A \cdot e^{-\frac{\alpha}{2} ir} + B \cdot e^{+\frac{\alpha}{2} ir}; \tag{3}$$

dabei bedeutet α, wenn wir die Energie des Teilchens $E = \frac{m}{2} v^2$ setzen

$$\alpha = \frac{4\pi\sqrt{2mE}}{h} = \frac{4\pi m v}{h} \tag{4}$$

oder, wenn Λ die de Broglie sche Wellenlänge des Teilchens ist,

$$\alpha = \frac{4\pi}{\Lambda}. \tag{4a}$$

Die zeitabhängige Wellenfunktion ψ selbst hat für hinreichend große r die Form

$$\psi_\infty = \frac{1}{r}\left[A \cdot e^{+i\left(\frac{2\pi E}{h} t - \frac{\alpha}{2} r\right)} + B \cdot e^{+i\left(\frac{2\pi E}{h} t + \frac{\alpha}{2} r\right)}\right]. \tag{5}$$

Das erste Glied entspricht dabei der vom Kern weglaufenden, das zweite einer zurücklaufenden Sinuswelle. Wir interessieren uns hier nur für die Lösung der weglaufenden Welle und wollen diese normieren, indem wir

$$B = 0, \quad A = 1 \tag{5a}$$

setzen*. Damit ist die Lösung der Differentialgleichung (2) auch für kleine r genau festgelegt. Wir suchen diejenige Lösung von (1), die für große r in die normierte weglaufende Welle übergeht. Dabei hängt die Wellenfunktion selbst mit der in unserer Differentialgleichung auftretenden Funktion so zusammen:

$$\psi(r, t) = \Psi(r) \cdot e^{\frac{2\pi i E}{h} t}. \tag{5b}$$

Bei einem Abstoßungspotential $U(r)$ werden wir für kleine Werte des Kernabstandes (im Gebiet der „negativen kinetischen Energie") sehr

* Diese Festsetzung dient zur Normierung des Stromes. Vgl. G. Gamow, l. c.

große Werte von χ zu erwarten haben* (vgl. Fig. 2). Der Erhaltungssatz in der Integralform lautet in diesem Falle, wenn $d\Omega$ das Volumenelement, $d\sigma$ das Oberflächenelement bedeutet,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \psi\bar{\psi}\,d\Omega = \frac{h}{4\pi i m}\int\left[\psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial r}-\bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]d\sigma, \tag{6}$$

wobei das Integral links über das Volumen einer Kugel vom Radius R, das rechte Integral über deren Oberfläche zu erstrecken ist. Um nun dem Erhaltungssatz zu genügen, müssen wir unsere Lösungen (5) und (5 b) mit einem Dämpfungsfaktor $e^{-\frac{\lambda}{2}t}$ multiplizieren. Für hinreichend großes R und bei Berücksichtigung von (1 a) nimmt (6) die folgende Form an:

$$\lambda\cdot e^{-\lambda t}\int_0^R \chi\bar{\chi}\,dr = \frac{h}{4\pi i m}\left[\chi\frac{d\bar{\chi}}{dr}-\bar{\chi}\frac{d\chi}{dr}\right]_{r=R}\cdot e^{-\lambda t}, \tag{7}$$

und mit Rücksicht auf (3) wird

$$\lambda\cdot\frac{1}{\alpha}\int_0^{R\alpha}\chi(\varrho)\bar{\chi}(\varrho)\,d\varrho = \frac{h}{4\pi m}\alpha, \tag{8}$$

wenn wir durch

$$\varrho = \alpha r \tag{8a}$$

eine neue — dimensionslose — Veränderliche einführen.

Das Integral auf der linken Seite von (8) ist divergent, denn $\chi\bar{\chi}$ bleibt auch für große r endlich. Wie aber die weitere Rechnung zeigt, wird $\chi\bar{\chi}$ schon für $r = 10^{-12}$ cm sehr klein (etwa 10^{30}mal kleiner als $\chi\bar{\chi}$ in der Nähe des Kerns). Es wird daher gleichgültig, ob wir das Integral etwa bis $R \approx 10^{-12}$ cm oder bis $R \approx 10^{-8}$ cm erstrecken, und wir können für seine Berechnung zweifellos die Divergenz außer acht lassen, die sich auch mathematisch unschwer beseitigen ließe. So erhalten wir als Endformel für die Dämpfungskonstante (Zerfallskonstante)

$$\lambda = \frac{h\alpha^2}{4\pi m}\cdot\frac{1}{\int_0^{\alpha R}\chi(\varrho)\bar{\chi}(\varrho)\,d\varrho}, \tag{9}$$

wobei das Integral auf der rechten Seite von dem besonderen Potentialgesetz $U(r)$ abhängt.

---

* G. Gamow, l. c.

§ 2. Für unser Problem des α-Teilchens wollen wir nun bis zu einem sehr kleinen Kernabstand die Gültigkeit des Coulombschen Abstoßungsgesetzes annehmen, also

$$U(r) = \frac{2eZ^*e}{r}, \tag{10}$$

wobei Z^* die wirksame Ladung des Kernrestes bedeutet. Bei kleineren Entfernungen wird irgend eine Anziehungskraft wirksam, über deren Charakter wir jedoch keinerlei spezielle Annahme machen wollen. Die Potentialkurve hat also den in Fig. 1 angedeuteten Verlauf. Darin bedeutet r_m den Kernabstand des Potentialmaximums, r_2 die Stelle auf dem absteigenden Aste der Potentialkurve, bei der das Potential gleich der kinetischen Energie des Teilchens im Unendlichen ist, also den Abstand, der früher auf Grund der klassischen Auffassung oft als „minimaler" Kernradius aufgefaßt wurde†. Die Gerade konstanter Energie des Teilchens ist gestrichelt gezeichnet.

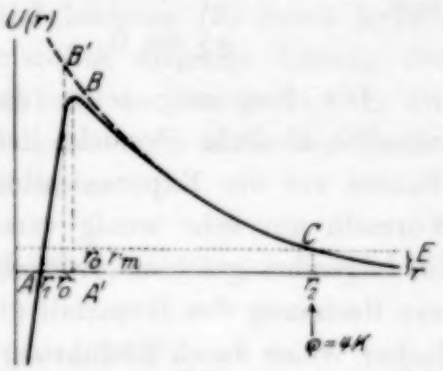


Fig. 1.

Wir wollen nun die Potentialkurve A, B, C durch einen Kurvenzug A', B', C approximieren, da wir Grund zu der Annahme haben, daß durch diese Approximation das $\int_0^{\varrho_R} \chi\bar{\chi}\, d\varrho$, dessen Wert in die Berechnung der Zerfallskonstanten λ eingeht, nicht beträchtlich geändert wird. Wir nehmen also eine Coulombsche Abstoßungskraft an, die bis zu einer ganz bestimmten Stelle r_0' wirksam ist und dort plötzlich eine sehr schnelle Änderung erleidet. Innerhalb von r_0' wollen wir

$$U_1 = \text{const} < E$$

setzen. Wir müssen nun für dieses Gebiet die Lösung der Schrödingergleichung zu finden suchen, die stetig und mit stetiger Ableitung an die für das Gebiet „negativer kinetischer Energie" gefundene Lösung anschließt. Die Lösung ist dann innen eine (nahezu) stehende Welle. Wir wollen jedoch, da wir den Wert von U für unseren fiktiven Potentialverlauf nicht kennen — unter vollständiger Vermeidung des Eingehens auf die Grenzbedingungen —, einen anderen Weg zu finden trachten. Zunächst wollen wir, da sich χ für $r < r_0'$ ja im Vergleich zu dem un-

† Zum Beispiel L. Meitner, Handb. d. Phys. Bd. XXII, S. 124.

geheuer raschen Anstieg außerhalb von r_0' nur sehr wenig ändern wird, eine Abschätzung des Verlaufs von $\chi\bar{\chi}$ versuchen, indem wir zwei Grenzfälle betrachten; als den einen Grenzfall wählen wir den, daß $\chi\bar{\chi}$ auch im Gebiet $0 < r < r_0'$ weiter, aber linear ansteigt mit der Neigung, mit der es das Gebiet „negativer kinetischer Energie" verläßt. Der andere Grenzfall sei der, daß innerhalb von r_0 das $\chi\bar{\chi}$ identisch verschwindet. Die beiden Grenzfälle geben also für $0 < r < r_0'$

$$\chi\bar{\chi} = (\varrho_0 - \varrho)\left[\frac{d(\chi\bar{\chi})}{d\varrho}\right]_{\varrho=\varrho_0} + [\chi\bar{\chi}]_{\varrho=\varrho_0} \tag{10a}$$

bzw.

$$\chi\bar{\chi} = 0. \tag{10b}$$

Die Rechnung zeigt, daß beide Fälle für die Zerfallskonstante ziemlich ähnliche Formeln liefern, die sich nur in dem fast konstanten Faktor vor der Exponentialfunktion unterscheiden. Daher geben beide Formeln nur sehr wenig verschiedene Radien, wenn man diese, wie es im folgenden geschieht, rückwärts aus E und λ berechnet. Wir haben zur Rechnung den Grenzfall (10b) benutzt, denn dieser gestattet in einfacher Weise durch Einführung eines geeigneten, von r_0 und e_m nur wenig verschiedenen Parameters auch im Falle des allgemeinen Potentials zum Ziele zu kommen. Wir denken uns zu diesem Zwecke das Coulombpotential und ebenso die für dieses Potential gültige Lösung χ nach innen über r_0' hinaus fortgesetzt und integrieren $\chi\bar{\chi}$ von außen her bis zu einer Stelle, r_0, so daß das Integral über $\chi\bar{\chi}$ von r_0 bis r_0' gleich der gesamten wirklichen Ladungsmenge innerhalb von r_0' ist. Wir tun also so, als ob die Ladung nur in dem Gebiet „negativer kinetischer Energie" säße, und das Kerninnere ($r < r_0$) frei von Ladung ($\chi\bar{\chi} = 0$) wäre [Grenzfall (10b)]. Dadurch wird natürlich der Absolutwert des Radius etwas zu klein, aber sicher nur sehr wenig, da, wie weiter unten näher erläutert wird, $\chi\bar{\chi}$ äußerst steil ansteigt, und bei der Integration nur ein ganz schmaler Streifen bei r_0 numerisch eine Rolle spielt. Auf diese Weise können wir aber auch, ohne uns überhaupt des r_0' zu bedienen, unseren so eingeführten Parameter r_0 direkt mit dem wahren, aber unbekannten Potentialverlauf im Kerninnern in Beziehung setzen. Denn wenn nur, was sicherlich der Fall ist, $\chi\bar{\chi}$ im Kerninnern nicht weiter exponentiell ansteigt, läßt sich immer ein entsprechender Parameter r_0 angeben. Die Stelle r_0 ist also so definiert, daß

$$\int_{\alpha r_0}^{\alpha R} \chi\bar{\chi}\, d\varrho = \int_{0}^{\alpha R} \chi^*\bar{\chi}^*\, d\varrho \tag{11}$$

ist, wobei χ^* die Lösung der Schrödingerschen Differentialgleichung (2) mit einem Potential von der Form

$$U^* = \frac{4 \cdot Z^* e^2 \cdot \alpha}{\varrho} - \frac{\beta}{\varrho^n} \tag{12}$$

bedeutet. n und β sind dabei Exponent und Koeffizient des uns noch unbekannten Anziehungspotentials. Doch läßt sich r_0 in einen einfachen Zusammenhang mit r_0' und r_m bringen, sobald man eine bestimmte Annahme über das Anziehungsgesetz macht, und sicherlich ist r_0 von der gleichen Größenordnung wie r_1 und r_m. Außerhalb von r_0 wird die Lösung der Schrödingerschen Differentialgleichung (2) durch hypergeometrische Funktionen dargestellt; wir wollen diejenige Lösung der Differentialgleichung (2) zu bestimmen suchen, die für große r in die mittels (5a) normierte Darstellung (3) übergeht. Mit Hilfe der Transformation (8a) nimmt Gleichung (2) die Form an

$$\frac{d^2\chi}{d\varrho^2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{k}{\varrho}\right)\chi = 0, \tag{13}$$

wo

$$k = \frac{\pi \sqrt{2m} \cdot 2Z^* e^2}{h\sqrt{E}} = \frac{4\pi Z^* e^2}{hv} \tag{14}$$

ist. Diese gesuchte Lösung der Differentialgleichung, die in ihrem asymptotischen Verhalten der Normierungsbedingung (3) genügt, läßt sich genähert darstellen† durch

$$\chi \approx \sqrt{\operatorname{cotg} u} \cdot e^{k(2u - \sin 2u)}, \tag{15}$$

wobei

$$\cos^2 u = \frac{\varrho}{4k} \tag{16}$$

ist. Diese Darstellung gilt jedoch nicht in der Nähe von $\varrho = 0$ und $\varrho = 4k$. Für die durchzuführende Integration ist aber die Formel (15) recht brauchbar. In Fig. 2 ist für den Fall der Radiumemanation der Verlauf der Funktion $\log \chi\bar{\chi}$ als Funktion von ϱ aufgetragen. Der Logarithmus wurde nur aus technischen Gründen gewählt, da die Funktion selbst ungeheuer rasch ansteigt. Eben wegen dieser raschen Abnahme mit wachsendem ϱ läßt sich auch die Integration sehr vereinfachen, denn numerisch ist dabei nur ein ganz schmaler Streifen zwischen ϱ_0 und $\varrho_0 + \Delta\varrho_0$ wichtig. Aus diesem Grunde erledigt sich auch, wie oben

† Diese Darstellung der Lösung verdanken wir Herrn V. Fock, der sie uns freundlicherweise zur Verfügung stellte, wofür wir ihm auch an dieser Stelle herzlichst danken möchten.

erwähnt, die Frage der oberen Integrationsgrenze αR. Für das kleine Integrationsintervall können wir nämlich mit genügender Näherung schreiben:

$$\chi\bar{\chi} \approx \operatorname{cotg} u_0 \cdot e^{2k\left[(2u_0 - \sin 2u_0) + \frac{d}{d\varrho}(2u - \sin 2u)_{\varrho=\varrho_0} \Delta\varrho_0\right]}$$

oder

$$\chi\bar{\chi} \approx \operatorname{cotg} u_0 \cdot e^{2k(2u_0 - \sin 2u_0)} \cdot e^{4k \operatorname{tg} u_0 \Delta\varrho_0}.$$

Die Integration gibt jetzt

$$\int_{\varrho_0}^{\alpha R} \chi\bar{\chi}\, d\varrho \approx \operatorname{cotg} u_0 \cdot e^{2k(2u_0 - \sin 2u_0)} \cdot \int_0^{\alpha R} e^{(4k \operatorname{tg} u_0)\Delta\varrho_0}\, d\Delta\varrho_0$$

$$= \operatorname{cotg} u_0 \cdot e^{2k(2u_0 - \sin 2u_0)} \cdot \frac{1}{4k \operatorname{tg} u_0};$$

hieraus folgt als Endformel für die Zerfallskonstante nach (9)

$$\lambda = \frac{h\alpha^2}{\pi m} \cdot \frac{k \operatorname{tg}^2 u_0}{e^{2k(2u_0 - \sin 2u_0)}}. \tag{17}$$

§ 3. Um die Formel (17) mit der Erfahrung zu vergleichen, wurde folgendermaßen verfahren. Wir haben zunächst die Annahme gemacht, daß die bei der Coulombschen Abstoßung wirksame Ladung Z^* gleich der um 2 verminderten Kernladung des betreffenden radioaktiven Elements ist. Ferner wurde für die erste rohe Berechnung, deren Resultate hier angegeben werden sollen, die Rückstoßenergie der Atome, die zur kinetischen Energie E der Teilchen addiert werden müßte, vernachlässigt. Die von uns benutzten Werte der Geschwindigkeiten der α-Teilchen müssen daher für die endgültige Berechnung noch eine kleine Korrektur erfahren †. Schreiben wir nun die Formel (17) der Deutlichkeit halber nochmals aus, wobei wir für α und k die Werte aus (4 a) und (14) einsetzen, so folgt, wenn v die Geschwindigkeit der Teilchen, Z die Kernladung bedeutet:

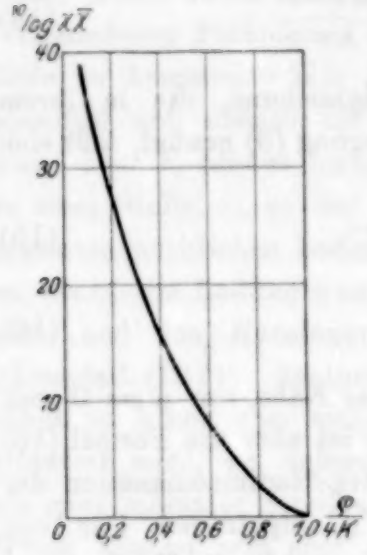


Fig 2.

$$\lambda = \frac{64\pi^2 m e^2}{h^2} \cdot Z^* v \operatorname{tg}^2 u_0 \cdot e^{-\frac{8\pi e^2}{h} \cdot \frac{Z^*}{v}(2u_0 - \sin 2u_0)} \tag{18}$$

† Diese Korrektur erhöht die einzusetzenden v-Werte und ändert somit die angegebenen Absolutwerte der Radien ein wenig. An dem relativen Verlauf der Zerfallskonstanten wird jedoch sehr wenig geändert.

oder
$$\log \lambda = \log \frac{64\,\pi^2\,m\,e^2}{h^3} + \log Z^* v + 2 \log \operatorname{tg} u_0 - \frac{8\,\pi\,e^2}{h} \cdot \frac{Z^*}{v} (2\,u_0 - \sin 2\,u_0), \qquad (18\,a)$$

worin
$$Z^* = Z - 2 \qquad (19)$$

und
$$\cos u_0 = \frac{v}{\sqrt{Z^*}} \cdot \frac{1}{2\,e} \sqrt{m\,r_0} \qquad (19\,a)$$

ist.

Setzen wir nun in (18) beispielsweise die Zerfallskonstanten der Emanationen der drei Zerfallsreihen und die Geschwindigkeiten ihrer α-Strahlen† ein, so findet man für diese Elemente die durch (11) definierten Kernradien r_0, deren Werte in der ersten Rubrik der Tabelle 1 angegeben sind. Sehr bemerkenswert ist, daß sich dabei numerische Werte ergeben, die nahe mit den Werten der de Broglieschen Wellenlänge Λ der Teilchen, die in der zweiten Rubrik angegeben sind, übereinstimmen.

Tabelle 1.

Element	$r_0 \cdot 10^{13}$	$\Lambda \cdot 10^{13}$
Ra Em	7,35	6,15
Th Em	7,25	5,74
Ac Em	6,63	5,50

Wahrscheinlich steckt dahinter noch ein ganz bestimmter Zusammenhang, der dazu führen soll, die Energien der α-Teilchen als Eigenwerte der (nahezu) stehenden Schwingungen im Kerninnern zu betrachten. Zur Berechnung der anderen Zerfallskonstanten wurde nun so verfahren, daß zunächst willkürlich der Parameter r_0 für alle Elemente der gleichen Zerfallsreihe konstant, und zwar gleich dem für die Emanation der betreffenden Familie ermittelten Werte gesetzt wurde. Dies ist natürlich eine ganz willkürliche Annahme, die nur dazu dient, zu untersuchen, wieweit unsere Theorie überhaupt die innerhalb eines so weiten Bereichs verschiedenen Zerfallskonstanten der α-Strahler einigermaßen quantitativ wiederzugeben vermag. In einer späteren Arbeit soll versucht werden, auf Grund der dabei gewonnenen Erfahrungen, umgekehrt aus dem Gang der empirisch für alle Elemente berechneten r_0 Rückschlüsse auf das Kraftgesetz in der Nähe des Kerns zu ziehen.

† Die Werte für v und $(\log \lambda)_{\text{exp.}}$ sind fast durchweg der 2. Auflage von Meyer-Schweidler, Radioaktivität, Leipzig 1927, entnommen. Einige Hinweise bezüglich der experimentellen Daten verdanken wir einer freundlichen mündlichen Mitteilung von Frl. Prof. L. Meitner.

Trägt man graphisch den $\log \lambda$ gegen $\log v$ auf†, so erhält man eine Schar von hyperbelähnlichen Kurven, entsprechend den verschiedenen Werten der Kernrestladung Z^*. Setzt man nun, auf Grund der oben erwähnten Annahme (19), für jedes Element seine Kernladung ein, so erhält man im allgemeinen einen gebrochenen Kurvenzug.

In den Fig. 3, 4 und 5 sind die theoretisch ermittelten und experimentell gefundenen Werte, soweit sie bisher gemessen wurden, eingetragen. Tabelle 2 gibt die numerischen Werte von $(20 + \log \lambda)$.

Tabelle 2.

Element	U-Ra-Reihe		Element	Th-Reihe		Element	Ac-Reihe	
	20 + log			20 + log			20 + log	
	exp.	theor.		exp.	theor.		exp.	theor.
U I nach Geiger .	2,70	1,10	—	—	—	—	—	—
U I†† nach Gudden berechnet	2,70	2,53	—	—	—	—	—	—
U II	—	4,47	Th . .	2,12	4,44	Pa††† . . .	8,0	7,67
Jo	7,38	6,58	Rd Th .	12,06	11,63	Rd Ac . . .	13,63	13,28
Ra	9,14	9,14	Th X .	14,34	14,37	Ac X	13,85	12,95
Ra Em (norm.) . .	14,32	14,32	Th Em	18,10	18,27	Ac Em(norm.)	19,25	19,25
Ra A	17,58	17,97	Th A .	20,69	21,20	Ac A	22,54	22,26
Ra C	—	—	Th C .	15,82	18,71	Ac C	17,73	19,83
Ra C′ (Jacobsen) .	25,92	24,57	Th C′ .	—	—	Ac C′	22,15	21,89
Ra F	12,77	14,21	—	—	—	—	—	—

In Tabelle 2 und Fig. 3, 4 und 5 sind alle Zerfallskonstanten (gemessen in $\sec^{-1}$) mit dem Faktor 10^{20} multipliziert, um negative Zahlen zu vermeiden. Außerdem sind in den Figuren die Geiger-Nuttallgeraden punktiert gezeichnet. Für die C-Produkte, die gegabeltem Zerfall unterliegen, sind die Zerfallskonstanten eingesetzt, soweit sie auf den α-Zerfall zurückzuführen sind, berechnet aus dem bekannten Verhältnis zwischen α- und β-Zerfall und der gemessenen resultierenden Zerfallskonstante für beide Zerfallsarten. Bei der Berechnung des Kernradius r_0 für die Thoriumemanation ergab sich ein Wert, der so wenig von dem r_0 für Ra Em verschieden war, daß bei der Berechnung für die Thoriumreihe der gleiche r_0-Wert wie für die U-Ra-Reihe zugrunde gelegt wurde; die Berechnung beider Reihen war somit mit einem einzigen Parameter

† $\log v$ wurde nur als Abszisse gewählt, um unsere Darstellung der allgemein üblichen anzupassen.

†† Dieser Wert wurde aus der von Gudden bestimmten Reichweite berechnet.

††† Der experimentelle Wert von λ nach E. W. Walling, Über die Nachbildung aus dem Uran. Berl. Diss. 1928.

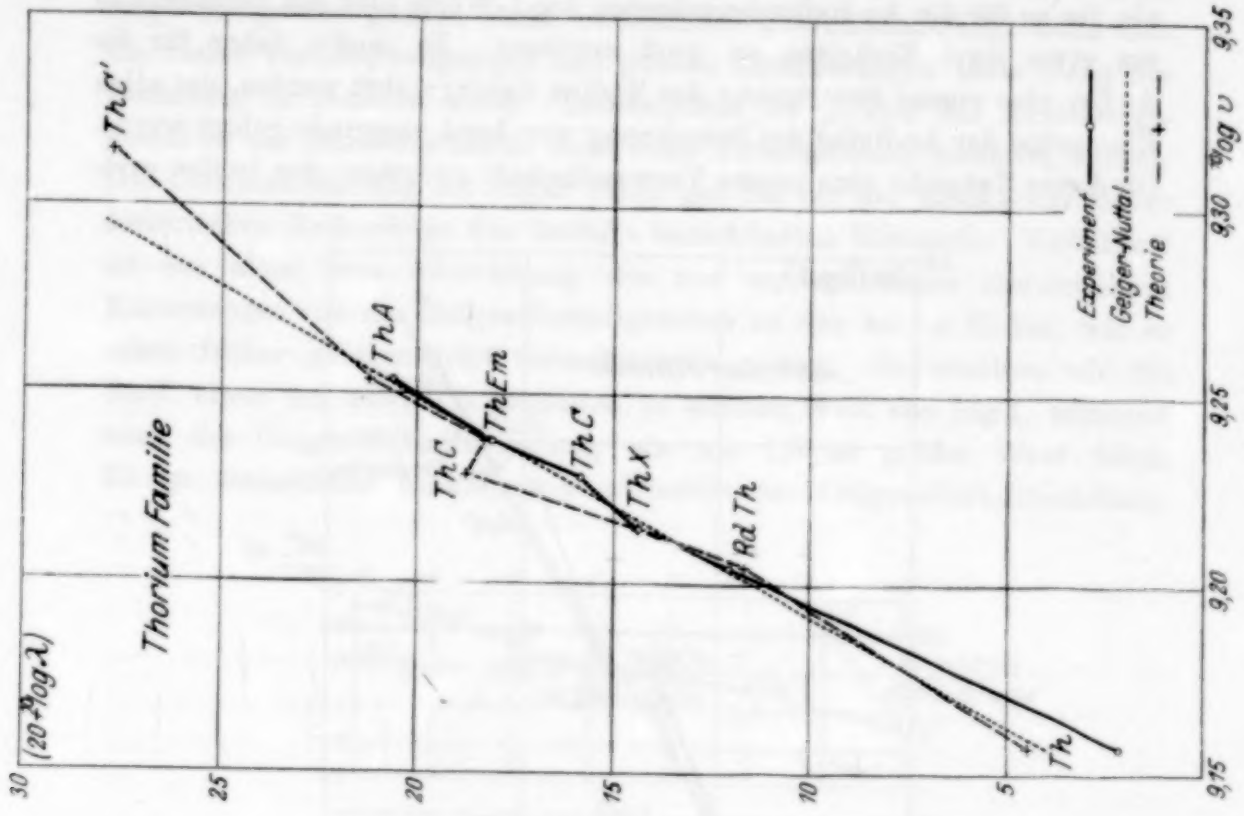

Thorium Familie
(20+log λ)
ThC''
ThA
ThC
ThEm
ThC
ThX
Rd Th
Th
Experiment
Geiger-Nuttal
Theorie
log υ

Fig. 4.

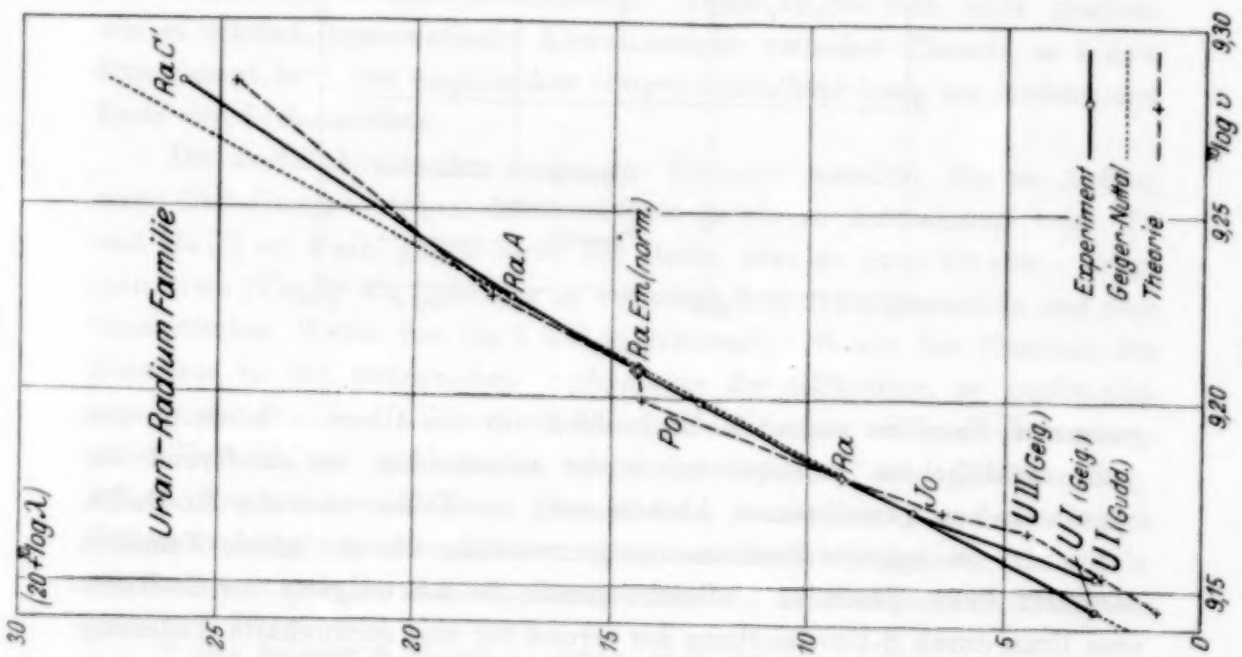

Uran-Radium Familie
(20+log λ)
Ra C''
Ra A
Ra Em (norm.)
Po
Ra
Jo
UII (Geig.)
UI (Geig.)
UI (Gudd.)
Experiment
Geiger-Nuttal
Theorie
log υ

Fig. 3.

möglich. Für die Ac-Reihe erwies sich dies jedoch insofern unmöglich, als die so für die Ac-Reihe berechneten log λ-Werte sich als durchgehend um etwa zwei Einheiten zu groß erwiesen. Es mußte daher für die Ac Em eine eigene Berechnung des Radius durchgeführt werden, der allen Elementen der Ac-Reihe der Berechnung von log λ zugrunde gelegt wurde. Ob dieser Tatsache eine innere Verwandtschaft zwischen den beiden erst-

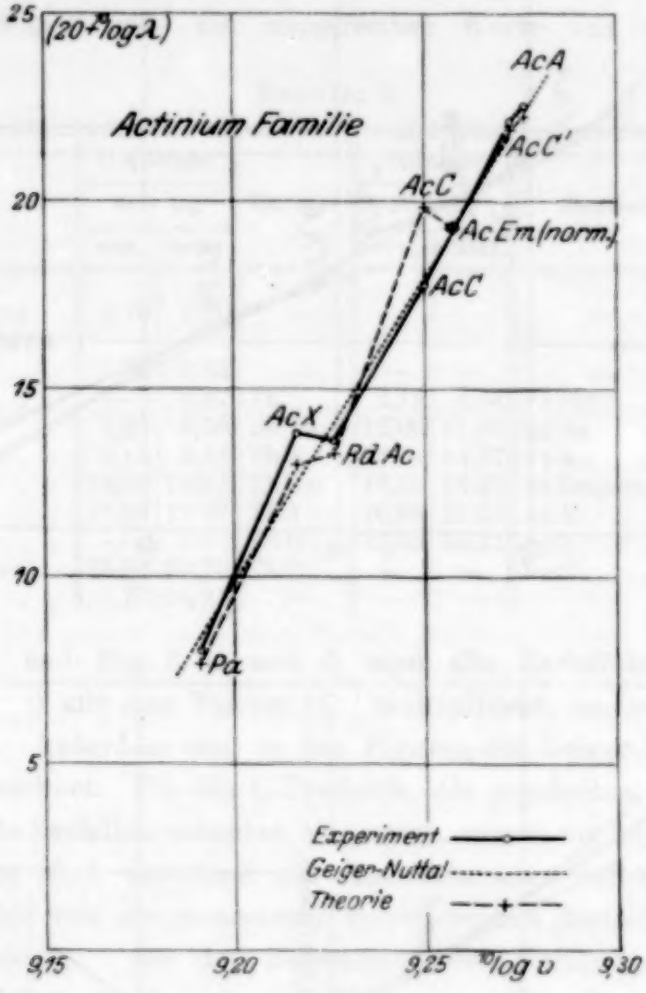


Fig. 5.

genannten Familien zugrunde liegt, oder ob die Übereinstimmung eine mehr zufällige ist, möchten wir nicht entscheiden, da auf Grund der hypothetischen gemeinsamen Abstammung der U-Ra- und der Ac-Reihe, sich eher ein engerer Zusammenhang zwischen diesen beiden Familien vermuten ließe. Doch ist vielleicht gerade die Abzweigung der Ac-Reihe vom Uran durch β-Umwandlung der Grund für eine sprunghafte Änderung im Kernradius.

§ 4. Der Vergleich der theoretischen mit den experimentellen Werten zeigt im großen ganzen recht ordentliche Übereinstimmung, wenn man die vielen Vernachlässigungen und groben Annäherungen beim Gang der Rechnung in Betracht zieht. Insbesondere ist ja über das Anziehungsgesetz in der Nähe des Kerns noch keine Voraussetzung gemacht worden. Die Übereinstimmung ist sogar recht gut für die der Emanation in der historischen Reihenfolge des Zerfalls benachbarten Elemente. Auffallend ist vor allem eine Abweichung des von uns erhaltenen theoretischen Kurvenzuges von der Geiger-Nuttallgeraden an den beiden Enden, wie er schon früher gelegentlich* vermutet worden war. So erhalten wir für Ra C′ einen um etwa 1,3 Einheiten zu kleinen Wert von $\log \lambda$, während nach der Geiger-Nuttallbeziehung ein um 1,8 zu großer Wert folgt. Einige wesentliche Diskrepanzen zwischen der Geiger-Nuttallbeziehung

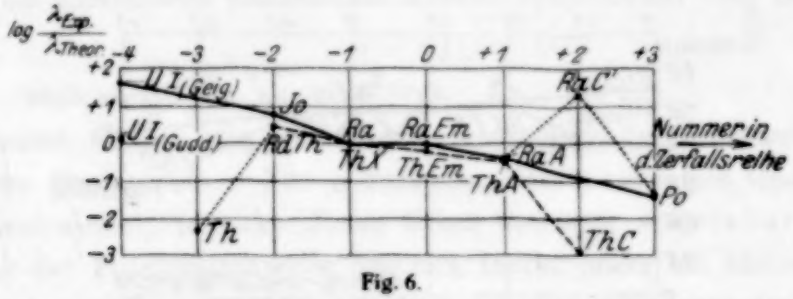


Fig. 6.

und der Erfahrung, so vor allem bei Th und beim Ac X, finden sich jedoch auch bei unserer Berechnung. Doch zeigen sich auch gewisse, wie es scheint, systematische Abweichungen zwischen Theorie und dem Experiment bzw. der empirischen Geiger-Nuttalbeziehung am Anfang und Ende der Zerfallsreihen.

Die Zerfallskonstanten derjenigen Elemente nämlich, die am Anfang einer Zerfallsreihe stehen, kommen (mit gewissen Ausnahmen beim Th und Ra C′) zu klein, gegen Ende der Reihe aber zu groß heraus. Trägt man etwa (Fig. 6) die Differenz Δ zwischen dem experimentellen und dem theoretischen Werte von $\log \lambda$ auf in Abhängigkeit von der Nummer des Elements in der historischen Reihenfolge der α-Strahler, so ergibt sich wenigstens für die Radium- und Thoriumfamilie ein einigermaßen monotoner Verlauf, aus dem nur das sehr kurzlebige Ra C′ und das sehr langlebige Thorium herausfallen. Das letztere ist vielleicht noch auf einen Zusammenhang zwischen Radius selbst und Geschwindigkeit, d. h. A, zurückzuführen, wie er oben angedeutet wurde. Der allgemeine Gang der

* Zum Beispiel B. Gudden, ZS. f. Phys. **26**, 110, 1924 und J. C. Jacobsen, l. c.

Abweichung ist zweifellos auf einen Gang in den Kernradien mit zunehmendem Zerfall zurückzuführen, und zwar wirkt er in dem Sinne, als ob r_0 bei fortschreitendem Zerfall kleiner würde.

In Fig. 7 ist, um einen Überblick über den Charakter dieser Abweichungen zu gewinnen, der Verlauf der Kernradien selbst, die umgekehrt auf Grund der experimentellen Werte von λ, Z und v nach (19), allerdings nur genähert†, berechnet sind, für die U-Ra- und Th-Reihe in relativem Maßstab aufgetragen. Man sieht einen einigermaßen monotonen Kurvenzug, in der Ac-Familie scheinen die Verhältnisse viel komplizierter zu liegen. Auf einen Umstand möchten wir noch besonders hinweisen: In dem Kurvenzug der experimentellen Werte von $\log \lambda$ zeigen sich an gewissen Stellen, so beim AcX Knickpunkte bzw. Zacken. Die Knicke werden im allgemeinen von der Theorie wiedergegeben und sind auf die

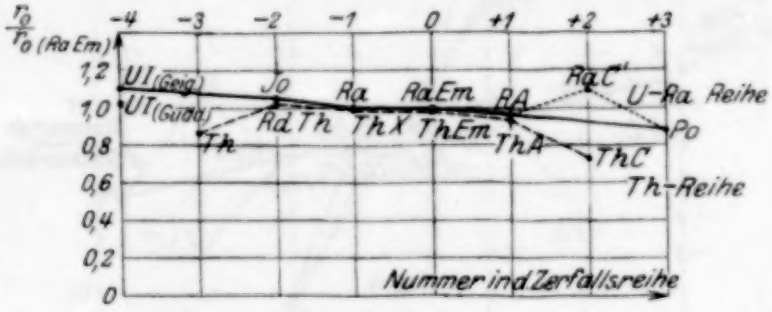


Fig. 7.

Sprünge in den Werten der Kernladung zurückzuführen. Die Zacke beim Rd Ac ist nach unserer Rechnung freilich kleiner als in Wirklichkeit, beim Ra F und den C-Elementen der Th- und Ac-Familie fehlt sie sogar ganz, während sie nach unserer Rechnung vorhanden sein sollte. Doch handelt es sich bei diesen teils um den erwähnten Gang in den Radien, teils um einen anderen Einfluß, der ebenfalls zu beachten ist. Unsere Annahme nämlich, daß die Ladung des Kernrestes gleich der um 2 verminderten Kernladung des α-Strahlers sei, ist ja sicher nicht in vollem Umfang gerechtfertigt. Es ist nämlich recht wahrscheinlich, daß zum mindesten ein Teil der Elektronen, die beim weiteren Zerfall ausgeschleudert werden, weiter außen sitzt als die α-Teilchen und daher für die Konstitution der in unsere Rechnung eingehenden Kernrest-Ladung Z^* nicht mitwirkt; hierdurch könnten die eben erwähnten Abweichungen an den Gabelstellen der Zerfallsreihen, in denen ja auch bei der Geiger-Nuttal-

† Bei der Berechnung wurde nur die Abhängigkeit des $\log \lambda$ von Z und v berücksichtigt, soweit diese in die Exponentialfunktion eingehen. Die Abhängigkeit in dem davorstehenden Faktor macht daneben nur sehr wenig aus.

formel Schwierigkeiten entstehen, wohl plausibel erscheinen. Da wir uns aber über den Mechanismus der β-Emission noch keine Vorstellung machen können, haben wir in unserer Rechnung diese Hypothese unberücksichtigt gelassen.

Zum Schluß möchten wir noch eine Möglichkeit erwähnen, auch eine Erscheinung, allerdings nur qualitativ, zu verstehen, die mit dem Auftreten seltener, extrem schneller α-Partikeln, wie sie bei einigen Elementen beobachtet wurden*, verknüpft ist. Bei Annahme eines kugelsymmetrischen Coulombschen Kernpotentials enthält nämlich die für die Behandlung des Problems maßgebende Schrödingersche Gleichung (2) noch ein Glied $\frac{j(j+1)}{r^2}$ für den Fall, daß die azimutale Quantenzahl nicht, wie wir es vorausgesetzt hatten, verschwindet. Dieses Glied wirkt nun wie ein scheinbares zusätzliches Abstoßungspotential vom Betrage

$$U_a = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \cdot \frac{j(j+1)}{r^2} \tag{20}$$

und bedeutet einfach die zentrifugale Abstoßung bei konstantem, gequanteltem Drehimpuls. Für α-Teilchen, deren azimutale Quantenzahl nicht verschwindet, bewirkt dieses Glied nun eine scheinbare starke Erhöhung der Potentialschwelle, die sich insbesondere bei kleinen Kernabständen bemerkt macht. Dies hat zur Folge, daß α-Teilchen trotz großer Energie selten, d. h. mit kleiner Zerfallskonstante, emittiert werden können. In einer späteren Arbeit soll versucht werden, diesen Zusammenhang zwischen Energiedifferenz der extrem-schnellen und der normalen α-Teilchen und deren Emissionswahrscheinlichkeit quantitativ zu untersuchen. Die Energiedifferenz selbst, sowie das Auftreten mehrerer Teilchen verschiedener Azimutalquantenzahl gerade bei diesen Elementen können wir, ebenso wie überhaupt die Energien der α-Teilchen, erst verstehen, wenn ein bestimmter Potentialansatz für das Kerninnere uns erlaubt, diese Energien als Eigenwerte der stehenden Schwingungen im Kern zu berechnen.

Göttingen, September 1928.

---

* Vgl. u. a. L. Meitner und K. Freitag, ZS. f. Phys. **37**, 481, 1926 und E. Rutherford und J. Chadwick, Phil. Mag. (6) **48**, 509, 1924.

Zur Quantentheorie der Atomzertrümmerung.

Von **G. Gamow**, z. Z. in Kopenhagen.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 10. November 1928.)

Die Möglichkeit der Atomzertrümmerung durch α-Strahlen geringerer Energie als dem Potentialmaximum der getroffenen Atome entspricht, wird quantenmechanisch gedeutet und eine obere Grenze für die Ausbeute der Atomzertrümmerung in Abhängigkeit von der Energie der α-Strahlen und der Kernladungszahl der zertrümmerten Atome berechnet, wobei sich im allgemeinen gute Übereinstimmung mit der Erfahrung ergibt.

§ 1. Bekanntlich ist es bisher nur bei leichten Elementen mit Sicherheit gelungen, Atome durch α-Strahlen-Bombardement zum Zerfall zu bringen. Ebenso wurden nur für diese Elemente Abweichungen von der Rutherfordschen Formel für die Streuung von α-Teilchen beobachtet. Es liegt nahe, hier einen engen Zusammenhang zu vermuten, denn nur bei diesen Elementen sollte es möglich sein, daß α-Teilchen in solche Kernnähe gelangen, daß die dort wirksame Anziehungskraft neben der Coulombschen Abstoßung merklich wird. Dabei ist es möglich, daß das α-Teilchen ins Kerninnere hineinkommt und Zerfall des Kernes bewirkt. Daß ein α-Teilchen in das Kerninnere (d. h. im Gebiet der Anziehungskraft) hineindringen muß, um Zertrümmerung hervorzurufen, zeigen zahlreiche Experimente*, aus denen folgt, daß nach der Zertrümmerung das α-Teilchen immer von dem Kern eingefangen worden ist. Aus unserer Kenntnis über den Verlauf des Potentials in der Nähe des Kernes können wir nun schließen, daß nach der klassischen Mechanik nur die sehr energiereichen α-Teilchen (z. B. $\alpha_{\mathrm{Th\,C'}}$ in Al) die vorhandene Potentialschwelle überwinden können. Wellenmechanisch aber besteht immer eine gewisse Wahrscheinlichkeit, daß ein α-Teilchen in den Kern eindringt; hier haben wir genau die Umkehrung des wellenmechanischen Vorgangs vor uns, die sich auch bei der Erklärung des radioaktiven Zerfalls bewährt hat. Die Wahrscheinlichkeit W der tatsächlichen Zertrümmerung können wir also als aus zwei Faktoren zusammengesetzt betrachten: der Wahrscheinlichkeit W_1, daß das α-Teilchen in das Kerninnere eindringt, und der Wahrscheinlichkeit W_2, daß es dort tatsächlich durch Herausschleudern eines Protons den Zerfall bewirkt. Natürlich ist auch der Fall denkbar, daß das Teilchen den Kern wieder verläßt, ohne eine bleibende Veränderung hervorzurufen. Die W_1 geben

* Vgl. z. B. P. M. S. Blackett, Proc. Roy. Soc. **107**, 349, 1925.

uns also eine obere Grenze für die mögliche Ausbeute, und durch Vergleich mit experimentellen Daten wird es möglich, den zweiten Faktor W_2 abzuschätzen.

§ 2. Für den Verlauf der potentiellen Energie eines α-Teilchens in der Nähe des Kernes machen wir den vielfach benutzten Ansatz:

$$U(r) = \frac{2Ze^2}{r} - \frac{a}{r^n}, \tag{1}$$

wo a und n Koeffizient und Exponent des Anziehungspotentials, Z und e Ordnungszahl des getroffenen Atoms und Elektronenladung bedeuten.

Für den kritischen Abstand r_m, wo die Potentialkurve ihr Maximum hat, folgt

$$r_m = \sqrt[n-1]{\frac{na}{2Ze^2}}. \tag{2}$$

Für die radioaktiven Elemente kennen wir zwar die r_m nicht genau, aber wir können gewisse, nicht sehr von ihnen verschiedene Größen aus

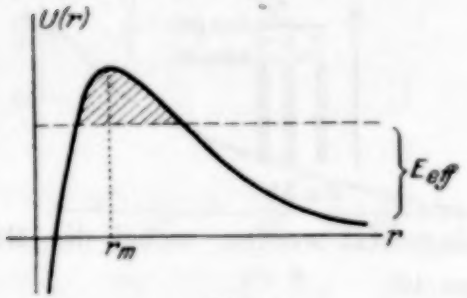


Fig. 1.

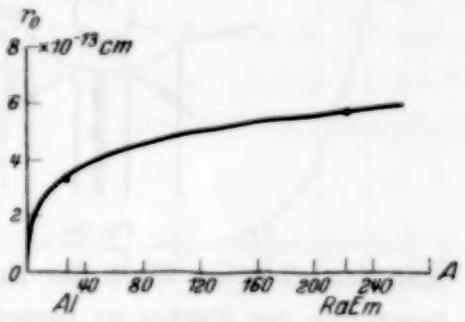


Fig. 2.

dem Zusammenhang zwischen Zerfallskonstante und Energie der Teilchen berechnen*. Für einige leichte Elemente läßt sich r_m aus der anomalen Streuung der α-Teilchen angenähert bestimmen. Für Al z. B. findet Bieler**, wenn er $n = 3$ setzt, den Wert $r_m = 3{,}44 \cdot 10^{-13}$ cm. Tragen wir r_m als Funktion des Atomgewichts A auf (Fig. 2), so zeigt sich, daß man r_m ungefähr proportional $A^{1/3}$ annehmen kann; dies bedeutet, daß das Kernvolumen angenähert proportional der Zahl der α-Teilchen im Kern ist. Bei der Berechnung der r_m wurde daher der empirische Ansatz

$$r_m = 1{,}21 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3} \tag{3}$$

benutzt.

---

* G. Gamow und F. Houtermans, ZS. f. Phys. **52**, 496, 1928.

** E. S. Bieler, Proc. Roy. Soc. (A) **105**, 434, 1924; vgl. auch W. Hardmeier, Phys. ZS. **28**, 181, 1927.

Da die genaue Lösung des Problems mathematisch sehr kompliziert ist, wollen wir es dadurch vereinfachen, daß wir uns auf den eindimensionalen Fall beschränken (Fig. 3a, 3b). Bei genauerer Lösung müssen wir in Betracht ziehen, daß auch von den seitlich auftreffenden Teilchen noch ein Teil in den Kern eindringen kann, den wir nicht berücksichtigen, wenn wir das ebene Modell betrachten. Von der auftreffenden ψ-Welle wird ein Teil reflektiert, während ein Teil in den Kern eindringt. Das Verhältnis des eindringenden Anteils zum auftreffenden gibt dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit W_1^* pro Stoß. Hierfür können wir zunächst † schreiben:

$$W_1^* = e^{-2\frac{2\pi\sqrt{2m}}{h}\int\sqrt{\frac{2Ze^2}{r}-\frac{a}{r^n}-E}\,.\,dr}. \tag{4}$$

Dabei ist das Integral über das Gebiet zu nehmen, in dem der Integrand reell ist (Gebiet negativer kinetischer Energie, Fig. 1). Für E

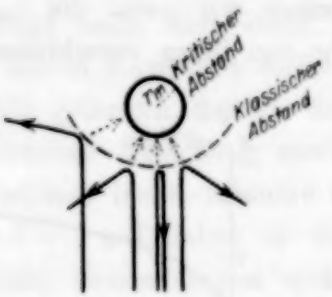


Fig. 3a.

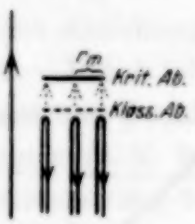


Fig. 3b.

muß der effektive Wert der Energie eingesetzt werden, wobei die Mitbewegung des Kernes zu berücksichtigen ist.

Berechnen wir a aus r_m, und setzen wir versuchsweise $n = 3$, so folgt nach (4):

$$W_1^* = e^{-\frac{16\pi e^2}{h}\frac{Z}{v_{\text{eff}}}J(k)}, \tag{5}$$

wo

$$J(k) = \int\sqrt{\frac{1}{\varrho}-\frac{k^2}{\varrho^3}-1}\,.\,d\varrho, \tag{5a}$$

$$k = \frac{m}{4\,.\,\sqrt{3}\,.\,e^2}\,.\,\frac{r_m\,v_{\text{eff}}^2}{Z} \tag{5b}$$

und ϱ eine neue dimensionslose Veränderliche bedeutet.

Der Wert des Integrals wurde numerisch berechnet. Die einfache Approximation der Potentialkurve durch einen Kurvenzug, wie sie bei der Berechnung der Zerfallskonstanten benutzt wurde, ist nämlich hier

† Vgl. G. Gamow, ZS. f. Phys. **51**, 210, 1928, Formel 6.

nicht zulässig, da die Energie der α-Teilchen nicht viel kleiner ist als die Höhe der Potentialschwelle. Der Verlauf von $J(k)$ ist in Fig. 4 graphisch dargestellt. Ist $k > 3{,}78$, so ist die Energie der Teilchen höher als die Potentialschwelle, und der Übergang wird auch nach der klassischen Auffassung möglich, wie das z. B. für Al- und Th C'-Strahlen der Fall ist.

§ 3. Wir berechnen zunächst die relativen Wahrscheinlichkeiten der Zertrümmerung eines Al-Kernes für verschiedene Geschwindigkeiten der α-Strahlen. Wir erhalten dafür die Formel:

$$W^*_{1\,(\text{relat.})} = e^{-\frac{16\pi e^2}{h} z_{\text{Al}} \left\{ \frac{J(k)}{v_{\text{eff}}} - \frac{J(k_{\text{Ra C'}})}{v_{\text{eff, Ra C'}}} \right\}}, \qquad (6)$$

wobei W^*_1 für Ra C' als Einheit genommen ist. Die nach (6) berechnete Kurve ist in Fig. 5 dargestellt. (Als Ordinaten sind hier nicht die Geschwindigkeiten selbst, sondern die Reichweite genommen.) Die Punkte

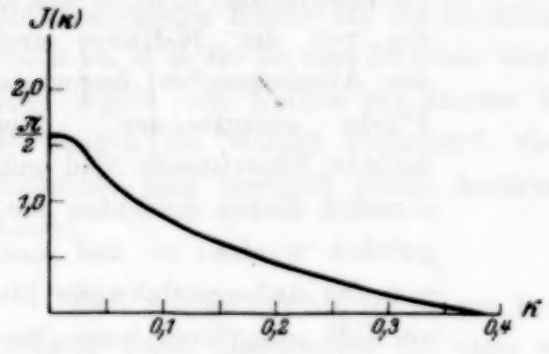


Fig. 4.

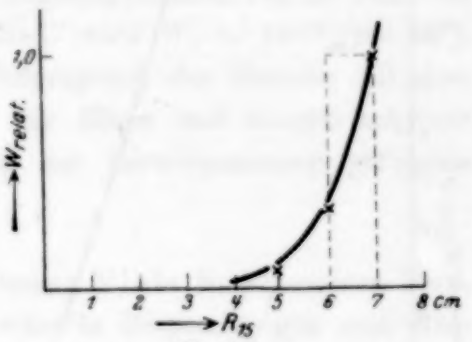


Fig. 5.
Relative Ausbeute in Al.

bedeuten die experimentell gefundenen† Werte der relativen Wahrscheinlichkeit. Die Übereinstimmung ist ziemlich gut, nur der Wert für Th C'-α-Strahlen fällt heraus. Die klassische Möglichkeit für das Eindringen des Teilchens in den Kern bei Al liegt bei $v = 2 \cdot 10^9$; die theoretische Kurve liefert dann für $v > 2 \cdot 10^9$ $W =$ konstant, und zwar ungefähr gleich 2, wenn man unser vereinfachtes Modell zugrunde legt. Daß der Rutherfordsche Wert für $R = 8{,}6$ höher liegt ($W_{\text{relat}} = 2{,}6$), kann sowohl durch einen kleinen Fehler in dem Wert des bei uns benutzten Kernradius bedingt sein, oder aber durch die bei hohen Geschwindigkeiten wirksamen von der Seite „diffundierenden", nicht zentral stoßenden Teilchen (vgl. oben S. 512), die in unserem eindimensionalen Modell vernachlässigt sind, erklärt werden. Würde man diese Teilchen mit berück-

† E. Rutherford und J. Chadwick, Phil. Mag. **43**, 816, 1921.

sichtigen, so bekäme man auch nach unserer Theorie für $v > 2 \cdot 10^9$ ein Anwachsen von W_1^*.

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit für die Atomzertrümmerung für 1 mm Luftäquivalent berechnen, soweit sie durch den Faktor W_1 gegeben ist. Dazu müssen wir unseren Ausdruck (5) für die Wahrscheinlichkeit W_1^* pro Stoß mit der Summe der Kernquerschnitte, also mit $\pi r^2 N$ multiplizieren, wo N die Avogadrosche Zahl bedeutet. Als Radius sollen wir dabei r_m benutzen. Wir erhalten dann

$$W_1 = N . \pi r_m^2 . e^{-\frac{16 e^2}{h} \frac{Z}{v_{\text{eff}}} J(k)} . \tag{7}$$

Die so berechneten Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von Z sind durch die Kurven der Fig. 6 gegeben. Um die Gesamtausbeute in einer gewissen Schicht der zu zertrümmernden Substanz auszurechnen, haben wir die Formel (7) einfach zu integrieren, d. h. in Fig. 5 die von der W-Kurve und der Abszissenachse begrenzte Fläche auszurechnen. Die meisten Experimente sind mit ziemlich dicken Schichten ausgeführt worden; so daß man von der Anfangsreichweite bis zu Null integrieren kann (unendlich dicke Schicht). Nun sind zufällig die durch Integration erhaltenen Resultate von den in Fig. 6 gegebenen nur wenig verschieden, so daß wir für einen vorläufigen Vergleich mit der Erfahrung die Kurven von Fig. 6 selbst gebrauchen können. Die experimentellen Ergebnisse über die absoluten Werte der Zertrümmerungsausbeute sind indessen sehr ungenau. Für α-Strahlen von RaC′ in Al haben wir den Rutherfordschen Wert 4 (pro 10^6). Die Messungen von W. Bothe und F. Fränz† mit α-Strahlen von Polonium geben für die totale Ausbeute in den Elementen B, N ††,

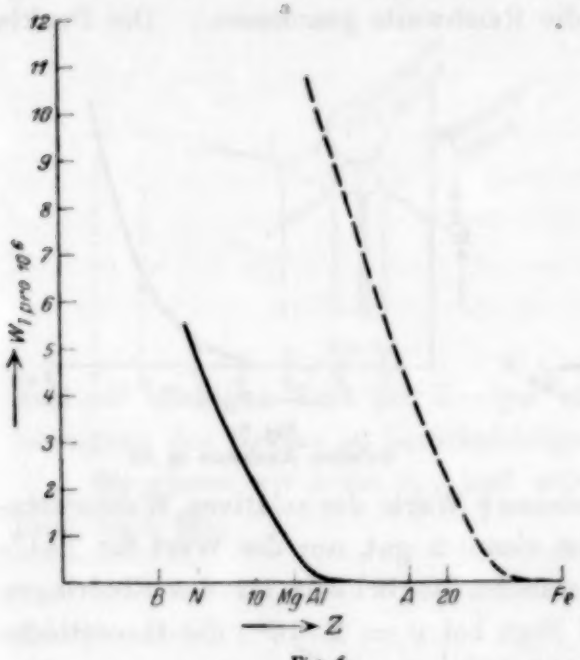


Fig. 6.
——— Ausbeute bei α-Strahlen von Po.
– – – Ausbeute bei α-Strahlen von RaC′.

† W. Bothe und F. Fränz, ZS. f. Phys. **43**, 456, 1927, und **49**, 1, 1928.
†† In der Form von $(CN)_x$.

Mg und Al entsprechend die Werte 13, 18, 1 und < 1 (pro 10^6). Für $Z > 13$ konnten sie keine Zertrümmerung bemerken. Ein Blick auf Fig. 6 zeigt, daß diese Resultate mit der Theorie in Übereinstimmung stehen. Von genauer Übereinstimmung kann doch jetzt noch keine Rede sein, da die obenerwähnten experimentellen Werte sehr unsicher sind. Sie sind namentlich unter der Annahme gleichmäßiger Richtungsverteilung der H-Teilchen ausgewertet, was, wie W. Bothe mir freundlich mitgeteilt hat, vielleicht nicht der Wirklichkeit entspricht. Da aber die theoretischen und experimentellen Werte nicht sehr verschieden sind, können wir schon jetzt sagen, daß (für zertrümmerbare Elemente) fast immer ein Proton weggeworfen wird, wenn ein α-Teilchen in den Kern hineinkommt. Ausdrücklich sei bemerkt, daß unsere Theorie natürlich gar nicht aussagt, daß überhaupt Zertrümmerung stattfindet, da sehr wohl W_2 verschwinden kann (etwa dann, wenn gar kein freies Proton im Kern vorhanden ist). Für größere Z jedoch fällt die theoretische Kurve für die Eindringungsmöglichkeit der α-Teilchen rasch ab, z. B. für Fe und Strahlen von RaC' wird $W_1 \sim 10^{-5}$ (pro 10^6). Hier ergibt sich freilich ein krasser Widerspruch der Theorie mit den Messungen der Wiener Forscher*, die für Eisen und andere schwere Elemente eine ziemlich große Ausbeute der Zertrümmerung gefunden haben.

Zum Schluß möchte ich Herrn Professor Niels Bohr meinen herzlichsten Dank aussprechen für viele wertvolle Besprechungen und Ratschläge, und die Möglichkeit, diese Arbeit auszuführen.

Kopenhagen, Universitetets Institut for teoretisk Fysik, Okt. 1928.

---

* G. Kirsch und H. Pettersson, ZS. f. Phys. **42**, 641, 1927.

Die Polarisation des Elektronenstoßleuchtens bei Edelgasen*.

Von **Karl Steiner** in Tübingen.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 12. Oktober 1928.)

Die Polarisation des Elektronenstoßleuchtens bei Neon und Helium wird experimentell untersucht. Bei Neon werden eindeutige Ergebnisse erhalten, deren Erklärungsmöglichkeit an einem Beispiel erläutert wird.

Im folgenden soll ein Beitrag zu der Frage der Polarisation des Elektronenstoßleuchtens geliefert werden. Untersucht wurden die Linien des Neon. Bisher lagen von anderen Beobachtern nur Messungen an Quecksilber vor. Um einen Vergleich mit diesen zu ermöglichen, wurden auch einige Linien des Quecksilberspektrums vom Verfasser untersucht. Ferner wurde der sichtbare Teil des Par- und Orthoheliumspektrums auf seinen Polarisationszustand bei Elektronenstoßanregung und der Einfluß von Wasserstoff und Helium als Zusatzgas zu Neon untersucht.

§ 1. Versuchsanordnung. Zur Erzeugung des Elektronenstrahls diente eine Röhre von der in Fig. 1 skizzierten Form. Die Kathode K

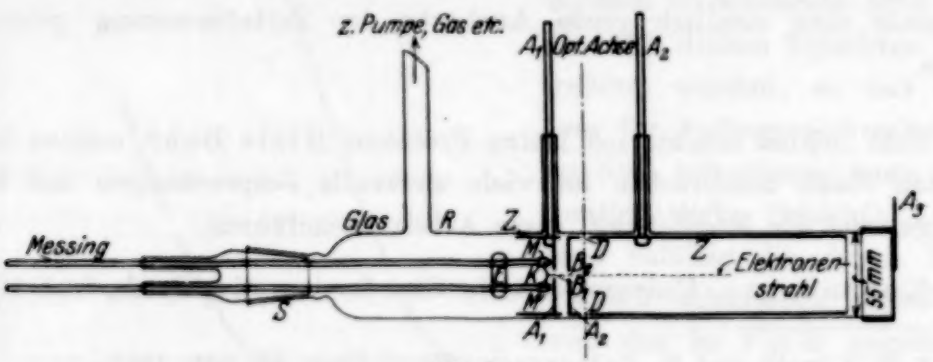
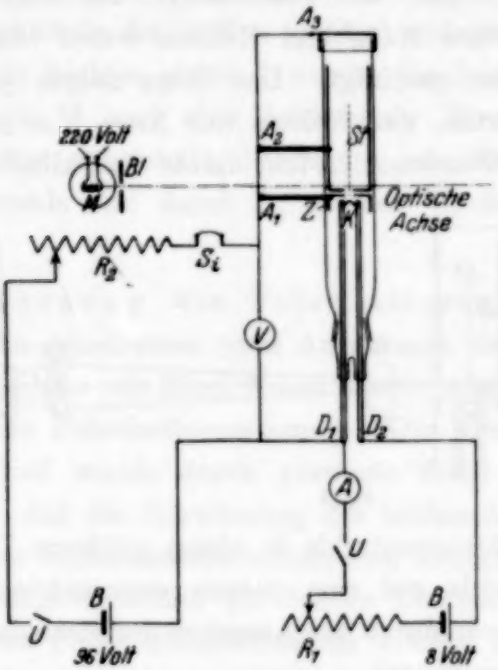


Fig. 1.

war als Oxydkathode ausgebildet und bestand aus einem 1 mm breiten, etwa 12 mm langen Platinblech von 15 μ Dicke, das in zwei 4 mm dicke Messingbacken M eingeklemmt war. Die große Wärmeableitung durch diese war insofern von Vorteil, als nur die Mitte des Streifens zum Glühen kam. Durch einen Oxydfleck an dieser Stelle erhielt man hier eine starke Elektronenemission. Der Oxydfleck wurde durch Verbrennen der feinpulverisierten Salze von Calcium-, Strontium- und Bariumnitrat auf dem elektrisch geglühten Platinstreifen in der Luft hergestellt. Der Kathode K gegenüber befand sich in einem Abstand von 2 bis 3 mm

* Tübinger Dissertation.

die Anode A_1 und im Abstand 7 mm von A_1 eine zweite Anode A_2, die je mit einem zentrischen Loch B_1 bzw. B_2 von 3 mm Durchmesser versehen waren. Die Anode A_2 sollte erstens als Blende zur schärferen Begrenzung des Elektronenstrahls wirken und zweitens die Möglichkeit geben, eine Gegenspannung zu der zwischen K und A_1 liegenden beschleunigenden Spannung anzulegen. Diese Gegenspannung erwies sich bei der angewandten Spannung von 30 bis 220 Volt als wirkungslos, da der Strahl im Beobachtungsraum hinter A_2 nach Durchlaufen des verzögernden Feldes dasselbe Aussehen und dieselbe Intensität hatte, wie wenn die resultierende Spannung direkt an A_1 angelegt und A_2 mit A_1



A Amperemeter,
V Voltmeter,
B Akkumulatorenbatterie,
R_1 u. R_2 Vorschaltwiderstände
U Stromschlüssel,
Si Sicherung,
K Oxydkathode,
A_1 Anode, mit A_2 und A_3 leitend verbunden,
St Elektronenstrahl,
M Milchglaslampe,
Bl Blende ‖ zum Elektronenstrahl.

Fig. 2.

auf demselben Potential gehalten wurden. Um im Beobachtungsraum hinter A_2 konstantes Potential zu haben, war A_2 mit einer das Rohr abschließenden Metallkappe A_3 und mit einem Metallzylinder Z elektrisch verbunden, der nur zwei diametral gegenüberliegende kleine Diaphragmen D zur Beobachtung des Stoßleuchtens besaß. Beobachtet wurde etwa 5 mm hinter der Blende A_2.

Die elektrische Anordnung ist durch Fig. 2 dargestellt. Der Heizstrom betrug ungefähr 5 Amp. Die beschleunigende Spannung zwischen K und A_1 wurde der Hausbatterie entnommen, der Spannungsabfall konnte durch Vorschaltwiderstand verändert werden und betrug etwa 60 Volt bei Neon, 50 Volt bei Helium. Bei einem Drucke von wenigen

tausendstel Millimeter Hg bildete sich unter diesen Bedingungen in der Achse der horizontal gerichteten Röhre ein scharfer, lichtstarker Strahl aus. Der Vorschaltwiderstand verhinderte die Entstehung einer Bogenentladung, so daß die Röhre ohne Aufsicht tagelang betrieben werden konnte. Zum Evakuieren diente eine kleine Gaedesche Diffusionspumpe. War die Apparatur etwa eine Stunde in Betrieb, so wurde von der Kathode und den Wänden kein Gas mehr abgegeben. Der Gasdruck in der Röhre blieb mehrere Tage, auch ohne zu kühlen, konstant. Für die Polarisationsaufnahmen wurden die Quecksilberdämpfe der Pumpe und etwaige sonstige Restgase mit flüssiger Luft ausgefroren. Ein CO_2-Äthergemisch genügte noch nicht zur vollständigen Entfernung der Restgase. Die verwendeten Gase Neon und Helium waren von Linde bezogen und nicht besonders gereinigt. Das Neon zeigte jedoch keine Verunreinigung im Spektrum, das Helium nur Neon, das zu etwa 2% darin enthalten war. Zur Wasserstoffzufuhr diente ein Palladiumröhrchen.

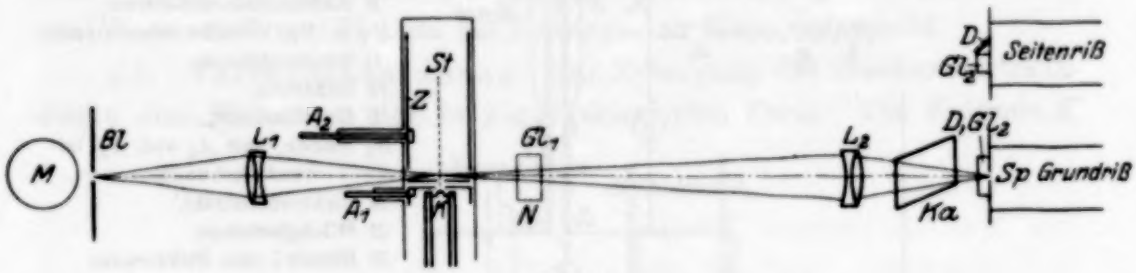


Fig. 3.

Da das Aussehen des Elektronenstrahls in einem größeren Druckbereich druckunabhängig war, wurde auf eine genaue manometrische Messung verzichtet und der Druck nur durch das Aussehen der Entladung in einem angeblasenen Geißlerrohr geschätzt.

Besondere Sorgfalt wurde auf die optische Anordnung (Fig. 3) verwendet. Die Beobachtungsrichtung war senkrecht zum Elektronenstrahl (*St*). Das zur Beobachtung gelangende Licht des Elektronenstrahls ging senkrecht durch die Röhrenwand hindurch und wurde von einem Achromaten L_2 auf den senkrecht zur Elektronenstrahlrichtung gerichteten Spalt (*Sp*) eines Hilgerschen Glasspektrographen abgebildet. Durch Zwischenschaltung eines Kalkspats *Ka* wurden zwei Bilder des Elektronenstrahls auf dem Spalt untereinander entworfen, von denen das eine das parallel, das andere das senkrecht zum Elektronenstrahl schwingende Licht enthielt. Da auf diese Weise beide Bilder gleichzeitig photographiert wurden, konnte aus den Schwärzungsverhältnissen der Polarisationsgrad für jede Linie bestimmt werden. Die Messung der Schwärzungen

wurde mit einem Rosenbergschen Elektromikrophotometer* ausgeführt. Zur Eichung diente ein unter 45° gegen die Schwingungsrichtung des Kalkspats orientiertes Nicolsches Prisma N mit geraden Endflächen. Bei den Polarisationsaufnahmen ohne Nicol wurde dieses durch eine Glasplatte Gl_1 gleicher optischer Dicke ersetzt. Der Unterschied der optischen Weglängen im Kalkspat für den ordentlichen und außerordentlichen Strahl wurde dadurch ausgeglichen, daß in dem einen Strahlengang vor dem Spalt eine Glasplatte Gl_2 von geeigneter Dicke angebracht war, deren Lage aus Grund- und Seitenriß in Fig. 3 hervorgeht. Das vor dem Spalt schräg angebrachte Deckgläschen D sollte die für beide Komponenten ungleichen Reflexionsverluste im Spektralapparat ausgleichen, damit das Intensitätsverhältnis der beiden spektral zerlegten Bilder bei Verwendung unpolarisierten Lichtes gleich 1 wurde. Zu Justierungszwecken war eine Milchglaslampe M und eine horizontale Blende Bl in Richtung der optischen Achse aufgestellt, letztere wurde durch L_1 an der Stelle des Elektronenstrahls und durch L_2 auf dem Spalt des Spektrographen abgebildet.

§ 2. Messung des Polarisationsgrades**. Auf derselben Platte wurden mindestens zwei Aufnahmen des Stoßleuchtens gemacht: eine Eichaufnahme mit Nicol N und eine zweite Aufnahme ohne Nicol für die eigentliche Polarisationsmessung. Die verschiedene Lichtstärke mit und ohne Nicol wurde durch passende Wahl der Belichtungszeiten so ausgeglichen, daß die Schwärzung der beiden Aufnahmen nahezu dieselbe war. Bei der Eichaufnahme erhielt man infolge der optischen Anordnung ein Schwärzungsverhältnis der beiden Komponenten, das nahe gleich 1 war. Bei der Polarisationsaufnahme konnte das Schwärzungsverhältnis gleich dem Intensitätsverhältnis gesetzt werden, weil für den engen in Betracht kommenden Schwärzungsbereich die photographische Schwärzungskurve als geradlinig anzusehen war. Division des Schwärzungsverhältnisses bei der Polarisationsaufnahme durch das der Eichaufnahme lieferte das wahre Intensitätsverhältnis der beiden Komponenten. Die Mittelwerte aus mehreren solchen Doppelaufnahmen, deren Dauer 40 bis 60 Stunden betrug, sind in Tabelle 1 und 2 zusammengestellt. Tabelle 1

* H. Rosenberg, ZS. f. Instrkde. **45**, 313, 1925.

** Unter dem Polarisationsgrad Π versteht man $\Pi = \frac{J_{\parallel} - J_{\perp}}{J_{\parallel} + J_{\perp}} \cdot 100\%$. Wenn von einer Polarisationsrichtung gesprochen wird, so ist hier immer die Schwingungsrichtung des elektrischen Lichtvektors verstanden. Als Bezugsrichtung dient, wenn nicht anders vermerkt, die Richtung des Elektronenstrahls.

Tabelle 1. (Neon.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Serienkombination		Reines Neon			Überwieg. Polarisationsrichtung relativ zum Elektronenstrahl	Ne + He	Ne + H_2
λ	nach Paschen	nach Hund	a	$\frac{J_{\parallel}}{J_{\perp}} \cdot 100$	$\pm \Delta$		$\frac{J_{\parallel}}{J_{\perp}} \cdot 100$	$\frac{J_{\parallel}}{J_{\perp}} \cdot 100$
5852	$1{,}5\,s_2 - 2\,p_1$	$2^1P_1 - 3^3P_0$	16	102	2	0	99	101
6074	$1{,}5\,s_4 - 2\,p_3$	$2^3P_1 - 3^1S_0$	13	101	3	0	111	101
6532	$1{,}5\,s_3 - 2\,p_7$	$2^3P_0 - 3^1P_1$	1	61	—	$\perp$	—	75
6266	$2\,p_5$	3^3D_1	4	64	3	$\perp$	88	(86)
6163	$2\,p_2$	3^3P_1	1	66	—	$\perp$	—	76
6717	$1{,}5\,s_2 - 2\,p_5$	$2^1P_1 - 3^3D_1$	2	112	5	$\parallel$	—	102
6598	$2\,p_2$	3^3P_1	5	116	5	$\parallel$	110	100
6382	$1{,}5\,s_4 - 2\,p_7$	$2^3P_1 - 3^1P_1$	8	126	9	$\parallel$	110	104
6029	$2\,p_2$	3^3P_1	1	130	—	$\parallel$	—	(112)
7032	$1{,}5\,s_5 - 2\,p_{10}$	$2^3P_2 - 3^3S_1$	2	88	2	$\perp$	—	88
6217	$2\,p_7$	3^1P_1	2	92	3	$\perp$	86	(81)
5881	$2\,p_2$	3^3P_1	6	88	6	$\perp$	—	91
6929	$1{,}5\,s_2 - 2\,p_6$	$2^1P_1 - 3^3P_2$	3	116	5	$\parallel$	—	113
6678	$2\,p_4$	3^3D_2	9	142	8	$\parallel$	140	141
6506	$1{,}5\,s_4 - 2\,p_8$	$2^3P_1 - 3^1D_2$	10	130	5	$\parallel$	130	(120)
6304	$2\,p_6$	3^3P_2	1	139	—	$\parallel$	—	—
6096	$2\,p_4$	3^3D_2	13	131	5	$\parallel$	123	130
6334	$1{,}5\,s_5 - 2\,p_8$	$2^3P_2 - 3^1D_2$	8	78	4	$\perp$	92	90
6143	$2\,p_6$	3^3P_2	13	76	2	$\perp$	90	86
5944	$2\,p_4$	3^3D_2	12	76	3	$\perp$	91	82
6402	$1{,}5\,s_5 - 2\,p_9$	$2^3P_2 - 3^3D_3$	10	126	5	$\parallel$	109	115

enthält in Spalte 1 die Wellenlänge λ in Å.-E., in Spalte 2 die Serienkombination nach Paschen*, in Spalte 3 nach Hund** in der Russell, und Saunderschen Bezeichnung, in Spalte 4 die Anzahl a der Messungen aus denen der Mittelwert gewonnen wurde, in Spalte 5 den Mittelwert des Intensitätsverhältnisses $\frac{J_{\parallel}}{J_{\perp}} \cdot 100$ der parallel zum Strahl schwingenden Komponente $J_{\parallel}$ zu der senkrecht zum Strahl schwingenden $J_{\perp}$ für reines Neon, in Spalte 6 den wahrscheinlichen Fehler Δ, aus der Streuung der Einzelwerte berechnet, in Spalte 7 die überwiegende Polarisationsrichtung bezogen auf die Elektronenstrahlrichtung, in Spalte 8 das Intensitätsverhältnis $\frac{J_{\parallel}}{J_{\perp}} \cdot 100$ für Neon mit Heliumzusatz und in Spalte 9 dasselbe

* F. Paschen, Ann. d. Phys. **60**, 405, 1919.

** F. Hund, Linienspektren u. period. System der Elemente, Berlin 1927, S. 144.

für Neon mit Wasserstoffzusatz. Die Zeilen sind, wie aus Spalte 3 zu ersehen, in Gruppen nach steigender Gesamtdrehimpulsquantenzahl j_a des Ausgangszustands und in Untergruppen nach steigendem j_e des Endzustands geordnet (siehe auch Tabelle 3). Tabelle 2 enthält die Polarisationswerte für die sichtbaren Linien des Par- und Orthoheliumspektrums. Die Einteilung der Tabelle 2 ist ähnlich derjenigen von Tabelle 1.

Tabelle 2. (Helium.)

λ in Å.-E.	Serienkombination	Parhelium		
		$\frac{J_{\parallel}}{J_{\perp}} \cdot 100$	Überwiegende Polarisationsrichtung	Polarisationsgrad P %
5047	$2\,^1P_1 - 4\,^1S_0$	90	$\perp$	5
4437	$5\,^1S_0$	85	$\perp$	8
4169	$6\,^1S_0$	81	$\perp$	10
5015	$2\,^1S_0 - 3\,^1P_1$	100	0	0
3964	$4\,^1P_1$	95	$\perp$	3
6678	$2\,^1P_1 - 3\,^1D_2$	113	$\parallel$	6
4922	$4\,^1D_2$	111	$\parallel$	5
4388	$5\,^1D_2$	110	$\parallel$	5
4143	$6\,^1D_2$	(104)	$\parallel$	2
		Orthohelium		
7065	$2\,^3P - 3\,^3S_1$	(77)	$\perp$	13
4713	$4\,^3S_1$	87	$\perp$	7
4120	$5\,^3S_1$	(85)	$\perp$	8
3888	$2\,^3S_1 - 3\,^3P$	(98)	0	0
5875	$2\,^3P - 3\,^3D$	96	$\perp$	2
4471	$4\,^3D$	93	$\perp$	4
4026	$5\,^3D$	(93)	$\perp$	4

§ 3. Fehlerquellen. Diese lassen sich in drei Gruppen teilen:

a) Photographische. Das Rosenbergsche Elektromikrophotometer gestattet die Schwärzungsverhältnisse mit praktisch beliebiger Genauigkeit zu messen, so daß die Schwärzungsmessung selbst fehlerfrei ist. Nicht in demselben Maße fehlerfrei ist die Intensitätsmessung, weil die photographische Platte durch die Korngröße, die Ungleichmäßigkeit der Emulsion, und, da im gelben und roten Spektralbereich gearbeitet wurde, durch die ungleichmäßige Sensibilisierung der Schicht eine Reihe von Fehlerquellen enthält.

Gegenüber diesen Fehlern konnte die etwaige Abweichung des Intensitätsverhältnisses vom Schwärzungsverhältnis vernachlässigt werden.

Besonders gute Ergebnisse wurden mit der Ilford Monarch-Platte erzielt.

Eine gut brauchbare Sensibilisierung ergab Pinaverdol für das Gebiet unterhalb 6150 Å.-E. Die Sensibilisierung mit Pinachromblau für größere Wellenlängen konnte nicht so gleichmäßig erreicht werden, obwohl mit bloßem Auge keine Flocken oder Schlieren zu beobachten waren. In diesem Spektralbereich erwiesen sich die ebenfalls von Ilford hergestellten Panchromatic Plates Special Rapid und Rapid Process als besser, die dieselbe Farb- und Lichtempfindlichkeit besitzen wie die mit Pinachromblau selbstsensibilisierten Monarch-Platten. Die große Streuung der Einzelwerte, Tabelle 1, Spalte 6, ist in erster Linie auf die Sensibilisierung zurückzuführen, was auch daraus hervorgeht, daß die Verwendung nicht ganz frisch angesetzter Sensibilisatoren noch viel größere Schwankungen lieferte.

b) Druck- und Spannungsschwankungen. Häufige Stichproben ergaben, daß der Druck (infolge Selbstevakuierung und dadurch erforderte Gasnachfüllung) innerhalb der Grenzen 10^{-4} und 10^{-2} mm Hg, die Anodenspannung in den Grenzen 60 bis 64 Volt blieb. Druckschwankungen solcher Größe dürften, wie die Versuche an Hg zeigen, für das Ergebnis belanglos sein. Gleiches gilt für die angegebenen Spannungsschwankungen, da die mittlere Spannung von 60 Volt so hoch über der Ionisierungsspannung liegt, daß eine kleine Änderung keinen Einfluß hat.

c) Optische Fehler. Die größte systematische Fehlerquelle sind Polarisationseffekte durch Reflexion an den Wänden der Apparatur. Sie waren dadurch vermieden, daß der Strahl senkrecht durch die Röhrenwand hindurchtrat und der Metallschutzzylinder Z an der betreffenden Stelle mit Mattlack geschwärzt war. Alle Polarisationswirkungen auf dem Wege zwischen Nicol und Spektralapparat und in diesem selbst, wurden durch die Eichaufnahme eliminiert. Die Genauigkeit der Methode ist mithin fast ausschließlich durch ungleiche Sensibilisierung der photographischen Platte begrenzt. Der wahrscheinliche Fehler des Resultats dürfte durchschnittlich 5 % betragen, wie sich aus Spalte 6, Tabelle 1 ergibt.

§ 4. Diskussion der Versuche. Die Messungen an reinem Neon zeigen ein eindeutiges Ergebnis. Der Vergleich von Spalte 3 und 7 der Tabelle 1 liefert folgendes:

Befindet sich das Atom in einem Ausgangszustand mit der Gesamtdrehimpulsquantenzahl $j_a = 0$, so wird keine Polarisation beobachtet.

Ist $j_a = 1$, so ist die ausgesandte Linie teilweise senkrecht zum Elektronenstrahl polarisiert, wenn sich j bei der Emission um eine Einheit ändert ($\Delta j = \pm 1$), die Linie ist dagegen überwiegend parallel zum Strahl polarisiert, wenn j beim Sprunge konstant bleibt ($\Delta j = 0$).

Ist im Ausgangszustand $j_a = 2$ oder 3, so tritt das Gegenteil hiervon ein: Für $\Delta j = \pm 1$ erhält man stets überwiegend parallel polarisiertes Licht, für $\Delta j = 0$ stets überwiegend senkrecht polarisiertes Licht.

Es fällt auf, daß alle überwiegend senkrecht zum Strahl polarisierten Linien mit metastabilen Endtermen* kombinieren, was die Vermutung einer gesetzmäßigen Beziehung zwischen Metastabilität des Endterms und Polarisationsüberschuß nahelegen könnte, deren Ursache in Selbstabsorption zu suchen wäre. Dem widerspricht aber der Befund bei der Linie $\lambda = 6402$ Å.-E., welche eine Kombination des metastabilen Terms $1{,}5\,s_5$ ist, aber dennoch parallelen Polarisationsüberschuß zeigt. Dies schließt die Annahme einer solchen Beziehung aus.

Der Zusatz eines Fremdgases zu Neon wirkt, wie Tabelle 1, Spalte 8 und 9 zeigt, für einen Teil der Linien depolarisierend: nicht beeinflußt werden die Linien, deren Emission mit einem Übergang $j_a = 2$ nach $j_e = 1$ oder $j_a = 1$ nach $j_e = 2$ verbunden ist. Die eingeklammerten Werte sind unsicher.

Um die Messungen an Neon, und diejenigen anderer Beobachter**, ***, ****, † an Quecksilber vergleichen zu können, sind in Tabelle 3 auch die bisherigen Messungen an Quecksilber zusammengestellt. Spalte 12 enthält Messungen des Verfassers an Quecksilber bei 60 Volt, die zum Vergleich mit den bisher vorliegenden angestellt wurden. Es ergab sich quantitative Übereinstimmung mit den Skinnerschen Werten bei 60 Volt††.

§ 5. Theoretische Diskussion. Skinner*** hat versucht, die Polarisation des Elektronenstoßleuchtens zu erklären auf Grund von Beobachtungen an Quecksilber. Er nimmt mit Ellett, Foote und Mohler** an, daß ein Elektron, dessen Voltgeschwindigkeit nur wenig größer ist als die Anregungsspannung für die betreffende Linie, beim Stoß dem Atom einen Drehimpuls erteilt, dessen Vektor j_a in der senk-

---

* Die Terme $1{,}5\,s_3$ und $1{,}5\,s_5$ des Neonspektrums sind metastabil.

** A. Ellett, P. Foote und F. Mohler, Phys. Rev. (2) **27**, 31, 1926.

*** H. Skinner, Nature **117**, 418, 1926; Proc. Roy. Soc. (A) **112**, 642, 1926.

**** J. A. Eldridge und H. F. Olson, Phys. Rev. (2) **28**, 1151, 1926.

† B. Quarder, ZS. f. Phys. **41**, 674, 1927.

†† H. Skinner und E. Appleyard, Proc. Roy. Soc. (A) **117**, 224, 1928.

Tabelle 3.

1	2	3	4		5	6	7	8	9	10	11	12	13
Annahmen m_a	j_a	Δj	Kombination n. Hund		Neon λ	reines Neon $I\!I$ % beob.	$I\!I$ berechnet		$I\!I$ beobachtet an Hg				Hg λ
							n. Verfasser	n Skinner	Skinner	Quarder	Eldridge u. Olson	Verfasser	
$\frac{0}{0}$	0	+1	$^1P_1$	$^1S_0$	—	—	0	0	0	10 ∥	—	0	4916
		+1		$^3P_0$	5852	1 ∥	0	0					
		+1	$^3P_1$	$^1S_0$	6074	0,5 ∥	0	0	0	10 ∥	W**	—	4077
0	1	−1	$^1S_0$	$^3P_1$	—	—	100 ⊥	100 ∥	30 ⊥	⊥	(30 ⊥*)	—	2537
		−1	$^3P_0$	$^3S_1$	—	—	100 ⊥	100 ∥	8 ∥	33 ∥	W	—	4046
		−1		$^1P_1$	6532	24 ⊥	100 ⊥	100 ∥					
		−1		$^3D_1$	6266	22 ⊥	100 ⊥	100 ∥	25 ∥	33 ∥	⊥W	—	2967
		−1		$^3P_1$	6163	20 ⊥	100 ⊥	100 ∥					
		0	$^1P_1$	$^3D_1$	6717	6 ∥	33 ∥	100 ⊥					
		0		$^3P_1$	6598	7 ∥	33 ∥	100 ⊥					
		0	$^3P_1$	$^3S_1$	—	—	33 ∥	100 ⊥	12 ⊥	15 ∥	∥	⊥	4358
		0		$^1P_1$	6382	12 ∥	33 ∥	100 ⊥					
		0		$^3D_1$	—	—	33 ∥	100 ⊥	17 ⊥	—	W	—	2653
		0		$^3P_1$	6029	13 ∥	33 ∥	100 ⊥					
		+1	$^3P_2$	$^3S_1$	7032	6 ⊥	8 ⊥	14 ∥	0	7 ∥	—	0	5460
		+1		$^1P_1$	6217	4 ⊥	8 ⊥	14 ∥					
		+1		$^3D_1$	—	—	8 ⊥	14 ∥	—	—	W	—	3026
		+1		$^3P_1$	5881	6 ⊥	8 ⊥	14 ∥					
2	2	−1	$^1P_1$	$^1D_2$	—	—	33 ∥	60 ∥	28 ∥	40 ∥	—	∥	5790
		−1		$^3P_2$	6929	7 ∥	33 ∥	60 ∥					
		−1		$^3D_2$	6678	17 ∥	33 ∥	60 ∥	28 ∥	—	—	∥	5769
		−1	$^3P_1$	$^1D_2$	6506	13 ∥	33 ∥	60 ∥	28 ∥	40 ∥	∥	—	3131
		−1		$^3P_2$	6304	16 ∥	33 ∥	60 ∥					
		−1		$^3D_2$	6096	13 ∥	33 ∥	60 ∥	28 ∥	20 ∥	∥	—	3125
		0	$^3P_2$	$^1D_2$	6334	12 ⊥	43 ⊥	100 ⊥	41 ⊥	45 ⊥	⊥	—	3663
		0		$^3P_2$	6143	14 ⊥	43 ⊥	100 ⊥					
		0		$^3D_2$	5944	14 ⊥	43 ⊥	100 ⊥	35 ⊥	—	⊥	—	3654
2,3	3	−1	$^3P_2$	$^3D_3$	6402	12 ∥	18 ∥	50 ∥	18 ∥	15 ∥	∥	—	3650
3							33 ∥						

* Nach Messungen von Ellett, Foote und Mohler, l. c. — ** W = wenig oder nicht polarisiert.

recht zur Stoßrichtung gerichteten Ebene liegt. (Dies folgt aus einer rein mechanischen Betrachtung des Stoßvorgangs für einen exzentrischen Stoß.) Ein senkrecht zur Elektronenstrahlrichtung angelegtes äußeres Magnetfeld hat, wie beobachtet, eine teilweise Depolarisation zur Folge, die von einer Drehung der Polarisationsebene begleitet ist, wenn Feld und Beobachtungsrichtung zusammenfallen. Ein Magnetfeld parallel zum Elektronenstrahl hat keine Polarisationsänderung zur Folge.

Für einen Rotator in einem Magnetfeld parallel zum Elektronenstrahl folgt keine Depolarisation, wenn man den Gesamtdrehimpulsvektor senkrecht zum Elektronenstrahl annimmt. Für ein Magnetfeld senkrecht zum Elektronenstrahl aber folgt Depolarisation, wenn man wieder den Drehimpulsvektor senkrecht zum Elektronenstrahl annimmt. Diese Depolarisation ist von einer Drehung der Polarisationsebene begleitet, wenn die Magnetfeldrichtung mit der Beobachtungsrichtung zusammenfällt und die Dämpfung des Rotators berücksichtigt wird. Genau dies wird auch beobachtet. Es läßt sich also allein mit der Annahme, daß der Drehimpulsvektor senkrecht zum Elektronenstrahl steht, der Einfluß eines äußeren Magnetfeldes auf den Polarisationsgrad erklären.

Um die Entartung des betrachteten Systems aufzuheben, nimmt Skinner ein hypothetisches Magnetfeld parallel zum Elektronenstrahl an in Analogie zur Erklärung der Wood-Ellett-Versuche* durch Heisenberg**. Dieses Feld hat auf die Polarisation keinen Einfluß. Da j_a senkrecht auf der hypothetischen Feldrichtung steht, befindet sich das Atom nur im magnetischen Quantenzustand $m = 0$. Von diesem Niveau aus sollen bei Emission einer Spektrallinie sämtliche erlaubte Übergänge möglich sein. Dies führt unter Berücksichtigung der Intensitätsregeln der Zeemankomponenten*** qualitativ zu der Regel: Bei der Emission einer Frequenz entspricht einer Änderung $\Delta j = \pm 1$ Polarisation überwiegend parallel zum Elektronenstrahl, einer Änderung $\Delta j = 0$ Polarisation senkrecht zum Elektronenstrahl, da für $\Delta j = 0$ der Übergang $\Delta m = 0$ verboten ist. Ist das Atom im angeregten Zustand impulslos, so ist die emittierte Frequenz unpolarisiert. Quantitativ erhält man die in Tabelle 3, Spalte 8 angegebenen Werte für den Polarisationsgrad Π. Vergleicht man die so berechneten Werte mit den bei Neon beobachteten (Spalte 6), so stimmen dieselben nur teilweise qualitativ überein. Eine Ausnahme bilden alle die Linien, die von einem Zustand mit der Gesamtdrehimpulsquantenzahl $j_a = 1$ ausgehen. In diesem Falle $j_a = 1$ wurde die entgegengesetzte Polarisationsrichtung bei Neon beobachtet, wie nach Skinner zu erwarten wäre. Auch bei

* R. W. Wood und A. Ellett, Phys. Rev. (2) **24**, 243, 1924.
** W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **31**, 617, 1925.
*** H. Hönl, Ann. d. Phys. **79**, 273, 1926.

Quecksilber bilden die Linien, die von einem Zustand $j_a = 1$ ausgehen, vielfach Ausnahmen; zudem widersprechen sich die Messungen verschiedener Beobachter für solche Linien (siehe Tabelle 3, Spalten 9 bis 12). Nach den Skinnerschen Überlegungen sollte man die stärkste Polarisation dann erwarten, wenn das Elektron nach dem Stoß die Geschwindigkeit Null hat. In seiner letzten Arbeit* findet aber Skinner bei Quecksilber, daß die Polarisation stark abnimmt, wenn man zu Elektronengeschwindigkeiten herabgeht, die nur wenig über dem Anregungspotential der betreffenden Linie liegen. Extrapoliert man auf das Anregungspotential selbst, so erhält man die Polarisation Null. Diese Erscheinung kann mit den Skinnerschen Annahmen nicht mehr erklärt werden. Auch die Erklärung der Ausnahmen für $j_a = 1$ ist nur durch Berücksichtigung des Elektronendralls möglich**.

Es wurde deshalb versucht, eine andere Erklärung für die beobachtete Polarisation zu geben, die das hypothetische Magnetfeld vermeidet und die Abnahme der Polarisation für kleine Elektronengeschwindigkeiten erklärt. Die Einstellung des Vektors j_a in die Ebene E senkrecht zum Elektronenstrahl wird beibehalten. Diese ist durch den oben beschriebenen Einfluß eines äußeren Magnetfeldes gefordert. Statt des hypothetischen Magnetfeldes parallel zum Strahl wird aber das zirkulare Magnetfeld $\mathfrak{H}_z$ betrachtet, welches das stoßende Elektron nach dem Stoße noch mit sich führt, wenn es eine Restgeschwindigkeit v behält. Die Kraftlinien dieses Feldes verlaufen in der Ebene senkrecht zur Flugrichtung, die für nicht zu große Elektronengeschwindigkeiten annähernd parallel zur Strahlrichtung ist. Die Feldstärke*** ist im atomaren Abstand von 10^{-8} cm von der Größenordnung 10000 Gauß. Das Neonatom ist im neutralen Zustand impulslos. Wird dem Atom durch Stoß ein Drehimpuls erteilt, so kann sich der Impulsvektor nur in die Ebene E einstellen. Er kann aber in dieser Ebene relativ zu dem zirkularen Magnetfeld noch beliebig orientiert sein.

Nimmt man z. B. j_a senkrecht zu den zirkularen Feldlinien (d. i. $m_a = 0$) in der Ebene E an, so erhält man — wie unten gezeigt wird — für $\Delta j = \pm 1$ Polarisation überwiegend senkrecht zum Elektronenstrahl,

---

* H. Skinner und E. Appleyard, l. c.

** J. R. Oppenheimer hat die Polarisation des Elektronenstoßleuchtens quantenmechanisch berechnet und die Skinnerschen Annahmen gestützt. ZS. f. Phys. **43**, 27, 1927.

*** $\mathfrak{H}_z = \frac{e \cdot v}{c \cdot r^2} \cdot \sin \alpha$.

für $\Delta j = 0$ Polarisation überwiegend parallel zum Elektronenstrahl wegen des Verbots $\Delta m = 0$. Dies wird für $j_a = 1$ beobachtet.

Stellt sich j_a parallel zu $\mathfrak{H}_z$ (d. i. $m_a = j_a$), so erhält man für $\Delta j = \pm 1$ Polarisation überwiegend parallel zum Elektronenstrahl, für $\Delta j = 0$ Polarisation überwiegend senkrecht dazu. Dies wird für $j_a = 2$ und 3 beobachtet.

Nimmt j_a alle quantenmäßig erlaubten Stellungen ein, so beobachtet man keine Polarisation.

Für $j_a = 0$ ist keine Einstellung zu erwarten.

Ist die Elektronengeschwindigkeit v nach dem Stoß klein, so tritt wegen der kleinen magnetischen Feldstärke nach Bohr unscharfe Quantelung ein. Diese äußert sich als teilweise Depolarisation und läßt für

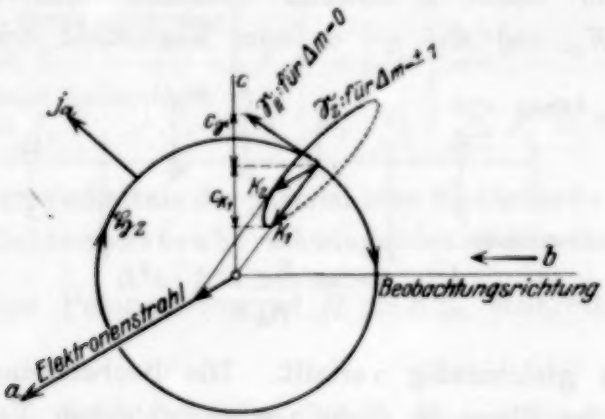


Fig. 4.

den Grenzfall $v = 0$ keine Polarisation mehr zu. Auf diese Weise könnte die von Skinner an Quecksilber beobachtete Abnahme der Polarisation für kleine Elektronengeschwindigkeiten (siehe oben) erklärt werden.

Die quantitative Berechnung von Π sei an folgendem Beispiel $\lambda = 7032$ Å.-E., $2\,^3P_2 - 3\,^3S_1$ gezeigt: Wird das neutrale Neonatom durch Elektronenstoß von 60 Voltelektronen zum $3\,^3S_1$-Zustand angeregt, so erhält das Atom den Gesamtdrehimpuls $j_a = 1$ (in Einheiten $h/2\pi$). Das stoßende Elektron hat nach dem Stoß noch etwa 40 Volt Geschwindigkeit. Es sei in Fig. 4 der Elektronenstrahl senkrecht zur Zeichenebene gerichtet. Der Vektor j_a soll nach obigem in der Ebene E senkrecht zum Elektronenstrahl, also in der Zeichenebene liegen. In dieser Ebene und parallel dazu verlaufen auch (näherungsweise) die zirkularen magnetischen Kraftlinien $\mathfrak{H}_z$ des wegfliegenden Elektrons, die durch den Kreis $\mathfrak{H}_z$ dargestellt sind. In unserem Beispiel soll sich das Atom in dieser Ebene E mit seinem Gesamtdrehimpulsvektor j_a senkrecht zu $\mathfrak{H}_z$

einstellen, die Stellung parallel bzw. antiparallel $\mathfrak{H}_z$ komme nicht vor: es ist deshalb nur der magnetische Zustand $m_a = 0$ möglich. Von dem Zustand $3\,^3S_1$, $m_a = 0$ sind für die Linie 7032 Å.-E. nur die Übergänge zu den Zuständen $2\,^3P_2$, $m_e = 0, +1, -1$ durch das Auswahlprinzip erlaubt. Der Änderung $\Delta m = 0$ entspricht nach dem Korrespondenzprinzip Licht ($\mathfrak{S}_\parallel$), das parallel zu $\mathfrak{H}_z$ polarisiert ist, $\Delta m = \pm 1$ entspricht Licht ($\mathfrak{S}_z$), das zirkular zu $\mathfrak{H}_z$ polarisiert ist. Die Schwingung $\mathfrak{S}_\parallel$ liegt in Fig. 4 in der Zeichenebene E, $\mathfrak{S}_z$ umschlingt $\mathfrak{H}_z$ kreisförmig und liegt in einer senkrecht zu E gerichteten Ebene durch den Elektronenstrahl. Diese zirkulare Schwingung $\mathfrak{S}_z$ läßt sich in zwei Komponenten K_1 parallel E und K_2 senkrecht E (d. i. parallel zum Elektronenstrahl) von je der halben ursprünglichen Intensität zerlegen. Da die Kraftlinien in der Ebene E zirkular verlaufen, sind die Schwingungsrichtungen K_1 und $\mathfrak{S}_\parallel$ — da zum Magnetfeld orientiert — in der

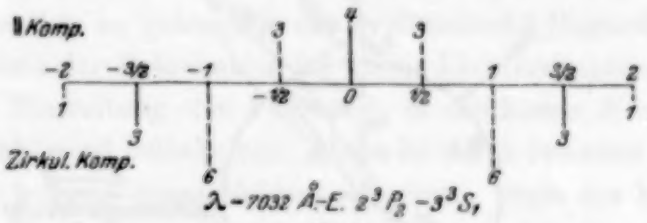


Fig. 5.

Zeichenebene gleichmäßig verteilt. Die Beobachtungsrichtung b liegt ebenfalls in der Ebene E, deshalb wird bei dieser Verteilung nicht die volle Intensität von K_1 und $\mathfrak{S}_\parallel$ beobachtet, sondern nur die jeweilige Komponente c_K bzw. $c_\mathfrak{S}$ senkrecht zur Beobachtungsrichtung. Die Mittelung über alle Lagen in E liefert, wie leicht einzusehen ist, als resultierende Intensität die halbe Intensität von K_1 und $\mathfrak{S}_\parallel$, die senkrecht zum Strahl polarisiert beobachtet wird. Die parallel zum Strahl schwingende Komponente K_2 gelangt mit voller Intensität zur Beobachtung.

Der vollständige Zeemaneffekt der Linie 7032 Å.-E. hat die in der Fig. 5 gezeichneten neun Komponenten mit der Aufspaltung 0, $\pm {}^1/_2$ parallel und ± 1, $\pm {}^3/_2$, ± 2 zirkular (in Lorentz-Einheiten). Über den Linien stehen die nach der Hönlschen Intensitätsregel berechneten relativen Intensitäten. Hiervon treten nur die ausgezogenen Linien auf, und zwar die Komponente 0 (Übergang $m_a = 0 \rightarrow m_e = 0$) als Schwingung parallel zu $\mathfrak{H}_z$. Die Komponenten $\pm {}^1/_2$ können nicht auftreten, da der Zustand $m_a = \pm 1$ nach unserer Grundannahme nicht vorhanden ist. Ferner treten auf die Komponenten $\pm {}^3/_2$ zirkular zu $\mathfrak{H}_z$ schwingend als Übergang von $m_a = 0 \rightarrow m_e = \pm 1$; die Komponenten ± 1 und ± 2

treten nicht auf, weil $m_a = \pm 1$ nicht vorhanden ist. Man zerlege nun die auftretenden Zeemanschwingungen in ihre Komponenten K_1 parallel E und K_2 senkrecht E (parallel zum Elektronenstrahl), mittele über alle Lagen der Komponenten K_1 und $\mathfrak{S}_{\parallel}$ in E, so erhält man unter Berücksichtigung der Gesamtintensität folgende Werte (Tabelle 4):

Tabelle 4.

$\Delta m =$	0	+1	−1	
Intensität der Zeemankomponente . .	4	3	3	Nach Hönl.
" " Komponente $\mathfrak{S}_{\parallel}$ und K_1 (in E)	4	$^3/_2$	$^3/_2$	
$\perp$ zum Elektronenstrahl beobachtete Komponente $J_\perp$ durch Mittelung über alle Lagen in E	2	$^3/_4$	$^3/_4$	$\sum J_\perp = {}^7/_2$
$\parallel$ zum Elektronenstrahl beobachtete Komponente $K_2 \equiv J_{\parallel}$	0	$^3/_2$	$^3/_2$	$\sum J_{\parallel} = {}^6/_2$

$\frac{J_{\parallel}}{J_\perp} = {}^6/_7$.

Das Intensitätsverhältnis der parallel zum Elektronenstrahl zu der senkrecht zum Elektronenstrahl schwingenden Komponenten ist also $\frac{J_{\parallel}}{J_\perp} = {}^6/_7$ oder der Polarisationsgrad $\Pi = 8\,\%$, senkrecht zum Strahl polarisiert.

Die in diesem Beispiel angewandte Berechnungsvorschrift für den Polarisationsgrad läßt sich ohne weiteres auf alle untersuchten Neonlinien ausdehnen und gibt, wie Tabelle 3, Spalte 6 und 7 zeigt, die Beobachtungen durchgängig qualitativ richtig wieder. Dabei ist die Annahme notwendig, daß für $j_a = 1$, $m_a = 0$ gesetzt wird, das bedeutet Einstellung von j_a senkrecht zum zirkularen Felde $\mathfrak{H}_z$; für $j_a = 2$ aber ist $m_a = 2$ anzunehmen, d. h. j_a parallel $\mathfrak{H}_z$*. Diese Werte für m_a sind in Spalte 1 angegeben. Eine Begründung für diese Annahme läßt sich vorläufig nicht geben. Daß die beobachteten Polarisationswerte durchweg kleiner sind als die berechneten, kann dadurch erklärt werden, daß das Elektron nach dem Stoße nicht mehr streng parallel zum Elektronenstrahl weiterfliegt.

Die vom Verfasser bei Neon beobachteten Werte des Polarisationsgrades werden durch weitere Untersuchungen wahrscheinlich keine wesent-

* Die Annahme $m_a = 1, 2$ bzw. $m_a = 1, 2^*, 3$ liefert einen Polarisationsgrad π, der kleiner als der beobachtete ist.

liche Änderung erfahren*. Zur direkten Prüfung der vorgeschlagenen Hypothese sind andere experimentelle Untersuchungen vorgenommen. Von Helium wurden nur die Messungsergebnisse mitgeteilt. Eine Erklärung steht noch aus. Die Sicherheit der Beobachtungen dürfte hinter den Neonbeobachtungen zurückstehen, weil nur wenige Messungen vorliegen.

Ich möchte diese Arbeit nicht abschließen, ohne meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. W. Gerlach für die Anregung zu dieser Arbeit und wertvolle Ratschläge bei der Ausführung derselben herzlichst zu danken.

Tübingen, Physikalisches Institut der Universität, Oktober 1928.

* Nach Abschluß der Arbeit ist eine vorläufige Mitteilung von B. Quarder erschienen, die zum Teil obige Arbeit berührt. Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. (3) 9, 45, 1928.

Zeemaneffekt und Termordnung im Spektrum des einfach ionisierten Chroms.

Von **Erwin Krömer** in Tübingen.

(Eingegangen am 22. Oktober 1928.)

Die Zeemaneffekte von 50 Cr^+-Linien ergeben die magnetischen Termaufspaltungsfaktoren der bisher bekannten Terme und darüber hinaus die von zwei weiteren Termmultipletts. Das so ergänzte Termsystem stimmt mit dem theoretischen überein. Außerdem läßt sich die Elektronenkonfiguration für jedes Termmultiplett eindeutig bestimmen. Zwischen den aus verschiedenen Elektronenkonfigurationen hervorgehenden Termen bestehen Interkombinationen.

Im Spektrum von Cr^+ sind von Meggers, Kiess und Walters jr.* sowie von Kiess und Laporte** eine Anzahl von Multipletts gefunden worden; die aus ihnen hervorgehende Termstruktur steht mit der theoretisch zu erwartenden im Einklang. Jedoch enthalten diese Gruppen noch nicht alle tiefliegenden Terme. Im nachstehenden wird eine Vervollständigung des Termsystems gegeben, die wesentlich durch Heranziehung des Zeemaneffekts möglich geworden ist. Die magnetische Termanalyse liefert zugleich das Mittel, die Elektronenkonfigurationen festzustellen, denen die verschiedenen empirisch gefundenen Terme entspringen. Auch die vorgenannten Autoren haben vom Zeemaneffekt Gebrauch gemacht, ohne jedoch Messungsergebnisse im einzelnen mitzuteilen.

Im folgenden werden die Zeemaneffektmessungen des Verfassers angegeben. Ihm standen magnetische Chromaufnahmen zur Verfügung, die im Tübinger Institut vor mehreren Jahren von H. Gieseler (zum Teil in Gemeinschaft mit E. Back) mit Rowlandschem 6 m-Gitter in einem Felde von etwa 38000 Gauß mittels Vakuumbogen als Lichtquelle hergestellt worden sind. Die magnetische Termanalyse bestätigt die Richtigkeit der Deutung, welche die oben genannten Autoren den von ihnen gefundenen Termgruppen gegeben haben, und ergibt darüber hinaus das Vorhandensein weiterer Termgruppen, deren Ursprung sich eindeutig feststellen läßt.

---

* W. F. Meggers, C. C. Kiess und F. M. Walters jr., Journ. Opt. Soc. Amer. **9**, 368, 1924.

** C. C. Kiess und O. Laporte, Science **63**, 234, 1926.

Zu * und **: In den Tabellen 2 und 3 sind diese Multipletts zusammengestellt, jedoch sind die j-Werte der neuen Terminologie entsprechend abgeändert (nach Hund, Linienspektren und periodisches System der Elemente, 1927); Wellenlängen und Intensitäten zumeist nach Exner und Haschek (Kayser und Konen, Handbuch der Spektroskopie, Bd. VII, 1924).

Die Elektronenkonfigurationen von Cr^{++} und Cr^{+} ergeben sich daraus, daß im Cr^{++}-Atom ($Z = 22$) auf eine abgeschlossene Schale von acht Elektronen ($3s^2 3p^6$: Konfiguration des Argons) vier weitere Elektronen folgen. Diese vier Valenzelektronen können im Grundzustand in folgender Weise angeordnet sein:

I. $3d^4$ sämtliche 4 Elektronen sind im $3d$-Zustand gebunden.

II. $3d^3 4s$ 3 Elektronen befinden sich im $3d$-Zustand, 1 Elektron im $4s$-Zustand.

III. $3d^2 4s^2$ 2 Elektronen sind im $3d$-Zustand, 2 Elektronen im $4s$-Zustand gebunden.

Tabelle 1.

Cr^{++} ($Z = 22$)			Cr^{+} ($Z = 23$)		
1	2	3	4	5	6
Elektronenkonfiguration	Tiefster Term theoretisch	Tiefster Term beobachtet im Spektrum von	Addition von	Elektronenkonfiguration	Tiefe Terme
I. $3d^4$	^5D	V^+ (tiefster Term)	$+ 4s$	$3d^4\ 4s$	^6D, ^4D
			$+ 4p$	$3d^4\ 4p$	^6F, ^4F, ^6D, ^4D, ^6P, ^4P
			$+ 3d$	$3d^5$	^6S, ^4G, ^4D
II. $3d^3 4s$	^5F	Ti, V^+ (höhere Terme)	$+ 4s$	$3d^3\ 4s^2$	^6F, ^4F
			$+ 4p$	$3d^3 4s 4p$	^4G, ^6G, ^4F, ^6F, ^4D, ^6D
			$+ 3d$	$3d^4\ 4s$	siehe oben
III. $3d^2 4s^2$	^3F	Ti (tiefster Term)	$+ 3d$	$3d^3\ 4s^2$	siehe oben
			$+ 4p$	$3d^2 4s^2 4p^1$	^4G, ^4F, ^4D, ^2G, ^2F, ^2D

Tabelle 1 gibt in Spalte 1 diese Elektronenkonfigurationen für Cr^{++} an. Spalte 2 enthält die Terme, die sich aus den Konfigurationen der Spalte 1 als tiefstliegende ergeben. Wie Spalte 3 zeigt, sind gerade diese Terme bei V^+ und Ti, welche beide dieselbe Elektronenzahl wie Cr^{++} besitzen, beobachtet, und zwar teils als tiefste, teils als höhere Terme*. Das Spektrum des Cr^{++} selbst ist noch nicht hinreichend bekannt, um eine Aussage über Art und Anordnung der Terme zu machen. Durch Hinzufügung eines fünften Elektrons entsteht die Elektronenkonfiguration von Cr^{+} ($Z = 23$). In Spalte 4 sind die Möglichkeiten aufgeführt, in welchen Zuständen sich das hinzugefügte Elektron befinden kann. Daraus ergeben sich die Terme, die man im Cr^{+}-Spektrum als tiefste zu erwarten hat (Spalte 6). Auch das Bogenspektrum von Vanadium** liefert

* F. Hund, Linienspektren, S. 158.

** l. c. S. 160.

einen Anhaltspunkt für die tiefsten Zustände des Cr^+-Spektrums, wenn man die von Hund angegebene Regel* berücksichtigt, daß bei gleicher Elektronenzahl das Funkenspektrum einen d-Zustand mehr und einen s-Zustand weniger als das Bogenspektrum hat: bei Vanadium ist der tiefste Term $3d^3\,4s^2\,{}^4F$, dann folgen als höhere Terme $3d^4\,4s\,{}^6D$ und $3d^4\,4s\,{}^4D$. Daraus folgen nach obiger Regel für Cr^+ die Konfigurationen $3d^4\,4s$ und $3d^5$; beide Konfigurationen kommen in Tabelle 1, I vor.

Mit dem hieraus abgeleiteten Termschema (Spalte 6) stimmt der Befund von Meggers, Kiess, Walters und Laporte weitgehend überein. Die Tabellen 2 und 3 enthalten sämtliche von ihnen angegebenen Liniengruppen, und zwar ist in Tabelle 2 das ${}^6S - {}^6P$-Grundtriplett** wiedergegeben, Tabelle 3 enthält sechs weitere Multipletts***. Die in den Tabellen durch Kursivdruck hervorgehobenen Zahlen sind Hinzufügungen des Verfassers, ebenso die Angabe der Elektronenkonfigurationen. Beides ist das Ergebnis der Zeemaneffektmessungen. Die Zahlen über den Linien bedeuten relative Intensitäten; die kleinen Zahlen zwischen den Termsymbolen sind Schwingungszahldifferenzen in cm^{-1}.

Tabelle 2.

$3d^4\,4p$	${}^6P_{3/2}$ 92,26	${}^6P_{5/2}$ 141,29	${}^6P_{7/2}$
	6	7	8
$3d^5\;{}^6S_{5/2}$	λ 2 065,43	2 061,50	2 055,51
	ν 48 400,53	48 492,79	48 634,08

Auf dem Plattenmaterial, das Verfasser zur Verfügung stand, ließen sich die Zeemaneffekte von 50 Linien des Cr^+-Spektrums auswerten. Sie sind in der Schlußtabelle 10 nach wachsenden Wellenlängen angeordnet. Die letzten vier Spalten der Tabelle 10 enthalten die aus dem Zeemantypus abgeleiteten Gesamtimpulsquantenzahlen j und die magnetischen Aufspaltungsfaktoren g der kombinierenden Terme. Im Kopf und Eingang der Tabelle 3 stehen die g-Werte nach Landés g-Formel, darunter die Mittelwerte der beobachteten g. Das den Termbezeichnungen (z. B. ${}^6F_{5/2}$) hinzugefügte Konfigurationssymbol (also $3d^4\,4p\,{}^6F_{5/2}$) ist, wie später begründet wird, aus den beobachteten Zeemaneffekten und Intervallverhältnissen erschlossen.

Die Multipletts der Tabellen 2 und 3 enthalten folgende Terme: ${}^6S$, ${}^4P$, ${}^6P$, ${}^6D$, ${}^6F$, ${}^4F$, ${}^4D$, ${}^4D$. Diese Terme kommen zwar in Tabelle 1, I

* l. c. S. 146.

** C. C. Kiess und O. Laporte, l. c.

*** W. F. Meggers, C. C. Kiess und F. M. Walters jr., l. c.

Tabelle 3.

	$3d^4\ 4s$		$^4D_{1/2}$	103,07	$^4D_{3/2}$	166,53	$^4D_{5/2}$	225,90	$^4D_{7/2}$
	g theoretisch		0		1,200		1,371		1,429
		g beobachtet	*0*		*1,196*		*1,363*		*1,425*
Multiplett 1.									
$3d^4\ 4p$	$^4P_{5/2}$	1,600	*1,615*		3		10		20
					3 324,08		3 342,64		3 368,05
	141,67			—	30 074,89		29 907,90		29 682,28
					—		*1,365; 1,615*		*1,420; 1,615*
	$^4P_{3/2}$	1,733	*1,806*	3	10		10		
				3 328,36	3 339,86		3 358,49		—
	71,69			30 036,22	29 932,80		29 766,76		
				0; 1,811	*1,195; 1,806*		*1,359; 1,801*		
	$^4P_{1/2}$	2,667	*3,145*	5	6				
				3 336,35	3 347,85		—		—
				29 964,28	29 861,36				
				0; 3,158	*1,195; 3,131*				
Multiplett 2.									
$3d^4\ 4p$	$^4D_{7/2}$	1,429	*1,446*				3		5
							2 857,39		2 875,95
	159,11			—	—		34 986,72		34 760,94
							—		*1,425; 1,446*
	$^4D_{5/2}$	1,371	*1,358*		3		5		3
					2 856,75		2 870,43		2 889,19
	126,51			—	34 994,56		34 827,79		34 601,65
					—		*1,363; 1,358*		
$3d^4\ 4p$	$^4D_{3/2}$	1,200	*1,195*	2	2		4		

				—	34 994,56	34 827,79	34 601,65
$3d^4\ 4p$	$^4D_{3/2}$	1,200	*1,195*	2	2	4	
				2 858,64	2 867,13	2 880,88	—
	81,71			34 971,42	34 867,87	34 701,46	
				0; 1,195	—	—	
	$^4D_{1/2}$	0	*0*	2	2		
				2 865,35	2 873,85	—	—
				34 889,53	34 786,34		
				0; 0	*(1,21); 0*		
				Multiplett 3.			
	$^4F_{9/2}$	1,333	—				20
				—	—	—	3 132,07
	153,14						31 918,55
							—
	$^4F_{7/2}$	1,238	*1,260*			20	5
				—	—	3 124,98	3 147,17
	119,54					31 990,96	31 765,41
						—	*1,429; 1,260*
$3d^4\ 4p$	$^4F_{5/2}$	1,029	*1,026*		15	5	1
				—	3 120,38	3 136,66	3 159,10
	85,01				32 038,12	31 871,84	31 645,45
					—	*1,362; 1,026*	—
	$^4F_{3/2}$	0,400	*0,401*	10	5	2	
				3 118,68	3 128,66	3 145,07	—
				32 055,58	31 953,33	31 786,62	
				0; 0,400	*1,197; 0,402*	*1,367; 0,401*	

Tabelle 3.

	$3d^4\ 4s$		$^4D_{1/2}$ 103,07	$^4D_{3/2}$ 166,53	$^4D_{5/2}$ 225,90	$^4D_{7/2}$
	g theoretisch		0	1,200	1,371	1,429
		g beobachtet	*0*	*1,196*	*1,363*	*1,425*
			Multiplett 1.			
$3d^4\ 4p$	$^4P_{5/2}$	1,600	*1,615*	3	10	20
				3 324,08	3 342,64	3 368,05
	141,6			—	30 074,89	29 907,90	29 682,28
					—	*1,363; 1,615*	*1,420; 1,615*
	$^4P_{3/2}$	1,733	*1,806*	3	10	10	
				3 328,36	3 339,86	3 358,49	—
	71,69			30 036,22	29 932,80	29 766,76	
				0; 1,811	*1,195; 1,806*	*1,359; 1,801*	
	$^4P_{1/2}$	2,667	*3,145*	5	6		
				3 336,35	3 347,85	—	—
				29 964,28	29 861,36		
				0; 3,158	*1,195; 3,131*		
			Multiplett 2.			
$3d^4\ 4p$	$^4D_{7/2}$	1,429	*1,446*		3	5
				—	—	2 857,39	2 875,95
	159,11					34 986,72	34 760,94
						—	*1,425; 1,446*
	$^4D_{5/2}$	1,371	*1,358*	3	5	3
				2 856,75	2 870,43	2 889,19
	126,51			—	34 994,56	34 827,79	34 601,65
					—	*1,363; 1,358*	—
	$^4D_{3/2}$	1,200	*1,195*	2	2	4	

	126,51			—	34 994,56	34 827,79	34 601,65
$3d^4\ 4p$					—	*1,363; 1,358*	—
	$^4D_{3/2}$	1,200	*1,195*	2	2	4	
				2 858,64	2 867,13	2 880,88	—
	81,71			34 971,42	34 867,87	34 701,46	
				0; 1,195	—	—	
	$^4D_{1/2}$	0	*0*	2	2		
				2 865,35	2 873,85	—	—
				34 889,53	34 786,34		
				0; 0	*(1,21); 0*		
				Multiplett 3.			
	$^4F_{9/2}$	1,333	—				20
				—	—	—	3 132,07
	153,14						31 918,55
							—
	$^4F_{7/2}$	1,238	*1,260*			20	5
				—	—	3 124,98	3 147,17
	119,54					31 990,96	31 765,41
						—	*1,429; 1,260*
$3d^4\ 4p$	$^4F_{5/2}$	1,029	*1,026*		15	5	1
				—	3 120,38	3 136,66	3 159,10
	85,01				32 038,12	31 871,84	31 645,45
					—	*1,362; 1,026*	—
	$^4F_{3/2}$	0,400	*0,401*	10	5	2	
				3 118,68	3 128,66	3 145,07	—
				32 055,58	31 953,33	31 786,62	
				0; 0,400	*1,197; 0,402*	*1,367; 0,401*	

Tabelle 3 (Fortsetzung).

		$3d^4\ 4s$		$^6D_{1/2}$ 70,73	$^6D_{3/2}$ 115,59	$^6D_{5/2}$ 156,19	$^6D_{7/2}$ 192,50	$^6D_{9/2}$
		g theoretisch		3,333	1,867	1,657	1,587	1,555
			g beobachtet	*3,323*	*1,860*	*1,655*	*1,578*	—
				Multiplett 4.				
$3d^4\ 4p$	$^6P_{7/2}$	1,714	*1,686*			3	10	15
						2 740,07	2 751,86	2 766,52
	141,17			—	—	36 484,64	36 328,34	36 135,84
						—	*1,578; 1,686*	—
	$^6P_{5/2}$	1,886	*1,866*		8	10	10	
					2 742,02	2 750,71	2 762,60	—
	91,38			—	36 458,70	36 343,53	36 187,12	
					1,860; 1,867	*1,655; 1,862*	*1,578; 1,869*	
	$^6P_{3/2}$	2,400	*2,382*	8	8	8		
				2 743,60	2 748,92	2 757,71	—	—
				36 437,70	36 367,19	36 251,28		
				3,328; 2,381	*1,866; 2,382*	*1,656; 2,383*		
				Multiplett 5.				
$3d^4\ 4p$	$^4P_{5/2}$	1,600	—		5	3	6	
					2 653,59	2 661,75	2 672,84	
	141,97			—	37 673,60	37 558,11	37 402,29	—
					—	—	—	
	$^4P_{3/2}$	1,733	—	4		8		
				2 658,60	...*	2 671,85		
	71,99			37 602,61	...	37 416,14	—	—
				—		—		
	$^4P_{1/2}$	2,667	*3,146*	3	6			
				2 663,70	2 668,73			
				37 530,61	37 459,89	—	—	—
				—	*1,867; 3,146*			
				Multiplett 6.				
	$^6F_{11/2}$	1,454	—					30

Multiplett 6.

								30
								2 835,60
				—	—	—	—	35 255,56
								—
							15	4
				—	—	—	2 843,24	2 858,91
							35 160,83	34 968,12
							1,578; 1,427	—
						10	10	2
				—	—	2 849,83	2 862,58	2 878,43
						35 080,03	34 923,29	34 731,00
						1,659; 1,392	—	—
					10	4	3	
				—	2 855,64	2 865,11	2 877,95	—
					35 008,16	34 892,45	34 736,79	
					1,856; 1,306	*1,652; 1,307*	*1,578; 1,307*	
				5	5	3		
				2 860,94	2 866,74	2 876,28	—	—
				34 943,31	34 872,61	34 756,95		
				3,315; 1,053	*1,857; 1,060*	*1,652; 1,056*		
				5	3			
				2 867,64	2 873,49	—	—	—
				34 861,67	34 790,70			
				3,325; −0,661	*1,858; −0,680*			

	${}^6F_{11/2}$	1,454	—	
	287,44			
	${}^6F_{9/2}$	1,434	*1,427*	
	237,33			
	${}^6F_{7/2}$	1,397	*1,392*	
	187,04			
$3d^4\ 4p$	${}^6F_{5/2}$	1,314	*1,307*	
	135,53			
	${}^6F_{3/2}$	1,067	*1,056*	
	81,77			
	${}^6F_{1/2}$	−0,667	*−0,671*	

* Nicht beobachtet.

Tabelle 4.

		$3d^4\ 4p$	$^6D_{1/2}$	*256,36*	$^6D_{3/2}$	*346,02*	$^6D_{5/2}$	*422,69*	$^6D_{7/2}$	*523,89*	$^6D_{9/2}$
		g theor.	3,333		1,867		1,657		1,587		1,555
		g beob.	2,841		1,791		1,643		1,441		1,55
					Multiplett 7.						
$3d^4\ 4s$	$^6D_{7/2}$	1,429	1,426				20		20		2
							3 408,76		3 360,36		3 302,16
				—	—		29 327,80	*422,40*	29 750,20	*524,32*	30 274,20
	226,43						1,650; 1,427		1,441; 1,424		(1,60; 1,42)
							226,10		*226,75*		
	$^6D_{5/2}$	1,371	1,364		20		10		1		
					3 422,75		3 382,68		3 334,93		
				—	29 207,84	*346,06*	29 553,90	*423,15*	29 977,05		—
	166,54				1,785; 1,362		1,636; 1,366		—		
					166,58		*166,49*				
	$^6D_{3/2}$	1,200	1,197	5	15		2				
				3 433,31	3 403,35		3 363,73		—		—
				28 118,10	*256,32* 29 374,42	*345,97*	29 720,39				
	103,09			2,842; 1,199	1,796; 1,194		—				
				103,15	*102,89*						
	$^6D_{1/2}$	0	0	10	5						
				3 421,19	3 391,47		—		—		—
				29 221,25	*256,06* 29 477,31						
				2,840; 0	1,793; 0						

Tabelle 4 (Fortsetzung).

		$3d^4\,4p$		$^6D_{1/2}$	*256,36*	$^6D_{3/2}$	*346,02*	$^6D_{5/2}$	*422,69*	$^6D_{7/2}$	*523,89*	$^6D_{9/2}$
		g theor.		3,333		1,867		1,657		1,587		1,555
			g beob.	2,841		1,791		1,643		1,441		1,55
						Multiplett 8.						
$3d^4\,4s$	$^6D_{9/2}$	1,555	—	—		—		—		...*		...*
										...		...
	$^6D_{7/2}$	1,587	1,58					4		2		1
								2 698,42		2 667,97		2 631,23
	156,54			—		—		37 047,75	*422,53*	34 470,28	*523,45*	37 993,73
								—		—		1,55; 1,58
								156,54				
	$^6D_{5/2}$	1,657	—			6		8				
						2 712,31		2 687,08		...*		
	115,28			—		36 858,04	*346,05*	37 204,09		...		—
						—		—				
						115,31		*115,25*				
	$^6D_{3/2}$	1,867	1,861	5		2		10				
				2 722,73		2 703,85		2 678,78				
	70,96			36 716,98	*256,37*	36 973,35	*346,01*	37 319,36		—		—
				2,841; 1,861		—		—				
				70,80		*71,11*						
	$^6D_{1/2}$	3,333	—	4		4						
				2 717,49		2 698,66						
				36 787,78	*256,68*	37 044,46		—		—		—
				—		—						

* Nicht beobachtet.

vor, aber überdies noch weitere. Verfasser hat nun mit Hilfe der Zeemaneffekte zwei neue Multipletts aufgefunden (Tabelle 4), in denen ein weiterer bisher unbekannter ^6D-Term vorkommt, und zwar kombiniert er in Multiplett 7 mit einem der schon bekannten Terme ^4D, im Multiplett 8 mit dem bereits bekannten Term ^6D.

Die beobachteten g-Werte in Tabelle 3 und 4 schließen sich den theoretischen gut an, mit Ausnahme der g des ^4P-Terms und des vom Verfasser gefundenen ^6D-Terms: die g dieser beiden Terme zeigen äußerst starke Abweichungen von den Werten der g-Formel. Ebenso sind die Intervallverhältnisse dieser beiden Terme stark anomal, nämlich 2 : 1 für ^4P statt 5 : 3 und 6 : 5 : 4 : 3 für ^6D statt 9 : 7 : 5 : 3*.

Die Zuordnung der Terme zu den oben angegebenen Elektronenkonfigurationen wird durch die Auffindung der neuen Terme ^6D und ^4D (vgl. S. 543, Term $^4D^C$) ermöglicht; denn durch diese Terme ist das System der Tabelle 1, I (mit Ausnahme des Terms ^4G) vollständig. In den Multipletts 1 bis 8 der Tabellen 3 und 4 kommen nunmehr je zwei verschiedene Terme ^4D und ^6D vor**, wie dies nach Tabelle 1, I auch sein muß. Tabelle 5 zeigt diesen Sachverhalt nochmals gesondert: je ein Term ^4D und ^6D entspringt dem Zustande $3d^4\,4s$ und dem Zustande $3d^4\,4p$. Die Zuordnung der beobachteten Terme $^6D^A$, $^6D^B$, $^4D^A$, $^4D^B$ zur oberen bzw. unteren Zeile der Tabelle 5 (Konfiguration $3d^4\,4s$ bzw. $3d^4\,4p$) bleibt zunächst noch offen.

Tabelle 5.

Zustand	Terme
1. $3d^4\,4s$	^6D ^4D
2. $3d^4\,4p$	^6F ^4F ^6D ^4D ^6P ^4P

Ein Merkmal für die Zuordnung liegt aber offenbar in der verschiedenen Stabilität des $3d^4\,4s$-Zustandes gegenüber dem $3d^4\,4p$-Zustand, welche in der Lage der Terme und ihren Aufspaltungsgrößen zum Ausdruck kommen muß. Ein weiteres Hilfsmittel für die Zuordnung der

* Die Intervallverhältnisse sind in Tabelle 7 zusammengestellt.

** Zur Unterscheidung der zwei doppelt auftretenden Terme bezeichnen wir im folgenden die Terme

^4D mit $\Delta\nu = 103, 166 \ldots$ als $^4D^A$,
^4D mit $\Delta\nu = 81, 126 \ldots$ als $^4D^B$,
^6D mit $\Delta\nu = 70, 115 \ldots$ als $^6D^A$,
^6D mit $\Delta\nu = 256, 346 \ldots$ als $^6D^B$.

beobachteten Terme zu den Elektronenkonfigurationen wird durch die Landésche g-Summenregel und die Intervallregel geliefert.

Wie Goudsmit und Uhlenbeck* gezeigt haben, können sich beim Zusammenwirken mehrerer Elektronen deren Quantenvektoren s_i (Impulsmoment der Eigenrotation) und l_i (Impulsmoment der Bahnbewegung) in verschiedenartiger Weise zu einem resultierenden Moment zusammensetzen.

Der Regelfall ist, daß sich alle Momente s_i zu einem resultierenden Moment s, alle Momente l_i zu einem resultierenden Moment l vektoriell zusammensetzen; die s und l ergeben dann das Gesamtmoment j; symbolisch geschrieben:

$$(s_1 s_2 s_3 \dots s_i)(l_1 l_2 l_3 \dots l_i) = (s\,l) = j.$$

Dieses Kopplungsschema, als das von Russell und Saunders bezeichnet, liegt den Spektren von normaler Termordnung zugrunde. Die resultierenden Multipletterme erfüllen die Landésche Intervallregel, die magnetischen Termaufspaltungsfaktoren g folgen der Landéschen g-Formel.

Die Kopplung der Quantenvektoren kann aber auch in anderer Weise erfolgen; z. B. so, daß sich die Quantenvektoren $(s_i\,l_i)$ jedes Elektrons zu einem resultierenden j_i zusammensetzen und die j_i gemeinsam einen Gesamtimpuls j bilden; symbolisch geschrieben:

$$\{(s_1 l_1)\,(s_2 l_2) \dots (s_i l_i)\} = (j_1 j_2 \dots j_i) = j.$$

Aus dieser Kopplung resultiert eine nichtnormale Termordnung, die Termintervalle folgen nicht der Landéschen Intervallregel, die g-Werte nicht der Landéschen g-Formel; aber es gilt die „g-Summenregel“ **, welche besagt, daß die g-Summe aller Terme mit gleichem j eines Termsystems dieselbe ist wie bei den Spektren mit normaler Termordnung.

Von dieser Regel machen wir für die Zuordnung der zwei verschiedenen ^6D-Terme zu den Elektronenkonfigurationen der Tabelle 5 in folgender Weise Gebrauch: in Tabelle 5 bildet die Zeile der Terme $3d^4\,4p$ für sich ein vollständiges Termsystem. Die Summe der g beobachtet über gleiche j aller Terme aus dieser Konfiguration muß also gleich der Summe der g nach Landés Formel für dieselben j der Terme in Zeile 2 sein. Da die g-Werte von $^6D^{\mathrm{A}}$ und $^6D^{\mathrm{B}}$ stark verschieden sind, kann nur einer dieser beiden Terme mit den übrigen von Zeile 2 der Tabelle 5 die theoretische Summe der g ergeben. Daß die ^4D-Terme in Tabelle 5 zunächst

* S. Goudsmit und G. E. Uhlenbeck, ZS. f. Phys. **35**, 618, 1926

** A. Landé, Zeemaneffekt bei Multipletts höherer Stufe, Ann. d. Phys. **76**, 273, 1925; auch Back-Landé, Zeemaneffekt und Multiplettstruktur der Spektrallinien, S. 38, 1924.

noch vertauschbar sind, ist ohne Einfluß auf die g-Summe, denn beide ^4D-Terme zeigen nahezu gleiche und normale g-Werte. Die größte Abweichung der g-Werte von ^6D gegenüber der g-Formel tritt bei $^6D_{1/2}$ auf; in Tabelle 6 ist die g-Summe für $j = {}^1/_2$ gebildet, dabei ist in Spalte a angenommen, der Term $^6D^B$ gehöre zur Konfiguration $3d^4\,4p$; in Spalte b ist $^6D^A$ zur Konfiguration $3d^4\,4p$ gerechnet. Die g-Summe in Spalte a stimmt mit der theoretischen g-Summe auf ${}^1/_3$ % überein, in b ist die Abweichung etwa 8 %, was die Meßfehler etwa um das 10fache übersteigt. Mithin gehört $^6D^B$ sicher zur Konfiguration $3d^4\,4p$, $^6D^A$ zur Konfiguration $3d^4\,4s$.

Tabelle 6.

$j = {}^1/_2$	a		b
g	beob.	theor.	beob.
^4P	3,145	2,667	3,145
^4D	0	0	0
^4F	—	—	—
^6P	—	—	—
^6D	2,841	3,333	3,323
^6F	— 0,671	— 0,667	— 0,671
Summe g	5,315	5,333	5,797

Die g-Summenregel versagt jedoch für die Zuordnung der Terme $^4D^A$ und $^4D^B$, weil deren g-Werte annähernd gleich und normal gefunden sind. Mit dem Auftreten nichtnormaler g-Werte ist stets eine Störung der Intervallverhältnisse verknüpft, und zwar sind die Abweichungen von den normalen Intervallverhältnissen prozentual viel größer als die Abweichungen der g. Dies ermöglicht, die Terme $^4D^A$ und $^4D^B$ durch Vergleich der Intervallverhältnisse den beiden Elektronenkonfigurationen der Tabelle 5 zuzuordnen.

In Tabelle 7 sind die Intervallverhältnisse sämtlicher Terme zusammengestellt. Die Terme unter I folgen der Intervallregel gut, denn es ergibt sich für jeden Term ein merklich konstanter Intervallfaktor (z. B. für den ^4F-Term der Intervallfaktor 34,0 bis 34,2). Für die Terme unter II gilt aber die Intervallregel offensichtlich nicht mehr, die Intervallfaktoren dieser Terme sind nicht konstant (z. B. wächst der Intervallfaktor für $^6D^B$ von 176 bis 171). Also ist ihr Intervallverhältnis nicht das reguläre, aber, wie Spalte 3 der Tabelle 7 zeigt, doch ein einfaches Zahlenverhältnis; nämlich 6 : 5 : 4 : 3 statt 9 : 7 : 5 : 3. An Stelle der Reihe der ungeraden Zahlen tritt für die Terme unter II die Reihe der ganzen Zahlen.

Tabelle 7.

1		2	3
	Term	Intervallfaktoren nach Landés Intervallregel	Empirisch bestimmte Intervallfaktoren
I.	$^4D^A$	225.90 : $^7/_2$ = 64,5	—
		166,53 : $^5/_2$ = 66,6	—
		103,07 : $^3/_2$ = 68,7	—
	^4F	153,14 : $^9/_2$ = 34,0	—
		119,54 : $^7/_2$ = 34,2	—
		85,01 : $^5/_2$ = 34,0	—
	$^6D^A$	192,50 : $^9/_2$ = 42,6	—
		156,19 : $^7/_2$ = 44,6	—
		115,59 : $^5/_2$ = 46,2	—
		70,73 : $^3/_2$ = 47,1	—
	^6F	287,44 : $^{11}/_2$ = 52,3	—
		237,33 : $^9/_2$ = 52,6	—
		187,04 : $^7/_2$ = 53,5	—
		135,53 : $^5/_2$ = 54,1	—
		81,77 : $^3/_2$ = 54,5	—
II.	^4P	141,62 : $^5/_2$ = 56,7	141,62 : 2 = 70,8
		71,69 : $^3/_2$ = 47,8	71,69 : 1 = 71,7
	$^4D^B$	159,11 : $^7/_2$ = 45,5	159,11 : 4 = 39,8
		126,51 : $^5/_2$ = 50,6	126,51 : 3 = 42,2
		81,71 : $^3/_2$ = 54,5	81,71 : 2 = 40,8
	^6P	141,17 : $^7/_2$ = 40,3	141,17 : 3 = 47,1
		91,38 : $^5/_2$ = 36,6	91,38 : 2 = 45,7
	$^6D^B$	523,89 : $^9/_2$ = 116,4	523,89 : 6 = 87,3
		422,69 : $^7/_2$ = 120,8	422,69 : 5 = 84,5
		346,02 : $^5/_2$ = 138,4	346,02 : 4 = 86,6
		256,36 : $^3/_2$ = 170,9	256,36 : 3 = 85,5

Man erkennt durch Vergleich der Tabellen 7 und 5, daß es gerade die Konfiguration $3d^4\,4p$ ist, deren Intervallverhältnisse anomal sind. Dies führt dazu, den $^4D^B$-Term dieser Konfiguration, den $^4D^A$-Term der Konfiguration $3d^4\,4s$ zuzuordnen.

Mit Hilfe der g-Werte konnte Verfasser noch ein weiteres Multiplett auffinden (Multiplett 9, Tabelle 8). In diesem Multiplett kombiniert ein bisher unbekannter ^4D-Term ($^4D^C$) mit dem $^4D^B$-Term ($3d^4\,4p\;^4D$)*. Die g-Werte von $^4D^C$ sind normal, aber die Intervallverhältnisse gänzlich anomal. Besonders auffällig ist, daß im Gegensatz zu allen bisher behandelten Termen die Intervalle des $^4D^C$-Terms mit steigendem j kleiner werden. Es verhalten sich nämlich die Termdifferenzen ($^4D^C_{5/2} - {}^4D^C_{3/2}$)

* Die Kombinationen von $^4D^C_{7/2}$ mit $^4D^B$ sind nicht beobachtet, daher kann der Termwert von $^4D^C_{7/2}$ vorläufig nicht angegeben werden.

Tabelle 8.

	$3d^5$		$^4D_{1/2}$	7,97	$^4D_{3/2}$	4,24	$^4D_{5/2}$	$^4D_{7/2}$
	g theor.		0		1,200		1,371	1,429
		g beob.	0		1,198		1,368	—

Multiplett 9.

$3d^4\,4p$	$^4D_{7/2}$	1,429	—				4 3 361,82 29 737,28 — *158,90*	...* ...
	159,11			—	—			
	$^4D_{5/2}$	1,371	—		3 3 379,40 29 582,59 — *126,21*	*4,21*	5 3 379,88 29 578,38 — *126,36*	...* ...
	126,51			—				
	$^4D_{3/2}$	1,200	1,195	5 3 393.06 29 463,49 0; (1.167) *81,39*	*7,11*	4 3 393,88 29 456,38 1,198; 1,195 *81,70*	*4,26*	4 3 394,37 29 452.12 1,368; 1,195	—
	81,71							
	$^4D_{1/2}$	0	0	4 3 402,46 29 382,10 0; 0	*7,42*	2 3 403,32 29 374,68 —		—	—

$:(^4D^C_{3/2} - {}^4D^C_{1/2}) = 3:5$ statt $5:3$ nach der Intervallregel. Der Term ist regelrecht und liegt verhältnismäßig tief (Tabelle 9). Mit den übrigen Termen verglichen, sind die Termintervalle von $^4D^C$ 10- bis 100 mal kleiner. Die Elektronenkonfiguration $3d^5$ liefert neben dem ^6S-Term noch einen tiefliegenden ^4G- und ^4D-Term; S. Goudsmit** hat gezeigt, daß die natürliche Aufspaltnng dieser Terme in erster Näherung Null ist. Die natürliche Termaufspaltung soll dabei anomal sein, die magnetische aber der g-Formel folgen. Genau dies zeigt Tabelle 8 für $^4D^C$. Danach ist es sicher, daß $^4D^C$ der Konfiguration $3d^5$ entspringt.

Die im obigen gegebene Vervollständigung der Termsysteme von Cr^+ und die Termzuordnung zum Elektronenschema ergibt somit folgende Deutung der Linienmultipletts: Das Grundtriplett der Tabelle 2 und das Multiplett 9 sind Interkombinationen zwischen den Elektronenkonfigurationen $3d^4\,4p$ und $3d^5$, die Linien entsprechen einem Übergang des letztgebundenen Elektrons aus einem $4p$- in einen $3d$-Zustand. Die vom Verfasser gefundenen Multipletts 7 und 8 sind Interkombinationen der

* Nicht beobachtet.

** S. Goudsmit, Phys. Rev. **31**, 948, 1928 (Tabelle 1).

Elektronenkonfigurationen $3d^4\,4p$ und $3d^4\,4s$, die Linien entstehen durch einen Übergang des letztgebundenen Elektrons aus einem $4p$- in einen $4s$-Zustand. Die Multipletts 1 bis 6 sind ebenfalls Interkombinationen zwischen den Zuständen $3d^4\,4s$ und $3d^4\,4p$.

Tabelle 9.

Term	j	Termwert	Termaufspaltungsfaktor g		Kombinationen mit dem Term
			theor.	beob.	
$3d^5\ {}^6S$	$^5/_2$	0,00	—	—	$3d^4\,4p\ {}^6P$
$3d^4\,4s\ {}^6D$	$^1/_2$	11 963,20	3,333	3,323	$3d^4\,4p\ {}^6F$, $3d^4\,4p\ {}^6P$, $3d^4\,4p\ {}^6D$
	$^3/_2$	12 033,93	1,867	1,860	
	$^5/_2$	12 149,52	1,657	1,655	
	$^7/_2$	12 305,71	1,587	1,578	
	$^9/_2$	12 498,21	1,555	—	
$3d^4\,4s\ {}^4D$	$^1/_2$	19 529,71	0	0	$3d^4\,4p\ {}^6D$, $3d^4\,4p\ {}^4P$, $3d^4\,4p\ {}^4F$, $3d^4\,4p\ {}^4D$
	$^3/_2$	19 632,78	1,200	1,196	
	$^5/_2$	19 799,31	1,371	1,363	
	$^7/_2$	20 025,21	1,429	1,425	
$3d^5\ {}^4D$	$^1/_2$	25 036,82	0	0	$3d^4\,4p\ {}^4D$
	$^3/_2$	25 044,24	1,200	1.198	
	$^5/_2$	25 048,59	1,371	1,368	
	$^7/_2$	?	1,429	—	
$3d^4\,4p\ {}^6F$	$^1/_2$	46 824,94	− 0,667	− 0,671	$3d^4\,4s\ {}^6D$
	$^3/_2$	46 906,71	1,067	1,056	
	$^5/_2$	47 042,24	1,314	1,307	
	$^7/_2$	47 229,28	1,397	1,392	
	$^9/_2$	47 466,61	1,434	1,427	
	$^{11}/_2$	47 754,05	1,454	—	
$3d^4\,4p\ {}^6P$	$^3/_2$	48 400,53	2,400	2,382	$3d^5\ {}^6S$, $3d^4\,4s\ {}^6D$
	$^5/_2$	48 492,79	1,886	1,866	
	$^7/_2$	48 634,08	1,714	1,686	
$3d^4\,4p\ {}^6D$	$^1/_2$	48 781,82	3,333	2,841	$3d^4\,4s\ {}^6D$, $3d^4\,4s\ {}^4D$
	$^3/_2$	49 007,18	1,867	1,791	
	$^5/_2$	49 353,20	1,657	1,643	
	$^7/_2$	49 775,89	1,587	1,441	
	$^9/_2$	50 299,78	1,555	1,55	
$3d^4\,4p\ {}^4P$	$^1/_2$	49 493,86	2,667	3,145	$3d^4\,4s\ {}^4D$
	$^3/_2$	49 565,85	1.733	1,806	
	$^5/_2$	49 707,82	1,600	1,615	
$3d^4\,4p\ {}^4F$	$^3/_2$	51 586,02	0,400	0,401	$3d^4\,4s\ {}^4D$
	$^5/_2$	51 671,03	1.029	1,026	
	$^7/_2$	51 790,57	1.238	1,260	
	$^9/_2$	51 943,71	1,333	—	
$3d^4\,4p\ {}^4D$	$^1/_2$	54 418,76	0	0	$3d^4\,4s\ {}^4D$, $3d^5\ {}^4D$
	$^3/_2$	54 500,47	1,200	1,195	
	$^5/_2$	54 626,98	1,371	1,358	
	$^7/_2$	54 786,09	1,429	1,446	

Tabelle 10. Zeemaneffekte von Cr^+-Linien †.

Intensität	λ	ν	Zeemantypus in Lorentzeinheiten	j_x	j_y	g_x	g_y
1	2631,23	37 993,73	± (0) **1,44** *T*	$^9/_2$*	$^7/_2$*	1,55*	1,58
6	2668,73	37 459,89	± (0,640) **1,225** 2,506	$^3/_2$	$^1/_2$	1,865	3,146
5	2722,73	36 716,98	± (0,490) **1,372** 2,352	$^3/_2$	$^1/_2$	1,861	2,841
8	2742,02	36 458,70	± (0) **1,877** *T*	$^5/_2$*	$^3/_2$*	1,867*	1,860
8	2743,60	36 437,70	± (0,473) **1,908** 2,855	$^3/_2$	$^1/_2$	2,381	3,328
8	2748,92	36 367,19	± (0,258) (**0,774**) 1,608 **2,124** 2,640	$^3/_2$	$^3/_2$	2,382	1,866
10	2750,71	36 343,53	± (**0,518**) *Q*	$^5/_2$*	$^5/_2$*	1,655	1,862*
10	2751,86	36 328,34	± (**0,377**) *Q*	$^7/_2$*	$^7/_2$*	1,578	1,686*
8	2757,71	36 251,28	± (**0,364**) **0,565** (1,091) 1,292 2,020 2,747	$^5/_2$	$^3/_2$	1,656	2,383
10	2762,60	36 187,12	± (**0,146**) (0,437) (0,728) **0,850** 1,141 1,432 1,724 2,015 2,306	$^7/_2$	$^5/_2$	1,578	1,869
15	2843,24	35 160,83	± (0) **0,897** *T*	$^9/_2$*	$^7/_2$*	1,427*	1,578
10	2849,83	35 080,53	± (**0,134**) (0,401) (0,668) **0,724** 0,991 1,258 1,526 1,793 2,060	$^7/_2$	$^5/_2$	1,392	1,659
10	2855,64	35 008,16	± (**0,275**) **0,481** (0,825) 1,031 1,581 2,171	$^5/_2$	$^3/_2$	1,306	1,856
2	2858,61	34 971,42	± (0,598) 0,598 **1,793**	$^3/_2$	$^1/_2$	1,195	0
5	2860,94	34 943,31	± **0,077** (1,131) 2,185	$^3/_2$	$^1/_2$	1,053	3,315
4	2865,11	34 892,45	± (0,172) (0,516) 0,792 (**0,860**) 1,136 **1,480** 1,824 2,168	$^5/_2$	$^5/_2$	1,652	1,307
2	2865,35	34 889,53	± (0) 0	$^1/_2$	$^1/_2$	0	0
5	2866,74	34 872,61	± (0,399) 0.661 (**1,196**) **1,459** 2,256	$^3/_2$	$^3/_2$	1,857	1,060
2	2867,64	34 861,67	± 1,332 (1,994)	$^1/_2$	$^1/_2$	-0,661	3,325
5	2870,43	34 827,79	± (0) **1,361** *T*	$^5/_2$*	$^5/_2$*	1,363	1,358*
3	2873,49	34 790,70	± 0,589 (1,269) **3,127**	$^3/_2$	$^1/_2$	1,858	-0,680
2	2873,85	34 786,34	± (0,607)	$^3/_2$	$^1/_2$	(1,21)	0
5	2875,95	34 760,94	± (0) **1,436** *T*	$^7/_2$*	$^7/_2$*	1,425	1,446*
3	2876,28	34 756,95	± (**0,298**) 0,758 (0,894) 1,354 1,950 **2,546**	$^5/_2$	$^3/_2$	1,652	1,056
3	2877,95	34 736,79	± (**0,135**) (0,406) (0,677) 0,901 1,172 1,445 1,713 1,984 **2,255**	$^7/_2$	$^5/_2$	1,578	1,307

† Einige Linien zeigen unvollkommene Auflösung der Komponentengruppen (Pseudotripletts bzw. Pseudoquartetts, mit *T* bzw. *Q* bezeichnet). Auch solche Typen ergeben durch Messung der Intensitätsmaxima mittels Heranziehung anderer Kombinationen die *g* mit hinreichender Genauigkeit. Die so ermittelten Werte sind durch * gekennzeichnet. Die *j* folgen aus den Kombinationen.

Tabelle 10 (Fortsetzung).

Intensität	λ	ν	Zeemantypus in Lorentzeinheiten	j_x	j_y	g_x	g_y
10	3118,68	32 055,58	± (0,200) 0,200 **0,600**	$^3/_2$	$^1/_2$	0,400	0
5	2128,66	31 953,33	± (0,398) **0,800** (**1,193**) 1,595	$^3/_2$	$^3/_2$	0,402	1,197
5	3136,66	31 871,84	± (0,168) (0,504) 0,522 (**0,840**) 0,858 **1,194** 1,530 1,866	$^5/_2$	$^5/_2$	1,362	1,026
2	3145,07	31 786,62	± 0,082 (**0,483**) 0,885 (1,449) 1,850 **2,816**	$^5/_2$	$^3/_2$	1,367	0,401
5	3147,17	31 765,41	± (0,085) (0,254) (0,423) (**0,592**) 0,837 1,006 1,175 **1,345** 1,514 1,683 1,852	$^7/_2$	$^7/_2$	1,429	1,260
2	3302,16	30 274,20	± (0) **2,193** *T*	$^9/_2$*	$^7/_2$*	(1,60)*	1,42
3	3328,36	30 036,22	± (0,906) 0,906 **2,718**	$^3/_2$	$^1/_2$	1,811	0
5	3336,35	29 964,28	± 1,579 (1,579)	$^1/_2$	$^1/_2$	0	3,158
10	3339,86	29 932,80	± (0,305) 0,890 (**0,916**) **1,501** 2,111	$^3/_2$	$^3/_2$	1,195	1,806
10	3342,64	29 907,90	± (0,125) (0,375) (**0,625**) 0,990 1,240 **1,491** 1,740 1,990	$^5/_2$	$^5/_2$	1,365	1,615
6	3347,85	29 861,36	± **0,227** (0,968) 2,164	$^3/_2$	$^1/_2$	1,195	3,131
10	3358,49	29 766,76	± (**0,221**) (0,663) **0,696** 1,138 1,581 2,022	$^5/_2$	$^3/_2$	1,359	1,801
20	3360,36	29 750,20	± (0) **1,433** *T*	$^7/_2$*	$^7/_2$*	1,441*	1,424
20	3368,05	29 682,28	± (**0,098**) (0,293) (0,488) **0,932** 1,127 1,322 1,518 1,713 1,908	$^7/_2$	$^5/_2$	1,420	1,615
10	3382,68	29 553,90	± (0,135) (0,405) (**0,675**) 0,961 1,231 **1,501** 1,771 2,041	$^5/_2$	$^5/_2$	1,636	1,366
5	3391,47	29 477 31	± (0,897) 0,897 **2,690**	$^3/_2$	$^1/_2$	1,793	0
5	3393,06	29 463,49	± (0,584) 0,584 **1,752**	$^3/_2$	$^1/_2$	(1,167)	0
4	3393,88	29 456,38	± (0) **1,197** *T*	$^3/_2$*	$^3/_2$*	1,198*	1,195
4	3394,37	29 452,12	± (0) **1,628** *T*	$^5/_2$*	$^3/_2$*	1,368*	1,195
4	3402,46	29 382,10	± 0 (0)	$^1/_2$	$^1/_2$	0	0
15	3403,35	29 374,42	± (0,301) 0,893 (**0,903**) **1,495** 2,097	$^3/_2$	$^3/_2$	1,796	1,194
20	3408,76	29 327,80	± (**0,111**) (0,334) (0,557) **0,870** 1,093 1,316 1,539 1,761 1,984	$^7/_2$	$^5/_2$	1,427	1,650
10	3421,19	29 221,25	± (1,420) 1,420	$^1/_2$	$^1/_2$	2,840	0
20	3422,75	29 207,84	± (**0,212**) (0,635) **0,727** 1,150 1,574 1,997	$^5/_2$	$^3/_2$	1,362	1,785
5	3433,31	29 118,10	± **0,378** (0,821) 2,021	$^3/_2$	$^1/_2$	1,199	2,842

Tabelle 9 enthält eine Zusammenstellung der tiefen Terme von Cr^+ nach ihrer Lage geordnet, wobei dem tiefsten Term ^6S willkürlich der Termwert Null erteilt ist und den höheren Termen wachsende positive Zahlenwerte zugeordnet sind. Sämtliche angeführten Terme sind regelrecht.

In den Chromaufnahmen fanden sich die Zeemaneffekte einiger Linien, die dem dreifach ionisierten Chrom (Cr^{+++}) zugehören. Sie lassen sich als (PS)-Dublett deuten:

$$\lambda = 3369{,}06 \quad (^2S_{1/2} - {}^2P_{3/2})$$

mit den g-Werten 1,971 und 1,339 statt nach Landés Formel 2,000 und 1,333;

$$\lambda = 3391{,}76 \quad (^2S_{1/2} - {}^2P_{1/2})$$

mit den g-Werten 1,927 und 0,670 statt nach Landés Formel 2,000 und 0,667 und mit der Termdifferenz $\Delta\nu_P = 696{,}78$.

Diese drei Terme ($^2S_{1/2}$, $^2P_{1/2}$, $^2P_{3/2}$) rühren — in offenbarer Analogie mit Ti^+ — von der Elektronenkonfiguration $3d^2 4s$ her*, die g-Werte folgen der g-Formel.

Eine weitere Linie ($\lambda = 3172{,}08$ mit den g-Werten $g_1 = 1{,}333$, $g_2 = 0{,}799$ und den j-Werten $j_1 = {}^3/_2$, $j_2 = {}^1/_2$) stellt eine Kombination $^2P_{3/2} - X_{1/2}$ dar, worin der X-Term ein nichtnormaler ^2P-Term ist, der von einer der anderen Elektronenkonfigurationen herrührt. Weitere Linien des Cr^{+++} konnten bisher noch nicht sichergestellt werden.

Herrn Prof. Dr. E. Back danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit und seine stete wertvolle Unterstützung. Herrn Prof. Dr. W. Gerlach möchte ich für die Überlassung der Hilfsmittel seines Instituts meinen besten Dank aussprechen. Herrn Dr. S. Goudsmit verdanke ich wichtige theoretische Anregungen.

Tübingen, Physikalisches Institut, im Oktober 1928.

---

* F. Hund, l. c. S. 156.

Bemerkungen zur Wirkungsweise des elektrooptischen Momentverschlusses von I. W. Beams und Deutung einiger damit ausgeführter Versuche.

Von **L. v. Hámos** in Charlottenburg.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 25. Oktober 1928.)

Der von I. W. Beams angegebene* elektrooptische Momentverschluß wird in seiner Wirkungsweise untersucht. Es zeigt sich, daß die Öffnung nicht mit der erwarteten gleichmäßigen Intensität erfolgt und damit auch die Öffnungszeiten nicht ohne weiteres definierbar sind. — Ein Effekt, den I. W. Beams, F. Allison und E. O. Lawrence der ungleichen Verzögerung des Kerreffektes in verschiedenen Flüssigkeiten zuschrieben, kann — zumindest teilweise — als Folge der verschiedenen Dielektrizitätskonstanten dieser Flüssigkeiten angesehen werden. — E. O. Lawrence und I. W. Beams haben auch den Photoeffekt der mit dem Verschluß erzeugten Lichtblitze gemessen***. Er ergab sich als linear abhängig von der angenommenen Zeitdauer dieser Lichtblitze. Unsere Untersuchung zeigt aber, daß die Zeitdauer der Lichtblitze nicht wesentlich geändert wurde, sondern der Gang des Photoeffektes der Intensitätsänderung derselben zuzuschreiben ist. Es können auf Grund dieser Messungen keine Grenzen für die Mindestlänge von photoelektrisch wirksamen Wellenzügen angegeben werden.**

I. Der Momentverschluß von Beams. Von einer kontinuierlichen Lichtquelle S (Fig. 1) gelangt das Licht in den elektrooptischen Verschluß, bestehend aus Nicol N_1, Kerrzellen K_1 und K_2 und Nicol N_2.

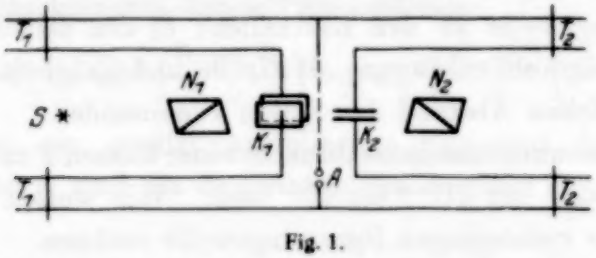


Fig. 1.

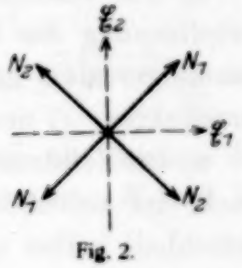


Fig. 2.

Die Kerrzellen liegen parallel zu der Funkenstrecke A, die mit Wechselstrom von 10 000 Volt und 60 Perioden betrieben wird. Der elektrische Abstand der Zellen K_1 und K_2 von A kann mittels der Bügel T_1 und T_2 verändert werden. Die Kerrzelle hat ein Plattenpaar von 12 cm Länge, 1 cm Höhe und 0,45 cm Abstand. Die doppelbrechende Flüssigkeit ist S_2C mit der Dielektrizitätskonstante 2,61.

Das Richtungsdiagramm ist senkrecht zum Lichtstrahl zu denken (Fig. 2). N_1 und N_2 sind die Polarisationsebenen der Nicols; $\mathfrak{E}_1$ bzw. $\mathfrak{E}_2$ die Richtung der elektrischen Feldstärke in K_1 bzw. K_2.

* Journ. Opt. Soc. Amer. **13**, 957, 1926.
** Proc. Nat. Acad. Amer. **13**, 505, 1927; Phil. Mag. **18**, 1199, 1927.
*** Proc. Nat. Acad. Amer. **13**, 207, 1927.

II. Ermittlung der Öffnungszeit der Beamsschen Anordnung. Qualitativ kann die Wirkungsweise dieses Momentverschlusses folgendermaßen beschrieben werden.

Das in N_1 polarisierte Licht besitzt zwei gleich große und phasengleiche Komponenten in den Richtungen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$. Diese erleiden in K_1 eine Phasenverschiebung gegeneinander, die nur von der Größe der angelegten Spannung abhängt. In K_2 tritt noch eine zweite, aber entgegengesetzte Phasenverschiebung hinzu. Bei gleicher Spannung an K_1 und K_2 heben sich die beiden Phasenverschiebungen gerade auf, es kann kein Licht durch N_2 gelangen. Eine Komponente in der Richtung von N_2 kann nur während der Zeit ungleicher Spannung an K_1 und K_2 auftreten.

Die Aufladung von A erfolgt nun so langsam, daß während dieser Periode an K_1 und an K_2 praktisch die Spannung gleich groß ist; der Verschluß ist also geschlossen. Der Funkendurchschlag dagegen bewirkt eine steile, negative Spannungswelle, die nach verschieden langen Laufzeiten zu K_1 bzw. zu K_2 gelangt. Es entsteht somit eine Zeitperiode, während der ein Spannungsunterschied an beiden Zellen den Verschluß öffnet.

Wir wollen nun das Verhältnis von durchgelassener zu einfallender Intensität in Abhängigkeit von der Zeit ermitteln.

Wir müssen dazu in Betracht ziehen:

a) den zeitlichen Spannungsverlauf an der Funkenstrecke; b) die Fortpflanzung der Spannungswelle zu den Kerrzellen; c) den zeitlichen Spannungsverlauf an den Kerrkondensatoren; d) Größe und Trägheit des Kerreffektes; e) den räumlichen Abstand der Zellen voneinander.

a) Die Zeitdauer des Spannungszusammenbruches einer kurzen Funkenstrecke ist sicher nicht länger als 10^{-9} bis 10^{-8} sec. Wir wollen der Einfachheit halber mit einer rechteckigen Spannungswelle rechnen.

b) Diese Rechteckwelle läuft mit Lichtgeschwindigkeit (3 m in 10^{-8} sec) längs der Freileitung nach K_1 und K_2.

c) Nach Ankunft der Welle entlädt sich die Kapazität C der Kerrzelle nach dem Gesetz

$$E = E_0 \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}},$$

wo R den von der Größe der verteilten Selbstinduktion und Kapazität der Freileitung abhängigen Schwingungswiderstand bedeutet*. Es muß aber zwischen Kerrzelle und Funkenstrecke ein Dämpfungswiderstand von der Größe R eingebaut sein, damit keine Eigenschwingungen des Kreises auftreten können.

---

* Siehe z. B. R. Rüdenberg, Elektrische Schaltvorgänge. Berlin 1926.

d) Die Phasenverschiebung in der Kerrzelle beträgt

$$\vartheta = B \,.\, L \,.\, \mathfrak{E}^2 = \frac{B \,.\, L}{d^2} \cdot E^2 = K \,.\, E^2,$$

wo B die Kerrkonstante, L die Länge des Lichtweges im elektrischen Felde und d den Abstand der Platten bedeutet. Die Trägheit des Kerreffektes wollen wir vernachlässigen, da sie bekanntlich sehr gering ist.

e) Der räumliche Abstand der Zellen voneinander ist in bezug auf die Öffnungszeit einem Gangunterschied der Spannungswellen gleichwertig. Wir wollen ihn durch einen solchen kompensiert denken und weiterhin nur den Gangunterschied betrachten, welcher zu diesem hinzukommt.

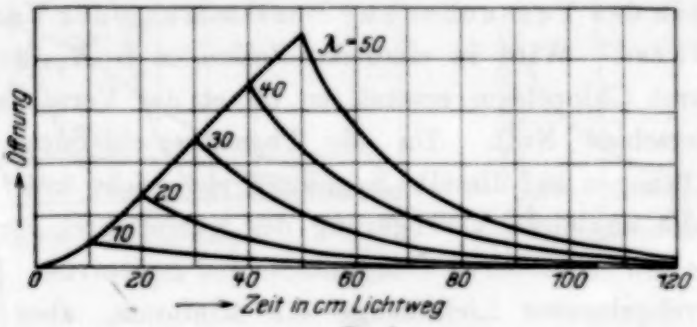


Fig. 3.

Auf Grund dieser Annahmen gelangen wir zu folgendem Ausdruck für das gesuchte Intensitätsverhältnis:

$$I' = \sin^2\left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2}\right) = \sin^2\left[\frac{K \,.\, E_0^2}{2}\left(e^{\frac{-2(t-t_2)}{R \,.\, C}} - e^{\frac{-2(t-t_1)}{R \,.\, C}}\right)\right],$$

wobei ein positiv ausfallender Exponent durch Null zu ersetzen ist. t_1 und t_2 sind die Zeitpunkte des Beginns der Entladung von K_1 und K_2, also

$$\lambda = c \,.\, (t_2 - t_1)$$

der Gangunterschied.

Zahlenmäßig wollen wir setzen:

$$K = \frac{B \,.\, L}{d^2} = \frac{1{,}34 \,.\, 10^{-9} \,.\, 12}{(0{,}45)^2} = 7{,}74 \,.\, 10^{-8} \text{ Grad/Volt}^2,$$

$$C = \frac{\varepsilon \,.\, L \,.\, h}{36 \,.\, \pi \,.\, d} \cdot 10^{-11} = \frac{2{,}61 \,.\, 12 \,.\, 1}{36 \,.\, \pi \,.\, 0{,}45} \cdot 10^{-11} = 6{,}1 \,.\, 10^{-12} \text{ F},$$

$$R = 500 \text{ Ohm}.$$

Im Diagramm (Fig. 3) sind die berechneten Öffnungskurven für verschiedene Gangunterschiede aufgetragen.

Wir ersehen aus diesem Diagramm, daß der Verschluß nicht mit gleichmäßiger Intensität öffnet. Damit ist auch die Öffnungszeit nicht schlechthin definierbar. Man könnte höchstens von einer Halbwertszeit

reden, während derer mehr als die Hälfte der maximalen Öffnung erreicht ist. Wir sehen ferner, daß die Maxima mit abnehmendem Gangunterschied immer kleiner werden. Diese Aussagen gelten nur für Gangunterschiede, welche in die Größenordnung der Zeitkonstanten $R \cdot C$ fallen. Übertreffen die Gangunterschiede diesen Wert um Zehnerpotenzen, so erfolgt die Öffnung tatsächlich mit konstanter Intensität und nahezu dem Gangunterschied proportionaler Dauer.

Für die Beurteilung der folgenden Versuchsergebnisse spielen aber gerade die Verhältnisse bei Gangunterschieden von der Größenordnung $R \cdot C$ die Hauptrolle.

III. Kritik des Versuches zur Bestimmung der Verzögerung des Kerreffektes. Wird in einer der Zellen, z. B. K_2, der Schwefelkohlenstoff durch Chloroform ersetzt, so öffnet der Verschluß auch bei dem Gangunterschied Null. Da die Phasenverschiebung der Lichtkomponenten, bezogen auf dieselbe Spannung, sich nicht änderte, so nahm man an, daß die ungleiche Verzögerung des Kerreffektes für die beiden Flüssigkeiten einen scheinbaren Gangunterschied hervorrufe. Tatsächlich besaß die durchgelassene Lichtmenge ein Minimum, aber bei einem von Null verschiedenen Gangunterschied. Vollständige Undurchlässigkeit konnte aber nicht erzielt werden.

Ein solches Verhalten kann aber auch als Folge der Änderung der Dielektrizitätskonstanten angesehen werden.

Wird nämlich K_2 mit Chloroform gefüllt, so ändert sich ihre Kapazität im Verhältnis

$$C' : C = 5{,}0 : 2{,}6.$$

Für die Öffnungskurve erhalten wir dann den Ausdruck

$$I' = \sin^2\left[\frac{K \cdot E_0^2}{2}\left(e^{\frac{-2(t-t_2)}{R \cdot C'}} - e^{\frac{-2(t-t_1)}{R \cdot C}}\right)\right],$$

wobei wieder ein positiv ausfallender Exponent durch Null zu ersetzen ist.

In Fig. 4 sind die entsprechenden Kurven aufgetragen.

Aus diesen wurde die durchgelassene Lichtmenge als Funktion des Gangunterschiedes ermittelt (Fig. 5).

Es ergibt sich derselbe Verlauf wie bei den beschriebenen Versuchen. Leider können wir noch nicht genau den Zeitmaßstab angeben, da die Größe R nur schätzungsweise bekannt ist. Letztere könnte nur auf Grund genauer Angaben über den Leitungsaufbau ermittelt werden.

Die störende Wirkung der verschiedenen Dielektrizitätskonstanten kann aber leicht ausgeschaltet werden. Es müssen nur beide Zellen, statt mit gleichen räumlichen Abmessungen, mit gleicher Kapazität ausgeführt werden. Das ist auch bei der erforderlichen Gleichheit des Kerreffektes erreichbar, da letzterer mit $l : d^2$, die Kapazität aber mit $l : d$ proportional ist. Man müßte z. B. in der oben betrachteten Anordnung bei der Zelle K_2 die Abmessung L etwa viermal so klein, d aber nur etwa zweimal so klein

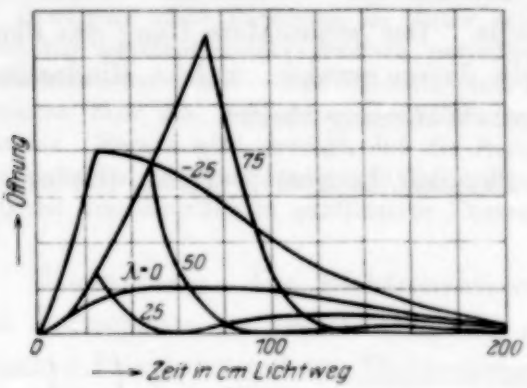


Fig. 4.

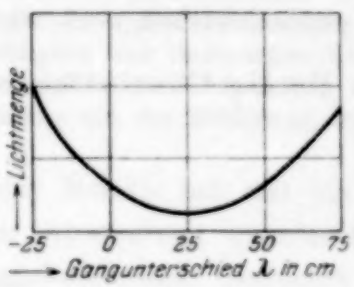


Fig. 5.

ausführen als bei K_1. Ein Versuch mit dieser Anordnung würde dann darüber entscheiden, ob ungleiche Verzögerungen auch, oder nur die Kapazitätsänderung von Einfluß war.

IV. Deutung der Versuche über den Photoeffekt kurzer Lichtblitze. E. O. Lawrence und I. W. Beams haben den Photostrom gemessen, den 120 mit obigem Momentverschluß erzeugte Lichtabschnitte in der Sekunde bewirkten. In Fig. 6 ist das Ergebnis ihrer Messungen dargestellt.

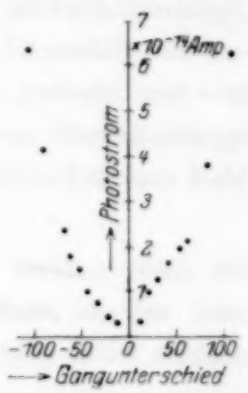


Fig. 6.

Die Verfasser nahmen dabei an, daß die Öffnung nach einer Rechteckkurve erfolgt und der Maximalwert bei verschiedener Zeiteinstellung unverändert bleibt. Sie folgerten also aus dem Meßergebnis, daß das energetische Verhalten kurzer Lichtabschnitte herunter bis etwa 10 cm Länge noch keinerlei quantenhafte Unstetigkeiten aufweist.

Demgegenüber zeigt Fig. 3, daß die Öffnungskurven keinesfalls rechteckig waren. Die durchgelassenen Lichtabschnitte können also als Überlagerung von Wellenzügen verschiedener Länge aufgefaßt werden. Nur die gemeinsame Wirkung dieser Wellenzüge konnte gemessen werden.

Andererseits zeigt auch Fig. 3, wie die Intensität der Lichtblitze sich bei Veränderung der Zeiteinstellung ändert. Die beobachtete Abhängigkeit des Photostromes von der Zeiteinstellung des Verschlusses kann also im wesentlichen als Folge dieser Intensitätsänderung angesehen werden.

Die Frage, bis zu welcher Mindestlänge Wellenzüge noch photoelektrisch wirksam sind, kann auf Grund dieser Versuche nicht beantwortet werden. Es wirken nämlich die Wellenzüge verschiedener Länge gemeinsam auf die Photozelle. Der beobachtete Gang des Photoeffektes muß sich fast unabhängig davon ergeben, welche Mindestlänge ein photoelektrisch noch wirksamer Wellenzug besitzt.

Berlin-Charlottenburg, Physikal. Institut d. Techn. Hochschule.

Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern.

Von **Felix Bloch** in Leipzig.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 10. August 1928.)

Die Bewegung eines Elektrons im Gitter wird untersucht, indem wir uns dieses durch ein zunächst streng dreifach periodisches Kraftfeld schematisieren. Unter Hinzunahme der Fermischen Statistik auf die Elektronen gestattet unser Modell Aussagen über den von ihnen herrührenden Anteil der spezifischen Wärme des Kristalls. Ferner wird gezeigt, daß die Berücksichtigung der thermischen Gitterschwingungen Größenordnung und Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit von Metallen in qualitativer Übereinstimmung mit der Erfahrung ergibt.

Einleitung. Die Elektronentheorie der Metalle hat seit einiger Zeit Fortschritte zu verzeichnen, die in der Anwendung quantentheoretischer Prinzipien auf das Elektronengas begründet sind. Zunächst hat Pauli* unter der Annahme, daß die Metallelektronen sich völlig frei im Gitter bewegen können und der Fermischen** Statistik gehorchen, den temperaturunabhängigen Paramagnetismus der Alkalien zu erklären vermocht. Die elektrischen und thermischen Eigenschaften des Elektronengases sind dann von Sommerfeld, Houston und Eckart*** näher untersucht worden. Die Tatsache freier Leitungselektronen wird von ihnen als gegeben betrachtet und ihre Wechselwirkung mit dem Gitter nur durch eine zunächst phänomenologisch eingeführte, dann von Houston**** strenger begründete freie Weglänge mitberücksichtigt. Schließlich hat Heisenberg† gezeigt, daß im anderen Grenzfall, wo zunächst die Elektronen an die Ionen im Gitter gebunden gedacht und erst in nächster Näherung die Austauschvorgänge unter ihnen berücksichtigt werden, das für den Ferromagnetismus entscheidende intermolekulare Feld seine Erklärung findet.

Hier soll ein Zwischenstandpunkt zwischen den beiden oben erwähnten Behandlungsweisen eingenommen werden, insofern, als der Austausch der Elektronen unberücksichtigt bleibt, sie dagegen nicht einfach

---

* W. Pauli, ZS. f. Phys. **41**, 81, 1927.
** E. Fermi, ebenda **36**, 902, 1926.
*** A. Sommerfeld, W. V. Houston, C. Eckart, ebenda **47**, 1, 1928.
**** W. V. Houston, ebenda **48**, 449, 1928.
† W. Heisenberg, ebenda **49**, 619, 1928.

als frei beweglich, sondern in einem Kraftfeld gedacht werden, das dieselbe Periodizität hat, wie der Gitteraufbau selbst. Auf dieser Annahme fußend, soll gezeigt werden, wie und bis zu welchem Grade sich die Tatsache freier Leitungselektronen quantenmechanisch rechtfertigen läßt. Wesentlich ist dabei der namentlich von Hund* hervorgehobene Unterschied gegenüber der klassischen Mechanik, daß es unmöglich ist, ein Elektron in einer noch so tiefen Potentialmulde festzuhalten. Solange man ein streng periodisches Kraftfeld annimmt, wird vielmehr jedes der N Elektronen unbehindert durch das Gitter durchwandern können. Erst dessen Abweichungen von der Periodizität infolge der Wärmebewegung der Atome gibt zu einer endlichen freien Weglänge und Leitfähigkeit Anlaß.

§ 1. Die Quantenmechanik eines Elektrons in einem dreifach periodischen Kraftfeld: Nach Schrödinger gehorcht die zur Energie E gehörige zeitunabhängige Wahrscheinlichkeitsamplitude $\psi(x\,y\,z)$ der Differentialgleichung

$$\Delta\psi + \mu(E - V)\,\psi = 0 \qquad \mu = \frac{8\pi^2 m}{h^2}. \tag{1}$$

V ist das elektrostatische Potential, in dem sich das Elektron im Gitter zu bewegen hat. Über seine Abhängigkeit von den Koordinaten x, y, z machen wir folgende Annahme:

Legt man den Koordinatenursprung in einen Gitterpunkt und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ die Grundvektoren des Gitters, so daß der Ortsvektor irgend eines Gitterpunktes gegeben ist durch

$$\mathfrak{r}_G = g_1\mathfrak{a} + g_2\mathfrak{b} + g_3\mathfrak{c} \qquad g_1 g_2 g_3 = \text{ganze Zahlen},$$

so soll V der Periodizitätsbedingung genügen

$$V(\mathfrak{r}) = V(\mathfrak{r} + g_1\mathfrak{a} + g_2\mathfrak{b} + g_3\mathfrak{c}), \tag{2}$$

wo $g_1 g_2 g_3$ wieder irgendwelche ganze Zahlen bedeuten und an Stelle des Tripels x, y, z der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ gesetzt ist.

Die Frage nach den Eigenwerten und Eigenlösungen der Differentialgleichungen (1) hängt nun von den Randbedingungen ab, denen letztere gehorchen sollen. Die naheliegendste Bedingung wäre das Verschwinden von ψ an den Randflächen des Kristalls, da die Wahrscheinlichkeit, das Elektron außerhalb anzutreffen, offenbar praktisch verschwindet.

Indessen brächte dies eine die Behandlung erschwerende Auszeichnung der Randflächen mit sich, die offenbar nichts mit der physikalischen

* F. Hund, ZS. f. Phys. **40**, 742, 1927.

Natur des Problems zu tun hat. Die Tatsache ist vollkommen analog derjenigen, die man seinerzeit bei der Theorie der spezifischen Wärme von Kristallgittern antraf. Die Schwierigkeit wurde damals von Born und Kármán* behoben durch Einführung der zyklischen Bedingung, daß die elastischen Eigenschwingungen eine dreifache räumliche Periodizität aufweisen sollen, und es liegt nahe, dieselbe Forderung für die Wahrscheinlichkeitsamplitude der Gitterelektronen zu erheben. Dies bedeutet, daß nicht nur die elastischen, sondern auch die von den Elektronen herrührenden Eigenschaften des ganzen, noch so großen Gitters bekannt sind, sobald sie in einem hinreichend großen Teilgebiet, sagen wir dem durch die Vektoren $G_1\mathfrak{a}$, $G_2\mathfrak{b}$, $G_3\mathfrak{c}$ aufgespannten Parallelepiped bekannt sind, wo $G_1 G_2 G_3$ große ganze Zahlen seien. Das Gesamtgitter geht aus diesem Grundgebiet mitsamt seinen Eigenschaften durch periodische Wiederholung hervor; die gleichartige Behandlungsweise von „ψ-Wellen" und elastischen Wellen wird sich als vorteilhaft erweisen, sobald wir ihre Wechselwirkung zu untersuchen haben, wie dies für das Problem des Widerstandes tatsächlich der Fall sein wird (§ 5).

Daß sich über die Lösungen von (1) schon etwas aussagen läßt allein auf Grund der Periodizität (2) des Potentials, wird durch die gruppentheoretischen Untersuchungen nahegelegt, die Wigner** zum ersten Male bei quantenmechanischen Fragen anstellte. Wir wiederholen seine Überlegungen in dem Maße, wie wir sie hier benötigen.

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß die Gittervektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ senkrecht aufeinander stehen, und die Koordinatenachsen in ihre Richtungen legen; die folgenden Überlegungen bleiben aber auch für einen beliebigen triklinen Kristall gültig.

Sei

$$|\mathfrak{a}| = a, \quad |\mathfrak{b}| = b, \quad |\mathfrak{c}| = c,$$

so gehören die drei Substitutionen

$$\left.\begin{array}{lll} R\colon x' = x + a, & y' = y, & z' = z, \\ S\colon x' = x, & y' = y + b, & z' = z, \\ T\colon x' = x, & y' = y & z' = z + c \end{array}\right\} \qquad (3)$$

zur Substitutionsgruppe der Differentialgleichung (1), d. h. mit jeder Lösnng $\psi(x\,y\,z)$ ist auch $\psi(x'\,y'\,z')$ eine Lösung. Nun seien $\psi_1(x\,y\,z\,E)$, $\psi_2(x\,y\,z\,E)$, ... $\psi_l(x\,y\,z\,E)$ eine Reihe von linear unabhängigen Eigen-

* M. Born und Th. v. Kármán, Phys. ZS. **13**, 297, 1912; **14**, 15, 1913.
** E. Wigner, ZS. f. Phys. **43**, 624, 1927.

funktionen von (1), die zum Eigenwert E gehören und aus denen sich jede zu E gehörige Lösung linear zusammensetzen läßt. Dann gilt

$$\left.\begin{aligned}\psi_\lambda(x+a,y,z\,E) &= \sum_{\varkappa=1}^{l} a_{\varkappa\lambda}\,\psi_\varkappa(x\,y\,z,E),\\ \psi_\lambda(x,y+b,z,E) &= \sum_{\varkappa=1}^{l} b_{\varkappa\lambda}\,\psi_\varkappa(x\,y\,z,E),\\ \psi_\lambda(x,y,z+c,E) &= \sum_{\varkappa=1}^{l} c_{\varkappa\lambda}\,\psi_\varkappa(x\,y\,z\,E).\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Das heißt, die Gruppenelemente R, S, T werden „dargestellt" durch die Matrizen bzw. $(a_{\varkappa\lambda})$, $(b_{\varkappa\lambda})$, $(c_{\varkappa\lambda})$. Entsprechend findet natürlich irgend ein Produkt, $R^{g_1}S^{g_2}T^{g_3}$, d. h. diejenige Substitution, die man erhält, wenn man g_1 mal hintereinander R, g_2 mal S, g_3 mal T ausgeübt hat, seine Darstellung in dem entsprechenden Matrizenprodukt $(a_{\varkappa\lambda})^{g_1}(b_{\varkappa\lambda})^{g_2}(c_{\varkappa\lambda})^{g_3}$. Nun sollen aber die Funktionen $\psi_\varkappa(x\,y\,z\,E)$ $(\varkappa = 1, 2 \ldots l)$, da sie als Eigenfunktionen unseres Problems mit der oben besprochenen Randbedingung eine dreifache räumliche Periodizität mit den Perioden $G_1 a$, $G_2 b$, $G_3 c$ aufweisen, durch die Substitutionen R^{G_1}, S^{G_2}, T^{G_3} in sich selbst übergeführt werden. Dies bedeutet für die Darstellung durch Matrizen:

$$(a_{\varkappa\lambda})^{G_1} = (b_{\varkappa\lambda})^{G_2} = (c_{\varkappa\lambda})^{G_3} = \delta_{\varkappa\lambda}, \tag{5}$$

wo $\delta_{\varkappa\lambda}$ die Einheitsmatrix bedeutet. Die für unser Problem charakteristische Substitutionsgruppe ist also das direkte Produkt dreier miteinander vertauschbarer zyklischer Gruppen* von den Ordnungen bzw. G_1, G_2, G_3. Ihre einfachste, die irreduzible Darstellung erhält man, wenn man statt von den $\psi_\varkappa$ von einem anderen System linear unabhängiger Eigenfunktionen

$$\psi'_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{l} t_{\varkappa\lambda}\,\psi_\varkappa \qquad \lambda = 1, 2 \ldots l$$

ausgeht und die Matrix $(t_{\varkappa\lambda}) = t$ so wählt, daß

$$(a'_{\varkappa\lambda}) = t^{-1}(a_{\varkappa\lambda})\,t;\quad (b'_{\varkappa\lambda}) = t^{-1}(b_{\varkappa\lambda})\,t;\quad (c'_{\varkappa\lambda}) = t^{-1}(c_{\varkappa\lambda})\,t$$

Diagonalmatrizen sind.

Dies ist nach bekannten Sätzen stets möglich, da die Matrizen $(a_{\varkappa\lambda})$, $(b_{\varkappa\lambda})$, $(c_{\varkappa\lambda})$ miteinander vertauschbar sind. Aus (5) wird nun

$$(a'_{\varkappa\lambda})^{G_1} = (b'_{\varkappa\lambda})^{G_2} = (c'_{\varkappa\lambda})^{G_3} = \delta_{\varkappa\lambda}. \tag{5'}$$

Die Diagonalelemente von $(a'_{\varkappa\lambda})$, $(b'_{\varkappa\lambda})$, $(c'_{\varkappa\lambda})$ sind also Einheitswurzeln, d. h. wir können schreiben

$$a'_{\lambda\lambda} = e^{\frac{2\pi i}{G_1}k_\lambda},\quad b'_{\lambda\lambda} = e^{\frac{2\pi i}{G_2}l_\lambda},\quad c'_{\lambda\lambda} = e^{\frac{2\pi i}{G_3}m_\lambda}, \tag{5''}$$

* Vgl. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. 2. Aufl., S. 16.

wo k_λ, l_λ, m_λ ganze Zahlen sind, und aus (4) wird

$$\left.\begin{aligned}
\psi'_\lambda(x+a,y,z,E) &= \sum_\varkappa a'_{\varkappa\lambda}\,\psi'_\varkappa(xyzE) = a'_{\lambda\lambda}\,\psi'_\lambda(xyzE) = e^{\frac{2\pi i}{G_1}k_\lambda}\,\psi'_\lambda(xyzE),\\
\psi'_\lambda(x,y+b,z,E) &= \sum_\varkappa b'_{\varkappa\lambda}\,\psi'_\varkappa(xyzE) = b'_{\lambda\lambda}\,\psi'_\lambda(xyzE) = e^{\frac{2\pi i}{G_2}l_\lambda}\,\psi'_\lambda(xyzE),\\
\psi'_\lambda(x,y,z+c,E) &= \sum_\varkappa c'_{\varkappa\lambda}\,\psi'_\varkappa(xyzE) = c'_{\lambda\lambda}\,\psi'_\lambda(xyzE) = e^{\frac{2\pi i}{G_3}m_\lambda}\,\psi'_\lambda(xyzE).
\end{aligned}\right\} \quad (4')$$

Zu jedem Eigenwert gehört natürlich ein ganz bestimmtes Zahlensystem k_λ, l_λ, m_λ.

Die Relationen (4') für die Eigenfunktionen ψ'_λ sind vollkommen äquivalent mit der Aussage: Jede Eigenfunktion läßt sich in der Form darstellen

$$\psi_{klm}(xyz) = e^{2\pi i\left(\frac{kx}{aG_1}+\frac{ly}{bG_2}+\frac{mz}{cG_3}\right)}\cdot u_{klm}(xyz), \qquad (6)$$

wo u_{klm} eine dreifach periodische Funktion mit den Perioden a, b, c ist und k, l, m ganze Zahlen bedeuten. Führen wir die Länge der das Grundparallelepiped aufspannenden Vektoren ein

$$aG_1 = K, \quad bG_2 = L, \quad cG_3 = M,$$

so wird aus (6)

$$\psi_{klm} = e^{2\pi i\left(\frac{kx}{K}+\frac{ly}{L}+\frac{mz}{M}\right)}\,u_{klm}(xyz). \qquad (6a)$$

Über die spezielle Form der Funktion u_{klm} ist nichts ausgesagt. Diese hängt natürlich davon ab, wie das Potential im einzelnen verläuft, und außerdem kann sie außer von den Zahlen k, l, m noch sehr wohl von anderen Quantenzahlen abhängen.

Die Tatsache, daß sich von den Eigenfunktionen nach (6a) stets ein Faktor $e^{2\pi i\left(\frac{kx}{K}+\frac{ly}{L}+\frac{mz}{M}\right)}$ abspalten läßt, wobei der Rest nur noch die Periodizität des Gitters aufweist, läßt sich anschaulich so formulieren, daß wir es mit ebenen de Broglie-Wellen zu tun haben, die im Rhythmus des Gitteraufbaus moduliert sind*.

Diese Ähnlichkeit mit den Eigenfunktionen der kräftefreien Bewegung ist es, die den Gitterelektronen die zur elektrischen Stromleitung notwendige Beweglichkeit gibt. Um dies zu zeigen, bilden wir den Aus-

* Zusatz bei der Korrektur. Wie ich leider erst nachträglich bemerkte, haben E. E. Wittmer und L. Rosenfeld, ZS. f. Phys. **48**, 530, 1928 dasselbe Resultat schon vorher auf anderem Wege hergeleitet.

druck, der nach Schrödinger* den zum Zustand k, l, m eines Elektrons gehörigen Gesamtstrom in der x-Richtung angibt:

$$s^x_{klm} = \frac{eh}{4\pi i m} \int \left(\bar{\psi}_{klm} \frac{\partial \psi_{klm}}{\partial x} - \psi_{klm} \frac{\partial \overline{\psi_{klm}}}{\partial x} \right) d\tau. \tag{7}$$

Die Integration ist über das ganze Grundparallelepiped zu erstrecken und die Eigenfunktionen (6a) sollen in diesem Gebiet orthogonal und normiert sein. Der Ausdruck (7) läßt sich folgendermaßen umformen: Nach (1) ist

$$\bar{\psi} \Delta \psi - \psi \Delta \bar{\psi} = 0.$$

Also nach dem Greenschen Satze

$$\int x (\bar{\psi} \Delta \psi - \psi \Delta \bar{\psi}) d\tau + \int x [(\text{grad } \psi, \text{ grad } \bar{\psi}) - (\text{grad } \bar{\psi}, \text{ grad } \psi)] d\tau$$
$$= - \int \left(\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) d\tau + \int x \left(\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} \right) df = 0,$$

wobei das letzte Integral über die Gesamtoberfläche des Grundparallelepipeds zu erstrecken ist und $\frac{\partial}{\partial n}$ Differentiation nach der Normalen bedeutet. Nun sind wegen der Periodizität die Ausdrücke $\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial n}$ und $\psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n}$ immer an entsprechenden Stellen der Oberfläche entgegengesetzt gleich, so daß nur die x-Seitenflächen etwas beitragen, und zwar bleibt:

$$s^x_{klm} = \frac{eh}{4\pi i m} \int \left(\bar{\psi}_{klm} \frac{\partial \psi_{klm}}{\partial x} - \psi_{klm} \frac{\partial \overline{\psi_{klm}}}{\partial x} \right) d\tau$$
$$= K \frac{eh}{4\pi i m} \int \left(\bar{\psi}_{klm} \frac{\partial \psi_{klm}}{\partial x} - \psi_{klm} \frac{\partial \overline{\psi_{klm}}}{\partial x} \right) df, \tag{8}$$

wo das Integral nur noch über die rechte Seitenfläche gemeint ist. Die Proportionalität mit K ist nur eine scheinbare, da noch die Normierung der ψ_{klm} in Betracht gezogen werden muß. (8) verschwindet nun im allgemeinen keineswegs, so daß dem Zustand k, l, m tatsächlich ein mittlerer Impuls, d. h. ein Vorwärtswandern entspricht.

Unsere bisherigen allgemeinen Betrachtungen sollen nun an zwei Grenzfällen illustriert werden, dem der vollkommen freien und dem der sehr fest gebundenen Elektronen. In der Natur findet sich natürlich stets ein Mittelding zwischen den beiden realisiert.

---

* E. Schrödinger, Ann. d. Phys. (4) **81**, 138, 1926.

Zunächst die freien Elektronen. Hier wird wegen der Normierung offenbar aus (6a)

$$\psi_{klm} = \frac{1}{\sqrt{KLM}} e^{2\pi i\left(\frac{kx}{K}+\frac{ly}{L}+\frac{mz}{M}\right)},$$

d. h. unsere quasi-ebenen de Broglie-Wellen (6a) gehen in diesem Grenzfall tatsächlich in die bekannten ebenen de Broglie-Wellen über. Aus (8) wird hier

$$s^x_{klm} = \frac{e}{m}\frac{kh}{K}, \tag{9}$$

wo $\frac{kh}{K}$ in bekannter Weise den zur Wellenlänge $\frac{K}{k}$ gehörigen Impuls darstellt. Die gewöhnliche Translationsbewegung ordnet sich hier auf ganz natürliche Weise dem Hundschen Platzwechsel des Elektrons in gleichen Potentialmulden unter.

Als der den vollkommen freien Elektronen entgegengesetzte Idealfall soll ausführlich diskutiert werden

§ 2. Der Grenzfall stark gebundener Elektronen. Dieser wird dargestellt durch ein Potential V, welches in der unmittelbaren Umgebung jedes Gitterpunktes stark negativ ist, in Entfernungen von der Größe der halben Gitterkonstanten jedoch stark ansteigt. An diesen Stellen werden, wie Hund* gezeigt hat, die Eigenfunktionen sowie ihre ersten Ableitungen sehr klein. Um nun zu sehen, in welcher Weise der Leitercharakter eines Gitters von der Bindungsstärke der Elektronen abhängt, braucht man nur in (8) die rechte Seitenfläche des Grundparallelepipeds in die Mitte zwischen zwei benachbarte Gitterebenen zu legen. (Wegen der Divergenzfreiheit des Stromes ist der Ausdruck (8) natürlich unabhängig von der speziellen Lage der Fläche!) Sie verläuft dann ausschließlich an Stellen hohen Potentials, so daß dort die Größen ψ und $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ und mithin der Strom sehr klein werden und im Grenzfall unendlich stark gebundener Elektronen (idealer Isolator) verschwinden.

Ein genaueres Bild unseres Modells erhalten wir, indem wir die Differentialgleichung (1) in ähnlicher Weise als ein Störungsproblem auffassen, wie dies von Heitler und London** für den Fall zweier Wasserstoffatome gemacht wurde. Während es sich aber dort um ein Zweikörperproblem handelt, liegt hier infolge der Vernachlässigung der

---

* l. c.

** W. Heitler und F. London, ZS. f. Phys. **44**, 455. 1927.

Elektronenwechselwirkung nur ein Einkörperproblem vor. Dabei wird unendlich starke Bindung als der ungestörte Ausgangspunkt betrachtet.

Zunächst stellen wir das Potential von (1) als Summe der von den verschiedenen Gitterpunkten herrührenden Potentiale dar. Dabei ist zu beachten, daß für sie nicht einfach das vom Metallion herrührende Feld maßgebend ist, sondern auch die übrigen Leitungselektronen einen Beitrag liefern. Man kann ihn sich etwa zustande gekommen denken durch die von ihnen herrührende kontinuierliche Ladungswolke*; indessen ist ihr Einfluß in der unmittelbaren Umgebung eines Atoms gering, so daß es gerechtfertigt sein wird, für das vom einzelnen Gitterpunkt herrührende Potential einfach das des Ions zu setzen.

Liegt das Ion im Gitterpunkt

$$\mathfrak{r}_{g_1 g_2 g_3} = g_1 \mathfrak{a} + g_2 \mathfrak{b} + g_3 \mathfrak{c},$$

so sei sein Potential gegeben durch

$$U_{g_1 g_2 g_3}(x y z) = U(x - g_1 a,\ y - g_2 b,\ z - g_3 c),$$

und es ist

$$V(x y z) = \sum_{g_1 g_2 g_3 = -\infty}^{+\infty} U_{g_1 g_2 g_3}(x y z). \tag{10}$$

Nun betrachten wir die Differentialgleichung

$$\Delta \varphi_{g_1 g_2 g_3} + \mu (E - U_{g_1 g_2 g_3}) \varphi_{g_1 g_2 g_3} = 0, \tag{11}$$

der offenbar die Bewegung eines Elektrons um ein isoliert gedachtes Ion des Metallgitters entspricht. Diejenige ihrer (im Unendlichen verschwindenden) reellen Eigenlösungen, die zum tiefsten Eigenwert E_0 gehört, sei

$$\varphi_{g_1 g_2 g_3}(x y z) = \varphi(x - g_1 a,\ y - g_2 b,\ z - g_3 c). \tag{12}$$

Solange man von der Wirkung der Metallionen auf die benachbarten absieht, ist unser System so vielfach entartet, als es Ionen im Gitter gibt, da zu der Bewegung (11) um jedes derselben die gleiche Energie E_0 gehört. Dementsprechend machen wir für die Lösung von (1) den Ansatz

$$E = E_0 + \varepsilon \qquad \psi = \sum_{g_1 g_2 g_3} a_{g_1 g_2 g_3} \varphi_{g_1 g_2 g_3} + v, \tag{13}$$

wo ε und v kleine Größen sein sollen, deren Produkte und höhere Potenzen zu vernachlässigen sind. Dann wird aus (1) unter Benutzung von (11)

$$\Delta v + \mu (E_0 - V) v = -\mu \sum_{g_1 g_2 g_3} a_{g_1 g_2 g_3} \varphi_{g_1 g_2 g_3} (\varepsilon - V + U_{g_1 g_2 g_3}). \tag{14}$$

Damit diese inhomogene Gleichung in v überhaupt eine Lösung hat, muß bekanntlich die rechte Seite auf den Lösungen der homogenen senk-

* Vgl. z. B. E. Fermi, ZS. f. Phys. **48**, 73, 1927.

recht stehen. Nun kennen wir letztere zwar nicht, doch werden sie sich von den Lösungen $\varphi_{g_1 g_2 g_3}$ von (11) um so weniger unterscheiden, je kleiner die Wechselwirkung benachbarter Atome ist. Wir fordern daher statt der eigentlichen Orthogonalität*

$$\sum_{g_1 g_2 g_3} a_{g_1 g_2 g_3} \int (\varepsilon - U'_{g_1 g_2 g_3})\, \varphi_{g_1 g_2 g_3}\, \varphi_{h_1 h_2 h_3}\, d\tau = 0$$
$$h_1 h_2 h_3 = -\infty \ldots + \infty. \tag{15}$$

wo

$$U'_{g_1 g_2 g_3} = V - U_{g_1 g_2 g_3}$$

gesetzt ist und das Integral über den ganzen Raum gemeint ist.

Über das Potential $U(x\,y\,z)$ um ein isoliertes Ion herum machen wir nun folgende Annahme, die erst unsere Wahl von (11) als ungestörtes Ausgangsproblem rechtfertigt. U soll im Punkte $x = y = z = 0$ negativ unendlich werden, im Unendlichen verschwinden und schon in Entfernungen vom Nullpunkt von der Größe der halben Gitterkonstanten sehr klein sein.

Dann sind die Eigenfunktionen $\varphi_{g_1 g_2 g_3}$ nur in der unmittelbaren Umgebung des Punktes $(g_1 g_2 g_3)$ wesentlich von Null verschieden, und wenn wir sie noch als normiert betrachten, so kann bis auf Glieder der Größenordnung von v gesetzt werden

$$\int \varphi_{g_1 g_2 g_3}\, \varphi_{h_1 h_2 h_3}\, d\tau = \begin{cases} 1 \text{ wenn } g_1 = h_1,\ g_2 = h_2,\ g_3 = h_3, \\ 0 \text{ in allen übrigen Fällen.} \end{cases} \tag{16}$$

Beim zweiten in (15) vorkommenden Integral

$$J = \int U'_{g_1 g_2 g_3}\, \varphi_{g_1 g_2 g_3}\, \varphi_{h_1 h_2 h_3}\, d\tau$$

ist zu bedenken, daß $U'_{g_1 g_2 g_3}$ in der Umgebung des Punktes $(g_1 g_2 g_3)$ fast verschwindet, nämlich gleich der Summe der von den übrigen Gitterpunkten dort erzeugten Potentiale ist. Deshalb muß bei der Bildung von J auch der Fall in Betracht gezogen werden, wo das Tripel $(h_1 h_2 h_3)$ einen zu $(g_1 g_2 g_3)$ benachbarten Gitterpunkt bezeichnet. Die weiter entfernten brauchen nicht betrachtet zu werden, da dort der Wert von $\varphi_{g_1 g_2 g_3}$ schon zu klein geworden ist. Wir wollen im folgenden annehmen, daß wir es mit einem einfachen kubischen Gitter zu tun haben und daß die Funktionen $U(xyz)$ und $\varphi(xyz)$ kugelsymmetrisch sind. Dann werden wir setzen dürfen

$$\int U'_{g_1 g_2 g_3}\, \varphi_{g_1 g_2 g_3}\, \varphi_{h_1 h_2 h_3}\, d\tau = \begin{cases} \alpha \text{ wenn } (h_1 h_2 h_3) = (g_1 g_2 g_3), \\ \beta \text{ wenn } (h_1 h_2 h_3) \text{ Nachbar von } (g_1 g_2 g_3), \\ 0 \text{ in allen übrigen Fällen.} \end{cases} \tag{17}$$

* Das Verfahren ist dem von Heitler und London, l. c., angewandten vollkommen analog.

α bezeichnet die durch den Einfluß der benachbarten Atome zu E tretende Zusatzenergie, β eine für den Platzwechsel nach den Nachbarpunkten charakteristische Energie und es wird mit (16) und (17) aus (15)

$$(\varepsilon - \alpha)\, a_{g_1 g_2 g_3} + \beta\,(a_{g_1+1, g_2, g_3} + a_{g_1-1, g_2, g_3} + a_{g_1, g_2+1, g_3} + a_{g_1, g_2-1, g_3} + a_{g_1 g_2 g_3+1} + a_{g_1 g_2 g_3-1}) = 0,$$
$$g_1 g_2 g_3 = -\infty \cdots +\infty. \tag{18}$$

Dies ist unser Säkularproblem zur Bestimmung der Unbekannten $a_{g_1 g_2 g_3}$.

Zu seiner Lösung erinnern wir uns des allgemeinen Resultats von § 1, daß jede, im Grundparallelepiped periodische Funktion beim Vorwärtswandern von einem Gitterpunkt zum benachbarten mit einer Einheitswurzel multipliziert wird. Sehen wir also zunächst von der kleinen Zusatzfunktion v in (13) ab, so werden wir in Analogie zu (6a) zu setzen haben:

$$a^{klm}_{g_1 g_2 g_3} = e^{2\pi i\left(\frac{k g_1}{G_1} + \frac{l g_2}{G_2} + \frac{m g_3}{G_3}\right)}. \tag{19}$$

In der Tat befriedigt dieser Ansatz das Gleichungssystem, wenn man dem Parameter ε den Wert erteilt

$$\varepsilon_{klm} = \alpha - 2\beta\left(\cos\frac{2\pi k}{G_1} + \cos\frac{2\pi l}{G_2} + \cos\frac{2\pi m}{G_3}\right)^{*}. \tag{20}$$

Man erhält also die Gesamtheit der Eigenfunktionen „nullter Näherung"

$$\psi^0_{klm} = \sum_{g_1 g_2 g_3 = -\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\left(\frac{k g_1}{G_1} + \frac{l g_2}{G_2} + \frac{m g_3}{G_3}\right)} \varphi_{g_1 g_2 g_3} \tag{21}$$

und zugehörigen Eigenwertstörungen, indem man in (20) und (21) den Zahlen k, l, m unabhängig die Werte von 1 bis bzw. $G_1 G_2 G_3$ erteilt. Der ursprüngliche Grad der Entartung der im Grundparallelepiped möglichen Elektronenzustände wird also auf den $G_1 G_2 G_3$-ten Teil reduziert.

Gleichung (21) stellt die natürliche Verallgemeinerung des von Hund** behandelten Falles der Bewegung in zwei gleichen Potentialmulden dar. Sind dort φ_1 und φ_2 die Eigenfunktionen, die der Bewegung

---

* Als Ausdruck der in § 1 diskutierten allgemeinen Gruppeneigenschaft der Eigenfunktionen gilt der Ansatz (19) streng auch dann, wenn man nicht nur den Austausch mit den Nachbar-, sondern auch mit entfernteren Atomen berücksichtigt. Man erhält dann für ε_{klm} eine nach cos fortschreitende Fourierreihe, die aber in (20) schon nach dem zweiten Gliede abgebrochen ist.

** F. Hund, ZS. f. Phys. **43**. 805. 1927.

in der Mulde 1 bzw. 2 entsprechen, so hat man als Eigenfunktionen nullter Näherung die „symmetrische“

$$\varphi_1 + \varphi_2$$

und die „antisymmetrische“

$$\varphi_1 - \varphi_2,$$

d. h., die die „Muldeneigenfunktionen“ verknüpfenden Faktoren sind zweite Einheitswurzeln, während in (21) der Grad der Einheitswurzeln durch die Zahl der im Grundparallelepiped vorhandenen Gitterpunkte bestimmt ist.

Wir gehen nun dazu über, nach (8) den zum Zustand k, l, m gehörigen Strom zu bilden. Hierzu genügt die Kenntnis der Eigenfunktionen nullter Näherung (21). Denn wie bei der homogenen Gleichung, so wird auch die schon an sich als klein vorausgesetzte Lösung von (14) an den Stellen hohen Potentials erst recht klein, so daß wir sie dort vernachlässigen dürfen.

Dann wird aus (8) mit Hilfe von (21)

$$s^x_{klm} = K\frac{e}{m}\cdot\frac{h}{2\pi}\sum_{\substack{g_1 g_2 g_3\\ h_1 h_2 h_3}} \sin 2\pi\left[\frac{k}{G_1}(h_1 - g_1) + \frac{l}{G_2}(h_2 - g_2) + \frac{m}{G_3}(h_3 - g_3)\right]\cdot\int \varphi_{g_1 g_2 g_3}\frac{\partial \varphi_{h_1 h_2 h_3}}{\partial x}\,df. \tag{22}$$

Die Integration soll wieder über die rechte, zwischen zwei Gitterebenen verlaufende Seitenfläche des Parallelepipeds vollzogen werden. Sie liefert offenbar nur dann etwas wesentlich von Null Verschiedenes, wenn die Gitterpunkte $(g_1 g_2 g_3)$ und $(h_1 h_2 h_3)$ entweder Nachbarn sind, die durch die rechte Seitenfläche getrennt werden, oder wenn sie zusammenfallen.

Und zwar wird, wenn die Integrationsfläche zwischen den Atomen $(g_1 g_2 g_3)$ und $(g_1 + 1, g_2 g_3)$ verläuft, aus Symmetriegründen

$$\left.\begin{aligned}\int \varphi_{g_1 g_2 g_3}\frac{\partial \varphi_{g_1+1,\,g_2 g_3}}{\partial x}\,df &= \int \varphi_{g_1+1,\,g_2 g_3}\frac{\partial \varphi_{g_1+1,\,g_2 g_3}}{\partial x}\,df = \Phi^x,\\ \int \varphi_{g_1 g_2 g_3}\frac{\partial \varphi_{g_1 g_2 g_3}}{\partial x}\,df &= \int \varphi_{g_1+1,\,g_2 g_3}\frac{\partial \varphi_{g_1 g_2 g_3}}{\partial x}\,df = -\Phi^x.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Wenn man nun bedenkt, daß die Zahl der benachbarten Gitterpunktepaare, die durch die rechte Seitenfläche getrennt werden, $G_2 G_3$ beträgt, und daß $K = a G_1$, so wird, aus (22)

$$s^x_{klm} = a G_1 G_2 G_3\cdot\frac{e h \Phi^x}{\pi m}\sin\frac{2\pi k}{G_1}, \tag{24}$$

und für den von einem einzelnen Elektron im Zustand k, l, m herrührenden Strom in der x-Richtung erhält man bei entsprechender Normierung der $\varphi_{\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3}$

$$s^x_{k\,l\,m} = e\,\frac{a\,h\,\Phi^x}{\pi\,m}\,\sin\frac{2\pi k}{G_1}\,. \tag{24a}$$

§ 3. Die spezifische Wärme gebundener Elektronen. Die Sommerfeldsche Theorie des aus den freien Elektronen bestehenden Fermigases liefert für dessen spezifische Wärme ein lineares Anwachsen mit der Temperatur T. Dieses Gesetz beansprucht Gültigkeit, solange $T \ll 10^4$, d. h. solange man es mit einem völlig entarteten Gase zu tun hat.

Herrn Professor Heisenberg verdanke ich den Hinweis auf das durch unsere Energieformel (20) bedingte, völlig andere Verhalten unseres „Gases gebundener Elektronen", das hier näher untersucht werden soll.

Nach (20) beträgt die zum Zustand k, l, m gehörige Energie

$$E_{k\,l\,m} = E_0 + \alpha - 2\,\beta\left(\cos\frac{2\pi k}{G_1} + \cos\frac{2\pi l}{G_2} + \cos\frac{2\pi m}{G_3}\right). \tag{25}$$

Wir betrachten im folgenden unser Grundparallelepiped als würfelförmig und so groß gewählt, daß sich gerade ein Mol unserer Substanz darin befindet, d. h. es sei

$$G_1 = G_2 = G_3 = G$$

und

$$G^3 = L = \text{Loschmidtsche Zahl}. \tag{26}$$

Dann sind G_1, G_2, G_3 ganze Zahlen der Größenordnung 10^8 und von den Größen

$$\xi = \frac{2\pi k}{G}, \quad \eta = \frac{2\pi l}{G}, \quad \zeta = \frac{2\pi m}{G} \tag{27}$$

darf angenommen werden, daß sie stetig von $-\pi$ bis $+\pi$ veränderlich sind. Dies entspricht dem Umstand, daß mit wachsendem Grundparallelepiped die diskreten stationären Zustände immer dichter zusammenrücken. Da die Zahl der in ihm vorhandenen Elektronen in gleichem Maße wächst, wird aus der ursprünglich treppenförmigen Verteilungsfunktion $f(\xi\,\eta\,\zeta)$ schließlich eine stetige Funktion. Sie gibt die Zahl der im Zustandsbereich

$$dk\,dl\,dm = \frac{L}{8\pi^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

befindlichen Elektronen an, und zwar beträgt diese nach Fermi

$$f(\xi\,\eta\,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \frac{L}{8\pi^3}\,\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\frac{1}{A}\cdot e^{-\frac{2\beta}{kT}(\cos\xi+\cos\eta+\cos\zeta)} + 1}\,. \tag{28}$$

Die Konstante A ist dadurch zu bestimmen, daß die Zahl N der im Grundparallelepiped vorhandenen Elektronen vorgegeben ist. Nun haben wir in § 2 angenommen, daß der ursprüngliche Eigenwert E_0 des isolierten Atoms einfach ist, so daß auch bei Hinzunahme der Wechselwirkung zu einem bestimmten Energiewert E_{klm} nur ein durch k, l, m bereits eindeutig definierter Zustand vorliegt. Indessen wird im allgemeinen, auch abgesehen vom Spin, der Ausgangsterm E_0 bereits mehrfach, sagen wir λ-fach entartet sein. Nehmen wir an, daß durch die Wechselwirkung die Energie jedes der zugehörigen λ-Zustände in gleicher Weise, nämlich nach der Formel (20) aufspaltet, und bedenken wir, daß infolge des Spins in jedem Zustand sich zwei Elektronen befinden können, so wird aus (28)

$$f(\xi\,\eta\,\zeta) = \frac{2\lambda L}{8\pi^3}\,\frac{1}{\frac{1}{A}\cdot e^{-\frac{2\beta}{kT}(\cos\xi+\cos\eta+\cos\zeta)}+1}, \tag{29}$$

A ist nun definiert durch

$$\frac{N}{2\lambda L} = \frac{n}{2\lambda} = \varkappa = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\pi}^{+\pi}\!\!\int\!\!\int \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\frac{1}{A}\cdot e^{-\frac{2\beta}{kT}(\cos\xi+\cos\eta+\cos\zeta)}+1}, \tag{30}$$

$n = \frac{N}{L}$ ist die Zahl der Leitungselektronen pro Atom. Da für das isolierte Atom das Pauliprinzip gilt, ist stets $n \leq 2\lambda$, d. h. $\varkappa \leq 1$.

Ferner ist die Gesamtenergie der im hervorgehobenen Kristallstück befindlichen Elektronen gegeben durch

$$E = \frac{2\lambda L}{8\pi^3}\int_{-\pi}^{+\pi}\!\!\int\!\!\int \frac{E_0+\alpha-2\beta(\cos\xi+\cos\eta+\cos\zeta)}{\frac{1}{A}\cdot e^{-\frac{2\beta}{kT}(\cos\xi+\cos\eta+\cos\zeta)}+1}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Oder nach (30)

$$E = N(E_0+\alpha) - \frac{4\lambda L\beta}{8\pi^3}\int_{-\pi}^{+\pi}\!\!\int\!\!\int \frac{\cos\xi+\cos\eta+\cos\zeta}{\frac{1}{A}\cdot e^{-\frac{2\beta}{kT}(\cos\xi+\cos\eta+\cos\zeta)}+1}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \tag{31}$$

Wir führen zur Abkürzung

$$\gamma = \frac{2\beta}{kT} \tag{32}$$

ein und behandeln zur Diskussion der in (30) und (31) vorkommenden Integrale die beiden folgenden Grenzfälle getrennt.

1. $\frac{2\beta}{k} \ll T$, d. h. $\gamma \ll 1$. Wir entwickeln in (30) und (31) den Integranden nach Potenzen von γ und brechen die Reihenentwicklung nach dem quadratischen Glied ab. Aus (30) wird dann

$$\varkappa = \frac{A}{8\pi^3(A+1)} \int_{-\pi}^{+\pi}\int\int\int \Big\{ 1 + \frac{1}{A+1}\Big[\gamma(\cos\xi + \cos\eta + \cos\zeta) - \frac{A-1}{A+1}\frac{\gamma^2}{2}(\cos\xi + \cos\eta + \cos\zeta)^2\Big]\Big\} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Das in γ lineare Glied fällt weg und es bleibt

$$\varkappa = \frac{A}{A+1} - \frac{3\gamma^2}{4} : A\,\frac{A-1}{(A+1)^3},$$

d. h., wenn man wieder bis zur zweiten Potenz von γ geht:

$$A = \frac{\varkappa}{1-\varkappa}\Big[1 + \frac{3\gamma^2}{4}(2\varkappa - 1)\Big].$$

Für den für die spezifische Wärme maßgebenden temperaturabhängigen Teil der Energie folgt hiermit aus (31)

$$E - N(E_0 + \alpha) = -\frac{4\lambda L\beta A}{8\pi^3(A+1)} \int_{-\pi}^{+\pi}\int\int\int \Big\{\cos\xi + \cos\eta + \cos\zeta + \frac{1}{A+1}[\gamma(\cos\xi + \cos\eta + \cos\zeta)^2]\Big\} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$= -\frac{6\lambda L\beta A}{(A+1)^2}\gamma = -3\varkappa(1-\varkappa)\lambda L \cdot \frac{(2\beta)^2}{kT}.$$

Daraus erhält man in diesem Falle hoher Temperaturen für die spezifische Molwärme bei konstantem Volumen:

$$C_v^1 = \frac{\partial E}{\partial T} = 3\varkappa(1-\varkappa)\lambda L \cdot \frac{(2\beta)^2}{kT^2} = 3\lambda\varkappa(1-\varkappa)R\cdot\gamma^2, \quad (33)$$

wo $R = kL$ die Gaskonstante bedeutet.

Die spezifische Wärme des Elektronengases fällt also mit $\frac{1}{T^2}$ ab, sobald man sich wesentlich oberhalb der durch

$$T_0 = \frac{2\beta}{k} \quad (34)$$

gegebenen Temperatur befindet. Es ist wichtig, sich über die Größenordnung von T_0 Aufschluß zu geben. Nach (17) ist für β das Produkt des ein isoliertes Atom $(h_1 h_2 h_3)$ umgebenden Potentials und seiner Eigen-

funktion $\varphi_{h_1 h_2 h_3}$, multipliziert mit der Eigenfunktion $\varphi_{g_1 g_2 g_3}$ des Nachbaratoms, maßgebend. Sei nun an der Stelle $(h_1 h_2 h_3)$ $\varphi_{g_1 g_2 g_3} : \varphi_{h_1 h_2 h_3} = \beta'$. Diese Zahl gibt an, wie rasch die Eigenfunktionen nach außen abfallen und hängt nach Hund, l. c., empfindlich von der Höhe der Potentialschwelle zwischen zwei Nachbaratomen ab. Wäre $\beta' = 1$, so erhielten wir nach (17) für die Austauschenergie β eine mit der Ionisationsarbeit vergleichbare Energie von der Größenordnung einiger Volt; d. h. 10^{-12} erg. Je niedriger die Potentialschwelle ist, desto mehr nähern wir uns diesem von Sommerfeld behandelten Grenzfall vollkommen freier Elektronen. Während allgemein $\beta \simeq \beta' . 10^{-12}$ erg, also nach (34)

$$T_0 \simeq \beta' . \frac{10^{-12}}{10^{-16}} = \beta' . 10^4, \tag{34a}$$

wird hier

$$T_0 = 10^4,$$

d. h. gleich der Temperatur, bei der auch bei Sommerfeld sich der Übergang vom entarteten zum nicht entarteten Gas vollzieht. Freilich ist für diesen Grenzfall unsere Formel (20) nicht mehr zuständig, doch zeigt sie wenigstens qualitativ den Übergang zum Fall freier Leitungselektronen. Wir interessieren uns hier für stark gebundene Elektronen, wie man sie mit Sicherheit bei schlechten Leitern und Isolatoren findet. Der Wert von β' wird hier wesentlich kleiner ausfallen. Bevor wir hierauf im Vergleich mit der Erfahrung näher eingehen, wollen wir den Verlauf der spezifischen Wärme für $T \ll T_0$ untersuchen.

2. $2\beta \gg kT$; $\gamma \gg 1$: Hier liegt der Fall des entarteten Gases vor; der Unterschied gegenüber der Sommerfeldschen Rechnung liegt lediglich in der verschiedenen Abhängigkeit der Energie E_{klm} von den Quantenzahlen. Während dort

$$E_{klm} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \text{const} . \left[\left(\frac{k}{G}\right)^2 + \left(\frac{l}{G}\right)^2 + \left(\frac{m}{G}\right)^2\right]$$

gilt, ist bei uns nach (25)

$$E_{klm} = E_0 + \alpha - 6\beta + 2\beta\left[1 - \cos\frac{2\pi k}{G} + 1 - \cos\frac{2\pi l}{G} + 1 - \cos\frac{2\pi m}{G}\right].$$

Es mag indessen zur Vereinfachung der Rechnung und, da es uns nur auf qualitative Resultate ankommt, erlaubt sein, die Funktion $1 - \cos\xi$ durch const. ξ^2 zu ersetzen, wodurch unsere Integrale auf die Sommerfeldschen zurückgeführt werden können. Sei also mit der Bezeichnungsweise (27) die Energie

$$E_{klm} = E(\xi\eta\zeta) = E_0 + \alpha - 6\beta + 2c\beta(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2). \tag{35}$$

Die Konstante c wählen wir so, daß (35) in dem für die spezifische Wärme maßgebenden Gebiet des $\xi\eta\zeta$-Raumes sich möglichst gut an (25) anschmiegt. Nun fällt die Verteilungsfunktion (29) bei einem entarteten Fermigase an einer Stelle steil ab*, die dadurch bestimmt ist, daß, wenn sämtliche Zustände niedrigerer Energie voll besetzt sind, in ihnen gerade alle vorhandenen Elektronen Platz finden. Dieses maßgebende Gebiet ist in unserem Falle eine Kugelfläche, deren Radius ϱ_0 gegeben ist durch

$$\frac{1}{8\pi^3}\,\frac{4\pi}{3}\,\varrho_0^3 = \varkappa, \quad \text{d. h.} \quad \varrho_0 = \sqrt[3]{6\pi^2\varkappa}$$

und wir wollen c so wählen, daß die Kurven $1-\cos\xi$ und $c\xi^2$ an der Stelle $\xi = \varrho_0$ parallel sind; also

$$c = \frac{\sin\varrho_0}{2\,\varrho_0} = \frac{\sin\sqrt[3]{6\pi^2\varkappa}}{2\sqrt[3]{6\pi^2\varkappa}}.$$

Nun wird aus (30) mit (32)

$$\varkappa = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\frac{1}{A'}\cdot e^{c\gamma(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}+1}.$$

Da die Verteilungsfunktion für $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = \varrho > \varrho_0$ exponentiell verschwindet, darf die Integration über $\xi\eta\zeta$ statt von $-\pi$ bis $+\pi$ auch von $-\infty$ bis $+\infty$ vollzogen werden. Dann erhält man, wie bei Sommerfeld:

in erster Näherung: $\lg A' = c\gamma\varrho_0^2$,

in zweiter Näherung: $\lg A' = c\gamma\varrho_0^2\left[1-\frac{2\pi^2}{24}\left(\frac{1}{c\gamma}\right)^2\frac{1}{\varrho_0^4}\right]$

und für die Energie aus

$$E = \frac{2\lambda L}{8\pi^3}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{E_0+\alpha-6\beta+2c\beta(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{\frac{1}{A'}\cdot e^{c\gamma(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}+1}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

$$E = N(E_0+\alpha-6\beta) + 2c\beta\,\frac{\lambda L}{5\pi^2}\,\varrho_0^5\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{1}{c\gamma}\right)^2\frac{1}{\varrho_0^4}\right].$$

* Vgl. Fig. 2.

Also wird die spezifische Wärme weit unterhalb der Temperatur T_0 dargestellt durch

$$C_v^2 = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{\lambda L}{6} \frac{k^2}{2c\beta} \varrho_0 T = \frac{\lambda \varrho_0}{6c} R \cdot \frac{1}{\gamma}. \tag{36}$$

Durch die für die beiden Grenzfälle gültigen Formeln (33) und (36) ist der qualitative Verlauf der nach unseren Vorstellungen zu erwartenden spezifischen Wärme der Elektronen bereits gegeben: Solange $T \ll T_0$, steigt sie wie bei Sommerfeld linear in T an, erreicht für $T \backsim T_0$ ein Maximum und sinkt für $T \gg T_0$ mit $\frac{1}{T^2}$ wieder ab, je mehr alle mit der Statistik verträglichen Verteilungen der Elektronen (einfach und doppelt besetzte Zellen) gleichwahrscheinlich werden. Da in (33) und (36) sowie auch im Zwischengebiet die spezifische Wärme nur von $\gamma = \frac{2\beta}{kT}$ abhängt, bedeutet ein Verkleinern von β lediglich ein Zusammenziehen der Kurve der spezifischen Wärme in der Richtung der T-Achse. Einen zweiten An- und Abstieg der spezifischen Wärme wird man erwarten, wenn kT sich dem Energiewert des ersten angeregten Zustandes nähert, doch sind hier die Temperaturen schon so hoch, daß sich dies wohl der Beobachtung entziehen wird.

Dagegen scheint das Experiment einen dem oben skizzierten ähnlichen Verlauf der spezifischen Wärme zu bestätigen. Simon* hat an grauem Zinn, Si und anderen Stoffen auf Abweichungen vom Debyeschen Gesetz hingewiesen, die sich gut einer von Schottky** angegebenen Formel fügen. Diese ist unter der Annahme zweier nahe beieiander liegender Energiestufen abgeleitet und lautet

$$C_v = R \cdot \left(\frac{\Theta_u}{T}\right)^2 \frac{e^{\frac{\Theta_u}{T}}}{\left(e^{\frac{\Theta_u}{T}} + 1\right)^2}. \tag{37}$$

Θ_u bedeutet eine unserem T_0 entsprechende „Umwandlungstemperatur". (37) zeigt für $T \gg \Theta_u$ wie C_v^1 ein Absteigen mit $\frac{1}{T^2}$, dagegen für $T \ll \Theta_u$ ein exponentielles Ansteigen mit $\left(\frac{\Theta_u}{T}\right)^2 e^{-\frac{\Theta_u}{T}}$, während bei uns nach (36) ein linearer Anstieg zu erwarten wäre. Tatsächlich zeigt sich

* F. Simon, Berl. Ber. 1926, S. 477, Nr. 33.
** W. Schottky, Phys. ZS. **23**, 448, 1922.

z. B. bei Si, worauf auch Simon hingewiesen hat, deutlich eine Abweichung von der Schottkyschen Formel, die im Sinne eines solchen Verlaufs zu deuten wäre.

Um auch über die auftretenden Größenordnungen etwas sagen zu können, bestimmen wir den Schnittpunkt von (33) und (36):

$$C_v^1 = 3\,\lambda\,\varkappa\,(1-\varkappa)\,R\,.\left(\frac{2\,\beta}{kT}\right)^2 = \frac{\lambda\,\varrho_0}{6\,c}\,R\,.\,\frac{kT}{2\,\beta} = C_v^2.$$

Dies findet statt für

$$T = T_0\sqrt[3]{\frac{18\,c\,\varkappa\,(1-\varkappa)}{\varrho_0}} = c_1\,T_0$$

und die zugehörige spezifische Wärme ist

$$C_v^0 = R\,.\,\frac{\lambda\,\varrho_0}{6\,c}\sqrt[3]{\frac{18\,c\,\varkappa\,(1-\varkappa)}{\varrho_0}} = c_2\,R.$$

Diese beiden Werte geben uns Aufschluß über die ungefähre Lage und Höhe des von C_v erreichten Maximums. Ist nicht gerade $\varkappa = 1$, d. h. sind nicht alle Zustände voll besetzt, so daß keine Energie vom Elektronengas aufgenommen werden kann und C_v dauernd Null ist, so sind c_1 und c_2 Zahlen von der Größenordnung 1. Dann würde man für den Maximalwert von C_v die Größenordnung von R erwarten, wie dies auch für den experimentell gefundenen Wert 0,4 R zutrifft. Die Lage des Maximums ist für die verschiedenen Stoffe verschieden, z. B. bei grauem Zinn bei $T = 29$. Dies würde nach (34a) für β' einen Wert der Größenordnung 10^{-3} bedeuten, was gerade bei schlechten Leitern immerhin als möglich bezeichnet werden kann. Übrigens ist unser Buckel in der Kurve der spezifischen Wärme nicht an das spezielle Bild gebunden, das wir uns von den Elektronen im Gitter machen, sondern er wird stets auftreten, wenn durch eine kleine Wechselwirkung gleichartiger Systeme die ursprüngliche Entartung aufgehoben wird und dadurch eine Gruppe nahe benachbarter Energiestufen auftritt. Insbesondere kann sich diese Wechselwirkung auch im Austausch der Elektronen äußern.

§ 4. Die Beschleunigung der Elektronen beim Zufügen eines homogenen Feldes: Die elektrische Leitfähigkeit eines Kristalls kann untersucht werden, wenn die beiden folgenden Fragen beantwortet sind:

1. Wie ändert sich die Bewegung der Elektronen beim Anlegen einer Spannung?
2. Wie erfolgt die Wechselwirkung der Elektronen mit den thermischen Eigenschwingungen des Gitters?

Es erscheint zunächst bedenklich, daß nicht auch die Wechselwirkung der Elektronen unter sich, d. h. im klassischen Bild ihre Zusammenstöße, im quantenmechanischen ihr Austausch mit berücksichtigt wird, die doch sicher von derselben Größenordnung ist, wie die mit dem Gitter. Die elektrische Leitfähigkeit berührt indessen nur die Frage nach dem Gesamtimpuls des Elektronengases, und dieser ändert sich zwar unter dem Einfluß der Prozesse 1. und 2., jedoch nicht unter dem letztgenannten. Für die Untersuchung der Wärmeleitfähigkeit dürfte er dagegen wichtig sein.

Bei der Beschleunigung der Elektronen durch das Feld wäre es nun naheliegend, von einem bestimmten, scharf definierten Ausgangszustand auszugehen und nach den Übergängen zu fragen, die infolge des Feldes nach den anderen Zuständen erfolgen. Dann ist aber nach (6a) die Ortsungenauigkeit des Elektrons über unseren ganzen unbegrenzten Kristall verbreitet, d. h. es würden noch Stellen mitspielen, wo das linear ansteigende Potential des Feldes bereits über alle Grenzen gewachsen ist. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, bauen wir uns ein Wellenpaket auf, das am Rande des Grundparallelepipedes hinreichend verschwindet, und das dennoch so groß ist, daß zu seinem Aufbau nur Eigenfunktionen benötigt werden, die zu einer Gruppe nahe beieinander liegender Zustände gehören.

Wir nehmen also an, daß zur Zeit $t = 0$ ein Wellenpaket vorliegt, das ähnlich gebaut ist, wie die von Heisenberg* und Kennard** benutzten, und untersuchen seine Bewegung bei der Anwesenheit eines Zusatzfeldes in der x-Richtung, d. h. eines Zusatzpotentiales $-eFx$ mittels der Diracschen*** Variation der Konstanten.

An Stelle von (1) hat hier die zeitabhängige Gleichung

$$\Delta\psi - \mu(V - eFx)\psi + \frac{4\pi i m}{h}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \tag{38}$$

zu treten, die wir durch einen Ansatz

$$\psi = \sum_{klm} c_{klm}(t) \cdot \psi_{klm} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{h} E_{klm} t}$$

zu lösen suchen. Da für $F = 0$ und $\frac{dc_{klm}}{dt} = 0$ (38) befriedigt wird, erhalten wir

$$\frac{4\pi i m}{h} \sum_{klm} \dot{c}_{klm}(t) \cdot \psi_{klm} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{h} E_{klm} t} = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} eFx\psi(t),$$

* W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **43**, 167, 1927.

** E. H. Kennard, ebenda **44**, 326, 1927; vgl. auch C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. **117**, 258, 1927.

*** P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **112**, 661, 1926.

insbesondere zur Zeit $t = 0$

$$\frac{4\pi i m}{h} \sum_{klm} \dot{c}_{klm}(0)\, \psi_{klm} = -\frac{8\pi^2 m}{h^2}\, eFx\, \psi(0) \tag{39}$$

oder, indem auch die rechte Seite nach Eigenfunktionen der Gleichung (1) entwickelt wird:

$$\dot{c}_{klm}(0) = \frac{2\pi i}{h}\, eF \int x\, \psi(0)\, \overline{\psi_{klm}}\, dx\, dy\, dz, \tag{40}$$

wo die Integration über unser ganzes Grundparallelepiped gemeint ist. Dies ist natürlich nur möglich, wenn die rechte Seite in (39) ebenso wie die Eigenfunktionen ψ_{klm} die durch unser Grundparallelepiped vorgezeichnete Periodizität besitzt. Das Wellenpaket sei nun gegeben durch

$$\psi(0) = e^{2\pi i\left[\frac{k'(x-x')}{K} + \frac{l'(y-y')}{L} + \frac{m'(z-z')}{M}\right] - \frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{2r^2}} u_{k'l'm'}. \tag{41}$$

Von der Ungenauigkeit r wollen wir annehmen, daß sie zwar viele Atomabstände umfaßt, aber dennoch so klein ist, daß die rechte Seite von (39) an den Grenzflächen des Grundparallelepipeds merklich verschwindet, sofern $x'y'z'$ ein Punkt in seinem Innern ist. Wiederholt man nun die Funktion (41) von Grundparallelepiped zu Grundparallelepiped so ist die Periodizitätsbedingung hinreichend erfüllt und (40) gerechtfertigt. Zunächst berechnen wir uns

$$c_{klm}(0) = \int \psi(0)\, \overline{\psi_{klm}}\, dx\, dy\, dz,$$

d. h. unter Benutzung von (6 a) und (41)

$$c_{klm}(0) = \int e^{2\pi i\left[\frac{k'(x-x')-kx}{K} + \frac{l'(y-y')-ly}{L} + \frac{m'(z-z')-mz}{M}\right] - \frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{2r^2}} \overline{u_{klm}}\, u_{k'l'm'}\, dx\, dy\, dz \tag{42}$$

oder

$$c_{klm}(0) = e^{-2\pi i\left[\frac{kx'}{K} + \frac{ly'}{L} + \frac{mz'}{M}\right]} \cdot \int e^{2\pi i\left[\frac{(k'-k)(x-x')}{K} + \frac{(l'-l)(y-y')}{L} + \frac{(m'-m)(z-z')}{M}\right] - \frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{2r^2}} \overline{u_{klm}} \cdot u_{k'l'm'}\, dx\, dy\, dz.$$

Da die Funktionen u_{klm} und $u_{k'l'm'}$ die Periode des Gitteraufbaues haben, kann man dafür auch setzen:

$$c_{klm}(0) = e^{-2\pi i\left[\frac{kx'}{K} + \frac{ly'}{L} + \frac{mz'}{M}\right]} \cdot \sum_{fgh} e^{2\pi i\left[\frac{(k-k')(f-f')}{G_1} + \frac{(l-l')(g-g')}{G_2} + \frac{(m-m')(h-h')}{G_3}\right] - \frac{(f-f')^2}{2r_1^2 G_1^2} - \frac{(g-g')^2}{2r_2^2 G_2^2} - \frac{(h-h')^2}{2r_3^2 G_3^2}}$$
$$\cdot \int \overline{u_{klm}}\, u_{k'l'm'} \cdot e^{2\pi i\left[\frac{x(k'-k)}{K} + \frac{y(l'-l)}{L} + \frac{z(m'-m)}{M}\right]} dx\, dy\, dz,$$

wobei die Integration nunmehr nur noch über ein Elementarparallelepiped des Gitters zu erstrecken ist, $G_{1,2,3}$ dieselbe Bedeutung haben wie in (6) und

$$r_{1,2,3} = \frac{r}{K}, \quad \frac{r}{L}, \quad \frac{r}{M} \tag{43}$$

gesetzt ist. Die Summation über f, g, h bezieht sich auf ein System identischer Punkte im Grundparallelepiped. Da $G_{1,2,3}$ als sehr groß vorausgesetzt sind, darf die Summe durch ein Integral ersetzt werden, das außerdem, da ja die Summanden am Rande des Grundparallelepipeds hinreichend verschwinden sollen, in allen drei Variablen von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt werden darf. Benutzen wir als Abkürzungen:

$$\frac{2\pi(f-f')}{G_1} = \xi, \quad \frac{2\pi(g-g')}{G_2} = \eta, \quad \frac{2\pi(h-h')}{G_3} = \zeta,$$

so wird hiermit

$$c_{klm}(0) = e^{-2\pi i\left[\frac{kx'}{K}+\frac{ly'}{L}+\frac{mz'}{M}\right]}$$

$$\cdot\int \overline{u_{klm}}\, u_{k'l'm'} \cdot e^{2\pi i\left[\frac{k'-k}{K}x+\frac{l'-l}{L}y+\frac{m'-m}{M}z\right]} dx\,dy\,dz$$

$$\cdot\frac{G_1G_2G_3}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int e^{i[(k'-k)\xi+(l'-l)\eta+(m'-m)\zeta]-\left(\frac{\xi^2}{8\pi^2r_1^2}+\frac{\eta^2}{8\pi^2r_2^2}+\frac{\zeta^2}{8\pi^2r_3^2}\right)} d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

also

$$c_{klm}(0) = e^{-2\pi i\left[\frac{kx'}{K}+\frac{ly'}{L}+\frac{mz'}{M}\right]}\cdot\frac{G_1G_2G_3}{8\pi^3}$$

$$\int \overline{u_{klm}}\, u_{k'l'm'} \cdot e^{2\pi i\left[\frac{(k'-k)x}{K}+\frac{(l'-l)y}{L}+\frac{(m'-m)z}{M}\right]} dx\,dy\,dz$$

$$\cdot r_1r_2r_3(8\pi^3)^{3/2}\cdot e^{-2\pi^2[r_1^2(k-k')^2+r_2^2(l-l')^2+r_3^2(m-m')^2]}. \tag{44}$$

Im Falle $k = k'$, $l = l'$, $m = m'$ wird

$$G_1G_2G_3\cdot\int \overline{u_{klm}}\, u_{k'l'm'} \cdot e^{2\pi i\left[\frac{(k'-k)x}{K}+\frac{(l'-l)y}{L}+\frac{(m'-m)z}{M}\right]} dx\,dy\,dz = 1, \tag{45}$$

weil die Eigenfunktionen (6a) im Grundparallelepiped normiert sind. Da nun r viele Atomabstände umfaßt, wird $c_{klm}(0)$ unter Berücksichtigung der Bedeutung (43) der Größen $r_{1,2,3}$ nur dann wesentlich von Null verschieden, wenn

$$k - k' \ll G_1; \quad l - l' \ll G_2; \quad m - m' \ll G_3.$$

Dann darf man auch mit guter Annäherung die Gültigkeit von (45) annehmen, und man erhält aus (44):

$$c_{klm}(0) = e^{-2\pi i\left[\frac{kx'}{K}+\frac{ly'}{L}+\frac{mz'}{M}\right]} \cdot r_1 r_2 r_3 \sqrt{8\pi^3} \cdot e^{-2\pi^2[r_1^2(k-k')^2 + r_2^2(l-l')^2 + r_3^2(m-m')^2]}. \tag{46}$$

Auf ganz analoge Weise, wie man aus (42) (46) erhält, wird aus (40)

$$\dot{c}_{klm}(0) = \frac{KeF}{h} \cdot e^{-2\pi i\left[\frac{kx'}{K}+\frac{ly'}{L}+\frac{mz'}{M}\right]} \cdot r_1 r_2 r_3 \sqrt{8\pi^3}\left[4\pi^2 r_1^2 (k-k') + \frac{2\pi i}{K} x'\right] \cdot e^{-2\pi^2[r_1^2(k-k')^2 + r_2^2(l-l')^2 + r_3^2(m-m')^2]}. \tag{47}$$

Bilden wir hieraus

$$\frac{d}{dt}|c_{klm}|^2 = \frac{KeF}{h}\frac{(8\pi^3 r_1^2 r_2 r_3)^2}{\pi}(k-k') \cdot e^{-4\pi^2[r_1^2(k-k')^2 + r_2^2(l-l')^2 + r_3^2(m-m')^2]}$$

oder

$$\frac{d}{dt}|c_{klm}|^2 = -\frac{KeF}{h}\frac{\partial}{\partial k}|c_{klm}(0)|^2 *, \tag{48}$$

so sieht man, daß, wenn anfänglich die Amplituden der unser Wellenpaket aufbauenden Eigenfunktionen durch (46) gegeben sind, sich diese Verteilung der Amplituden im k, l, m-Raume nach wachsenden Werten von k verschiebt, und zwar um so rascher, je größer die Feldstärke F ist. Im Grenzfalle vollkommen freier Elektronen geht (48) direkt in das über, was man nach der klassischen Mechanik erwarten würde. Nach (9) ist dann nämlich die Geschwindigkeit in der x-Richtung gegeben durch

$$v_x = \frac{kh}{mK}$$

und statt (48) kann man schreiben:

$$\frac{d}{dt}|c_{klm}|^2 = -\frac{eF}{m}\frac{\partial}{\partial v_x}|c_{klm}|^2.$$

Dies würde man auch klassisch erwarten, wenn ein Schwarm von Elektronen vorliegt, die die Beschleunigung $\frac{eF}{m}$ erfahren **.

---

* Herr Peierls hat mich freundlichst darauf aufmerksam gemacht, daß man Gleichung (48) auch unabhängig von der speziellen Form (41) des Wellenpakets herleiten kann. Von einem solchen und insbesondere nicht von einem scharf definierten stationären Zustand auszugehen, scheint aber auf jeden Fall nötig zu sein.

** Vgl. E. H. Kennard, l. c.

Geht man von einem Wellenpaket der Form (41) aus, so ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Zustand k, l, m zu treffen, proportional

$$w(klm, k'l'm') = e^{-2\pi^2[r_1^2(k-k')^2 + r_2^2(l-l')^2 + r_3^2(m-m')^2]}.$$

Hat man es nun mit sehr vielen Elektronen zu tun, so verlangt die Fermistatistik, daß die mittlere Zahl der Elektronen im Zustand k, l, m proportional sei zu

$$f(klm) = \frac{1}{\frac{1}{A} \cdot e^{\frac{E_{klm}}{kT}} + 1}. \tag{49}$$

Um dies zu erreichen, hat man offenbar statt des einen Wellenpakets (41) N verschiedene mit unabhängiger Phase zu superponieren. Sei die von dem i-ten Paket (Elektron) herrührende Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Zustand k, l, m anzutreffen

$$w_i(klm, k_i'l_i'm_i') \qquad i = 1, 2 \ldots N,$$

so setzt sich bei Mittelung über die Phasen wegen ihrer Unabhängigkeit die Gesamtwahrscheinlichkeit hierfür additiv aus ihnen zusammen, und um (49) zu befriedigen, ist zu fordern, daß die Zahlen k_i', l_i', m_i' so gewählt werden, daß

$$\sum_{i=1}^{N} w_i(klm, k_i'l_i'm_i') = \frac{1}{\frac{1}{A} e^{\frac{E_{klm}}{kT}} + 1} = f(klm).$$

Nun gilt nach (48)

$$\frac{dw_i(klm, k_i'l_i'm_i')}{dt} = -\frac{KeF}{h} \frac{\partial w_i(klm, k_i'l_i'm_i')}{\partial k}.$$

Summiert man auf beiden Seiten über i von 1 bis N, so erhält man für die zeitliche Änderung der Verteilungsfunktion infolge der angelegten Spannung allein:

$$\frac{df(klm)}{dt} = -\frac{KeF}{h} \frac{\partial f(klm)}{\partial k} \tag{50}$$

oder mit den Abkürzungen (27) und dem Umstand, daß $K = aG_1$

$$\frac{df(\xi\eta\zeta)}{dt} = -\frac{2\pi eFa}{h} \frac{\partial f(\xi\eta\zeta)}{\partial \xi},$$

wo nunmehr die $\xi\eta\zeta$ wieder einen kontinuierlichen Wertebereich durchlaufen.

Die Formel (50) ist ganz die von Lorentz* und Sommerfeld benutzte mit dem einzigen Unterschied, daß hier $\xi\eta\zeta$ im allgemeinen nicht

* The Theory of Electrons. Teubner 1916, S. 267 ff.

die Geschwindigkeitskomponenten bedeuten, sondern andere, mit ihnen zusammenhängende Größen, die ebenfalls den Quantenzustand charakterisieren.

§ 5. Die Wechselwirkung der Elektronen und der elastischen Wellen des Gitters. Leitfähigkeit. In § 1 wurde gezeigt, daß, solange das Gitter als streng periodisch betrachtet wird, zu jedem stationären Zustand klm nach (8) ein bestimmter Impuls in der x- und ebenso in der y- und z-Richtung gehört. Solange man also diese Vorstellung aufrecht erhält, laufen die Elektronen unbehindert durch das Gitter durch und man erhält über das Zustandekommen eines elektrischen Widerstandes keine Auskunft. Nun kommen zwar in der Natur niemals streng periodische Gitter, d. h. vollkommene Einkristalle vor, wie hier vorausgesetzt wurde, doch werden die Gitterstörungen sich ähnlich wie Verunreinigungen nur in einem kleinen, temperaturunabhängigen Restwiderstand geltend machen.

Um über den Temperaturverlauf des Widerstandes Rechenschaft geben zu können, müssen andere Abweichungen von der strengen Periodizität entscheidend sein, nämlich diejenigen, welche von den thermischen Eigenschwingungen des Kristalls herrühren. Es handelt sich daher im folgenden darum, durch eine Störungsrechnung die Wechselwirkung zweier gekoppelter Systeme zu verfolgen: Des Elektronengases und des elastischer Schwingungen fähigen Gitters. Ist die Temperatur hinreichend tief, so dürfen wir von den elastischen Wellen voraussetzen, daß ihre Längen groß sind gegen die Atomabstände, so daß wir ihnen gegenüber den Kristall als Kontinuum auffassen dürfen, und ferner, daß ihre Amplituden so klein sind, daß die Schwingungen wesentlich harmonisch sind.

Von dem elastischen Verschiebungsvektor $\mathfrak{u}(xyz)$ fordern wir dieselbe Periodizität, wie von den Eigenfunktionen der Elektronen (vgl. § 1). Stellen wir ihn durch eine Fourierreihe dar

$$\mathfrak{u} = \sum_{fgh=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{3} \left[a_{fghj} \cos 2\pi \left(\frac{fx}{K} + \frac{gy}{L} + \frac{hz}{M} \right) + b_{fghj} \sin 2\pi \left(\frac{fx}{K} + \frac{gy}{L} + \frac{mz}{M} \right) \right] \mathfrak{u}_{fghj}, \tag{51}$$

so entspricht dies für Wellen, deren Längen groß sind gegen die Atomabstände einer Darstellung der Gitterschwingungen durch Normalkoordinaten a_{fghj} und b_{fghj}. Die Zahlen fgh charakterisieren den Aus-

breitungsvektor, j den Polarisationszustand der betreffenden Normalschwingung, und es gilt

$$a_{fghj} = a_{-f,-g,-h,j}; \quad b_{fghj} = -b_{-f,-g,-h,j}.$$

u_{fghj} ist ein Einheitsvektor in der Schwingungsrichtung und steht für $j = 1$ (longitudinale Welle) parallel, für $j = 2, 3$ (transversale Welle) senkrecht zu fgh. Die Normalkoordinaten gehorchen nach der klassischen Mechanik den Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \ddot{a}_{fghj} + 4\pi^2 \nu_{fghj}^2 a_{fghj} &= 0 \\ \ddot{b}_{fghj} + 4\pi^2 \nu_{fghj}^2 b_{fghj} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

mit

$$\nu_{fghj} = v_j \sqrt{\left(\frac{f}{K}\right)^2 + \left(\frac{g}{L}\right)^2 + \left(\frac{h}{M}\right)^2}, \tag{52a}$$

wo v_1 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler, $v_2 = v_3$ die transversaler Wellen bedeudet.

Quantenmechanisch läßt sich nicht die exakte Funktion $a_{fghj}(t)$ angeben, sondern eine Wahrscheinlichkeitsamplitude $\psi(a_{fghj})$, die der Differentialgleichung genügt.

$$\frac{d^2\psi}{da_{fghj}^2} + \frac{8\pi^2 M}{h^2}(E - 2\pi^2 M \nu_{fghj}^2 a_{fghj}^2)\psi = 0^*. \tag{53}$$

M ist dabei die Masse des Oszillators, in unserem Falle des Grundparallelepipeds, E die Energie der Eigenschwingung $fghj$; ihr zur Eigenfunktion $\psi_{q(fghj)}(a_{fghj})$ gehöriger Wert beträgt bekanntlich

$$E_{q(fghj)} = [q(fghj) + \tfrac{1}{2}]\, h\, \nu_{fghj}. \tag{54}$$

Analog haben wir statt $b_{fghj}(t)$ eine Eigenfunktion

$$\psi_{r(fghj)}(b_{fghj})$$

mit dem zugehörigen Eigenwert

$$E_{r(fghj)} = [r(fghj) + \tfrac{1}{2}]\, h\, \nu_{fghj}. \tag{54a}$$

$q(fghj)$ und $r(fghj)$ bezeichnen die Quantenzahlen der beiden durch f, g, h, j charakterisierten Oszillatoren (Eigenschwingungen).

Solange die Wechselwirkung zwischen dem Elektron und den Gittereigenschwingungen noch nicht berücksichtigt wird, gehört zum Zustand klm des ersteren nach § 1 die Energie E_{klm}, zu den letzteren die Energien (54). Die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Gesamt-

* E Schrödinger, Ann. d. Phys. (4) **79**, 514, 1926.

systems, bestehend aus Elektron und Gitter zusammengenommen, sind gegeben durch

$$\left.\begin{aligned}&\psi_{klm,\,q(fghj),\,r(fghj)}\\&\quad=\psi_{klm}\prod_{fghj}\psi_{q(fghj)}\,\psi_{r(fghj)}\cdot e^{\frac{2\pi i t}{h}E_{klm,\,q(fghj),\,r(fghj)}}\\\text{und}\quad&E_{klm,\,q(fghj),\,r(fghj)}=E_{klm}+\sum_{fghj}E_{q(fghj)}+E_{r(fghj)}\end{aligned}\right\}\tag{55}$$

Sollen jedoch die beiden Systeme gekoppelt sein, so hat hierzu eine Wechselwirkungsenergie W zu treten, über die wir folgende Annahmen machen: Infolge der elastischen Verschiebung (51) soll der Wert des elektrostatischen Potentials, in dem sich das Elektron zu bewegen hat, an der Stelle $\mathfrak{r}$ ebenso groß sein, wie er ohne die Verschiebung an der Stelle $\mathfrak{r}-\mathfrak{u}$ wäre, d. h. es soll für das neue Potential $V^*(\mathfrak{r})$ gelten

$$V^*(\mathfrak{r})=V(\mathfrak{r}-\mathfrak{u})=V(\mathfrak{r})-W(\mathfrak{r}).$$

Da $|\mathfrak{u}|$ klein ist gegen die Gitterkonstante, d. h. gegen die Entfernungen, innerhalb deren sich V merklich ändert, kann man setzen

$$W(\mathfrak{r})=(\operatorname{grad}V,\,\mathfrak{u}),$$

d. h. nach (51)

$$\left.\begin{aligned}&W(x\,y\,z,\,a_{fghj},\,b_{fghj})\\&\quad=\sum_{fgh=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=1}^{3}\Big[a_{fghj}\cos 2\pi\Big(\frac{f\,x}{K}+\frac{g\,y}{L}+\frac{h\,z}{M}\Big)\\&\qquad+b_{fghj}\sin 2\pi\Big(\frac{f\,x}{K}+\frac{g\,y}{L}+\frac{h\,z}{M}\Big)\Big](\operatorname{grad}V,\,\mathfrak{u}_{fghj}).\end{aligned}\right\}\tag{56}$$

Wie in § 4 machen wir nun wieder zur Lösung der durch die Zusatzenergie (56) gestörten Schrödingergleichung des Gesamtsystems den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$\psi=\sum_{klm,\,q(fghj),\,r(fghj)}c(t)_{klm,\,q(fghj),\,r(fghj)}\cdot\psi_{klm,\,q(fghj),\,r(fghj)}$$

und erhalten daraus in bekannter Weise†

$$\dot c(t)_{klm,\,q,\,r}=-\frac{2\pi i}{h}\sum_{k'l'm',\,q',\,r'}W_{klm,\,q,\,r;\,k'l'm',\,q',\,r'}\cdot c_{k'l'm',\,q',\,r'}\tag{57}$$

wo $W_{klm,\,q,\,r;\,k'l'm',\,q',\,r'}$ das zur Störungsenergie W gehörige Matrixelement

$$W_{klm,\,q,\,r;\,k'l'm',\,q',\,r'}=\int W\,\psi_{klm,\,q,\,r}\,\overline{\psi_{k'l'm',\,q',\,r'}}\,d\tau\tag{58}$$

bedeutet.

† Vgl. P. A. M. Dirac, l. c.

Die Integration ist im x-, y-, z-Raum über unser ganzes Grundparallelepiped und hinsichtlich der Normalkoordinaten a_{fghj} und b_{fghj} von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken. Setzt man (56) in (58) ein, so erhält man nur dann etwas von Null Verschiedenes, wenn höchstens für ein Zahlenquadrupel $f\,g\,h\,j$, sagen wir $f^*\,g^*\,h^*\,j^*$ entweder

$$q'(f^*\,g^*\,h^*\,j^*) = q(f^*\,g^*\,h^*\,j^*) \pm 1$$

oder

$$r'(f^*\,g^*\,h^*\,j^*) = r(f^*\,g^*\,h^*\,j^*) \pm 1.$$

Man stößt nämlich bei der Integration (58) auf die wohlbekannten Matrixelemente der Oszillatorkoordinate, und zwar wird im ersten Falle

$$\left.\begin{aligned} W_{klm,\ q(f^*q^*h^*j^*);\ k'l'm',\ q(f^*g^*h^*j^*)\pm 1} &= e^{\frac{2\pi i}{h}\left[E_{klm} - E_{k'l'm'} \pm h\nu\right]t} \cdot J_{klm,\ k'l'm',\ j^*} \\ &\cdot \left(\frac{h}{8\pi^2 M \nu (f^*\,g^*\,h^*\,j^*)}\right)^{1/2} \begin{cases} \sqrt{q(f^*\,g^*\,h^*\,j^*)+1} \\ \sqrt{q(f^*\,g^*\,h^*\,j^*)} \end{cases}. \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Von der Integration im x-, y-, z-Raum bleibt bei Benutzung von (6a)

$$\begin{aligned} J_{klm,\ k'l'm',\ j^*} &= \frac{1}{2}\int (\text{Grad } V\,\mathfrak{u}_{f^*g^*h^*j^*}) \Big[e^{2\pi i\left(x\frac{f^*+k-k'}{K} + y\frac{g^*+l-l'}{L} + z\frac{h^*+m-m'}{M}\right)} \\ &- e^{2\pi i\left(x\frac{-f^*+k-k'}{K} + y\frac{-g^*+l-l'}{L} + z\frac{-h^*+m-m'}{M}\right)}\Big] u_{klm}\,\overline{u_{k'l'm'}}\,dx\,dy\,dz. \end{aligned}$$

Dies gibt

$$J_{klm,\ k'l'm',\ j^*} = \tfrac{1}{2}\int (\text{Grad } V\,\mathfrak{u}_{f^*g^*h^*j^*})\,u_{klm}\,\overline{u_{k'l'm'}}\,dx\,dy\,dz, \quad (60)$$

wenn entweder

$$k' = k + f^*, \quad l' = l + g^*, \quad m' = m + h^* \quad (60a)$$

oder

$$k' = k - f^*, \quad l' = l - g^*, \quad m' = m - h^*. \quad (60b)$$

Entsprechend erhält man natürlich im zweiten Falle statt $J_{klm,\ k'l'm';\ j^*}$

$$\mp i\,J_{klm,\ k'l'm',\ j^*},$$

je nachdem, ob

$$k' = k + f^*, \quad l' = l + g^*, \quad m' = m + h^*$$

oder

$$k' = k - f^*, \quad l' = l - g^*, \quad m' = m - h^*.$$

In allen anderen Fällen erhält man $J_{klm,\ k'l'm',\ j^*} = 0$ infolge des auftretenden Exponentialfaktors und dank dem Umstande, daß sowohl (grad V, $\mathfrak{u}_{f^*g^*h^*j^*}$) wie $u_{klm}\,\overline{u_{k'l'm'}}$ Funktionen von $x\,y\,z$ sind, die die Perioden bzw. a, b, c haben. Man sieht also, daß, damit ein Übergangsprozeß des Elektrons vom Zustand $k\,l\,m$ nach $k'\,l'\,m'$ stattfindet, die

Interferenzbedingung (60a, b) zwischen ursprünglicher und entstehender Elektronenwelle und der dabei mitspielenden elastischen Welle bestehen muß*. Aus (57) wird somit

$$
\begin{aligned}
\dot{c}_{klm,\, q(fgh j),\, r(fgh j)} = &-\frac{2\pi i}{h} \sum_{k'l'm',\, q(f_1 g_1 h_1 j_1),\, r(f_2 g_2 h_2 j_2)} J_{klm,\, k'l'm',\, j_1} \\
&\cdot \left(\frac{h}{8\pi^2 M \nu (f_1 g_1 h_1 j_1)}\right)^{1/2} \cdot e^{\frac{2\pi i t}{h}(E_{klm} - E_{k'l'm'})} \\
&\Big[\sqrt{q(f_1 g_1 h_1 j_1)+1}\cdot e^{2\pi i \nu (f_1 g_1 h_1 j_1) t}\cdot c_{k'l'm',\, q(f_1 g_1 h_1 j_1)+1} \\
&+\sqrt{q(f_1 g_1 h_1 j_1)}\cdot e^{-2\pi i \nu (f_1 g_1 h_1 j_1) t}\cdot c_{k'l'm',\, q(f_1 g_1 h_1 j_1)-1} \\
&+ i\sqrt{r(f_1 g_1 h_1 j_1)+1}\cdot e^{2\pi i \nu (f_1 g_1 h_1 j_1) t}\cdot c_{k'l'm',\, r(f_1 g_1 h_1 j_1)+1} \\
&+ i\sqrt{r(f_1 g_1 h_1 j_1)}\cdot e^{-2\pi i \nu (f_1 g_1 h_1 j_1) t}\cdot c_{k'l'm',\, r(f_1 g_1 h_1 j_1)-1}\Big] \\
&-\frac{2\pi i}{h} \sum_{k'l'm',\, q(f_2 g_2 h_2 j_2),\, r(f_2 g_2 h_2 j_2)} J_{klm,\, k'l'm',\, j_2} \\
&\cdot \left(\frac{h}{8\pi^2 M \nu (f_2 g_2 h_2 j_2)}\right)^{1/2} \cdot e^{\frac{2\pi i t}{h}(E_{klm} - E_{k'l'm'})} \\
&\Big[\sqrt{q(f_2 g_2 h_2 j_2)+1}\cdot e^{2\pi i \nu (f_2 g_2 h_2 j_2) t}\cdot c_{k'l'm',\, q(f_2 g_2 h_2 j_2)+1} \\
&+\sqrt{q(f_2 g_2 h_2 j_2)}\cdot e^{-2\pi i \nu (f_2 g_2 h_2 j_2) t}\cdot c_{k'l'm',\, q(f_2 g_2 h_2 j_2)-1} \\
&- i\sqrt{r(f_2 g_2 h_2 j_2)+1}\cdot e^{2\pi i \nu (f_2 g_2 h_2 j_2) t}\cdot c_{k'l'm',\, r(f_2 g_2 h_2 j_2)+1} \\
&- i\sqrt{r(f_2 g_2 h_2 j_2)}\cdot e^{-2\pi i \nu (f_2 g_2 h_2 j_2) t}\cdot c_{k'l'm',\, r(f_2 g_2 h_2 j_2)-1}\Big],
\end{aligned}
\tag{61}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
k' &= k + f_1, \quad & l' &= l + g_1, \quad & m' &= m + h_1, \\
k' &= k - f_2, \quad & l' &= l - g_2, \quad & m' &= m - h_2.
\end{aligned}
$$

Während wir in § 4 die Veränderung der Größen c_{klm} einfach dadurch untersuchten, daß wir nach ihren Ableitungen zu einer bestimmten Zeit $t = 0$ fragten, entspricht dieses Vorgehen hier nicht der physikalischen Sachlage. Während dort nämlich als Störungsenergie die Arbeit betrachtet werden mußte, die das Feld beim Durchlaufen unseres Grund-

* Ein völlig entsprechendes Resultat hätte man auch nach der Theorie von Houston, l. c., gefunden, wenn man dort statt der Debyeschen die Wallersche Formel für die Wärmestreustrahlung verwendet hätte. — Übrigens hat J. Frenkel, ZS. f. Phys. **49**, 885, 1928, eine Interferenzbedingung nach der Brillouinschen Theorie hergeleitet und wie wir für den Widerstand bei tiefen Temperaturen Proportionalität mit T^3 gefunden. Von der Nullpunktsbewegung der Atome und der strengen Verwendung des Pauliprinzips bei den Übergangsprozessen, die bei uns für das T^3-Gesetz wesentlich sind, wird indessen dort abgesehen.

parallelepipedes an einem Elektron leistet, und diese bei hinreichend großer Wahl des Gitters beliebig groß werden konnte, ist hier, wo es sich nur um kleine periodische Störungen des Gitters handelt, die Störungsenergie als klein gegen die Energiedifferenzen der ungestörten Bewegung aufzufassen. Aus demselben Grunde brauchen wir auch nicht von einem Wellenpaket auszugehen, sondern können direkt die Übergangsprozesse aus einem scharf definierten Ausgangszustand untersuchen. Infolgedessen verwenden wir die von Dirac* eingeführte Methode zur Behandlung kleiner Störungen.

Wir berechnen zunächst aus (57) die c_{klm} in erster Näherung, indem wir rechts einfach ihre Werte zur Zeit $t = 0$ als Konstante einsetzen. Dabei wollen wir annehmen, wir wüßten mit Sicherheit, daß sich für $t = 0$ das Elektron im Zustand $k' l' m'$, das Gitter im Zustand $q'(f g h j)$, $r'(f g h j)$ befindet, d. h. wir setzen

$$c_{k' l' m',\ q'(f g h j),\ r'(f g h j)} = 1,$$

alle übrigen gleich Null.

Dann wird aus (61) mit der Interferenzbedingung (60a)

$$c(t)_{k'-f_1,\ l'-g_1,\ m'-h_1,\ q'(f_1 g_1 h_1 j_1) \pm 1} = -J_{klm,\ k' l' m',\ j_1} \cdot \left(\frac{h}{8\pi^2 M \nu (f_1 g_1 h_1 j_1)}\right)^{1/2} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{e^{\frac{2\pi i}{h}[E_{klm} - E_{k' l' m'} - h\nu(f_1 g_1 h_1 j_1)]t} - 1}{E_{klm} - E_{k' l' m'} - h\nu(f_1 g_1 h_1 j_1)} \sqrt{q'(f_1 g_1 h_1 j_1) + 1} \\ \dfrac{e^{\frac{2\pi i}{h}[E_{klm} - E_{k' l' m'} + h\nu(f_1 g_1 h_1 j_1)]t} - 1}{E_{klm} - E_{k' l' m'} + h\nu(f_1 g_1 h_1 j_1)} \sqrt{q'(f_1 g_1 h_1 j_1)} \end{array} \right.$$

und die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t das Gesamtsystem im Zustand klm, $q(f g h j)$ anzutreffen, beträgt

$$|c_{klm,\ q(f g h j)}|^2 = 2\,|J_{klm,\ k' l' m',\ j_1}|^2 \frac{h}{8\pi^2 M \nu (f_1 g_1 h_1 j_1)} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1 - \cos\frac{2\pi t}{h}[E_{klm} - E_{k' l' m'} + h\nu(f_1 g_1 h_1 j_1)]}{[E_{klm} - E_{k' l' m'} + h\nu(f_1 g_1 h_1 j_1)]^2} (q(f_1 g_1 h_1 j_1) + 1) \\ \dfrac{1 - \cos\frac{2\pi t}{h}[E_{klm} - E_{k' l' m'} - h\nu(f_1 g_1 h_1 j_1)]}{[E_{klm} - E_{k' l' m'} - h\nu(f_1 g_1 h_1 j_1)]^2} q(f_1 g_1 h_1 j_1). \end{array} \right\} \quad (62)$$

* P. A. M. Dirac, l. c.

Vollkommen Entsprechendes gilt, wenn sich statt der Quantenzahl q die Quantenzahl r ändert und wenn statt der Interferenzbedingung (60a) die Bedingung (60b) erfüllt ist. Aus den rechtsstehenden Ausdrücken erhält man nach Dirac die Übergangswahrscheinlichkeit vom „gestrichenen" nach dem „ungestrichenen" Zustand, indem man über ein schmales Energieintervall integriert und nach der Zeit differenziert.

Vor allem werden also diejenigen c_{klmq} anwachsen, bei denen einer der beiden Nenner in (62) sehr klein wird, d. h. bei denen mit großer Annäherung

$$E_{klm} - E_{k'l'm'} = \pm h\nu\,(f_1 g_1 h_1 j_1) \tag{62a}$$

gilt.

Die wesentlichen Streuprozesse sind also nicht etwa „elastische Stöße" der Elektronen, sondern Stöße, die von einem zwar geringen, aber ganz bestimmten Energieaustausch mit dem Gitter begleitet sind.

Es erscheint zunächst nicht möglich, unser Modell ohne große rechnerische Schwierigkeiten in der bisherigen Allgemeinheit weiter zu behandeln. Da wir aber nur zeigen wollen, daß die elektrische Leitfähigkeit nach Größenordnung und qualitativer Temperaturabhängigkeit unseren Vorstellungen entspricht, machen wir die folgenden vereinfachenden Annahmen:

Wir wählen unser Kristallstück so, daß $G_1 = G_2 = G_3 = G$ und es sei $a = b = c$ (63a)

Das Elektronengas sei vollständig entartet, d. h. nach § 3: $T \ll T_0$. (63b)

Für die Energie gelte $E_{klm} = \omega\left[\left(\frac{2\pi k}{G}\right)^2 + \left(\frac{2\pi l}{G}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{G}\right)^2\right]$. (63c)

Der Impuls in der x-Richtung sei $\tau \cdot \frac{2\pi k}{G}$. (63d)

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen und der transversalen Wellen sei $v_1 = v_2 = v_3 = v$. (63e)

(63c) entspricht der in § 3 für das entartete Gas gemachten Annahme, wenn $\omega = 2\beta c$ gesetzt wird. (63e) ist für normale Kristalle nahezu erfüllt.

Zunächst betrachten wir die in (62) auftretende Größe $|J_{klm,\,k'l'm',\,j_1}|^2$. Nach (60) ist mit der Abkürzung $(\text{grad } V,\ u_{f^* g^* h^* j^*}) = \dfrac{\partial V}{\partial s}$

$$2\,J_{klm,\,k'l'm',\,j} = \int \frac{\partial V}{\partial s}\, u_{klm}\, \overline{u_{k'l'm'}}\, dx\, dy\, dz.$$

Da der Integrand im Integrationsgebiet periodisch ist, folgt durch partielle Integration

$$2 J_{klm,\, k'l'm',\, j} = -\int V \frac{\partial}{\partial s}(u_{klm}\,\overline{u_{k'l'm'}})\,dx\,dy\,dz.$$

Setzt man in (1) den Ausdruck (6a) für die ψ_{klm} ein, so folgt, wenn wir den Vektor mit den Komponenten $\frac{k}{K}, \frac{l}{L}, \frac{m}{M}$: $\mathfrak{k}$ nennen, für die u_{klm} die Differentialgleichung

$$\Delta u_{klm} + 2\pi i\,(\mathfrak{k}, \operatorname{grad} u_{klm}) + \mu\left(E_{klm} - \frac{4\pi^2}{\mu}\mathfrak{k}^2 - V\right)u_{klm} = 0$$

$$\Delta \overline{u_{k'l'm'}} - 2\pi i\,(\mathfrak{k}', \operatorname{grad} \overline{u_{k'l'm'}}) + \mu\left(E_{k'l'm'} - \frac{4\pi^2}{\mu}\mathfrak{k}'^2 - V\right)\overline{u_{k'l'm'}} = 0$$

Multipliziert man die obere Gleichung mit $\frac{\partial\,\overline{u_{k'l'm'}}}{\partial s}$, die untere mit $\frac{\partial u_{klm}}{\partial s}$ und addiert sie, so folgt durch partielle Integration

$$\mu\int V\frac{\partial}{\partial s}(u_{klm}\,\overline{u_{k'l'm'}})\,dx\,dy\,dz = 2\pi i\left(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}', \int \operatorname{grad} u_{klm}\frac{\partial\,\overline{u_{k'l'm'}}}{\partial s}\,dx\,dy\,dz\right) + \mu\left[E_{klm} - E_{k'l'm'} - \frac{4\pi^2}{\mu}(\mathfrak{k}^2-\mathfrak{k}'^2)\right]\cdot\int u_{klm}\frac{\partial\,\overline{u_{k'l'm'}}}{\partial s}\,dx\,dy\,dz.$$

Dies verschwindet für

$$k = k', \qquad l = l', \qquad m = m'.$$

Da im folgenden nur solche Übergänge betrachtet werden, bei denen sich die Energie der Elektronen wenig ändert [und zufolge der Annahme (63c)], ist der zweite Summand auf der rechten Seite neben dem ersten zu vernachlässigen. Um etwas über den ersten zu erfahren, wollen wir von der Funktion u_{klm} annehmen, daß sie, ähnlich wie in § 2, in einem Elementarparallelepiped die Form

$$u_{klm} = \varphi$$

hat, wo φ die Eigenfunktion des isolierten Atoms sein möge, die kugelsymmetrisch gedacht ist. Dann folgt mit der Bezeichnung

$$\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 dx\,dy\,dz = \int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 dx\,dy\,dz = \int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 dx\,dy\,dz = C \tag{64}$$

$$J_{klm,\, k'l'm',\, 1} = -\frac{\pi i}{\mu}|\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'|\cdot C \tag{64a}$$

für longitudinale,

$$J_{klm,\ k'l'm',\ 2,\ 3} = 0$$

für transversale Wellen.

Es handelt sich nun darum, die Zahl der infolge der Wechselwirkung mit dem Gitter pro Zeiteinheit aus dem Zustand klm austretenden Elektronen zu berechnen. Damit statistisches Gleichgewicht herrscht, werden wir fordern müssen, daß sie gleich groß ist, wie die der dank der Beschleunigung durch das Feld eintretenden Elektronen.

Als Vorbereitung hierzu wollen wir zunächst zeigen, daß, wenn kein Feld vorliegt, statistisches Gleichgewicht herrscht, wenn die Elektronen nach der Fermischen Funktion

$$f_0(E_{klm}) = \frac{1}{\frac{1}{A} e^{\frac{E_{klm}}{kT}} + 1} \tag{65}$$

verteilt sind und für die Oszillatoren als nicht entartete Systeme die Zustandswahrscheinlichkeit durch die klassische Funktion

$$g(q_{fghj}) = \text{const}\, e^{-\frac{E_{q(fghj)}}{kT}} \tag{66}$$

gegeben ist. Da die Elektronen nur dann von klm nach $k'l'm'$ übergehen können, wenn der letztere Zustand noch unbesetzt ist und die Wahrscheinlichkeit hierfür $1 - f(k'l'm')$ beträgt, ist die Zahl der pro Zeiteinheit stattfindenden Prozesse, bei denen ein Elektron vom Zustand mit der Energie E nach einem mit der Energie E'', und entsprechend ein Oszillator von einem Zustand mit Energie E' nach einem mit der Energie E übergeht, proportional

$$e^{-\frac{E''}{kT}} \cdot f_0(E)\,[1 - f_0(E')] \cdot B^E_{E'}, \tag{67}$$

wenn $B^E_{E'}$ die Übergangswahrscheinlichkeit für einen solchen Prozeß angibt. Analog ist die Zahl der inversen proportional

$$e^{-\frac{E}{kT}} \cdot f_0(E')\,[1 - f_0(E)] \cdot B^{E'}_{E}. \tag{68}$$

Statistisches Gleichgewicht fordert die Gleichheit von (67) und (68), d. h.

$$e^{-\frac{E'}{kT}} \frac{1 - f_0(E'')}{f_0(E')} B^E_{E'} = e^{-\frac{E}{kT}} \frac{1 - f_0(E)}{f_0(E)} B^{E'}_{E}.$$

Da im Grenzfall $T \to \infty$ $f(E)$ in das klassische $e^{-\frac{E}{kT}}$ übergehen muß, folgt $B^{E}_{E'} = B^{E'}_{E}$ und mithin

$$e^{-\frac{E'}{kT}} \frac{1 - f_0(E')}{f_0(E')} = e^{-\frac{E}{kT}} \frac{1 - f_0(E)}{f_0(E)} = \frac{1}{A(T)}, \tag{69}$$

wo $A(T)$ nur noch von der Temperatur allein abhängt. Hieraus folgt für $f_0(E)$ unmittelbar die Formel (65), die sich somit als nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ergibt für das statistische Gleichgewicht zwischen einem der Fermischen und einem der klassischen Statistik genügenden System. Wie bei Lorentz und Sommerfeld, nehmen wir nun an, daß die sich unter dem Einfluß des Feldes einstellende stationäre Verteilung nur wenig von der durch (65) gegebenen Verteilung f_0 verschieden ist. Man wird also für $f(\xi\,\eta\,\zeta)$ eine Reihenentwicklung ansetzen, und zwar wählen wir sie in der Form

$$f(\xi\,\eta\,\zeta) = f_0(\xi\,\eta\,\zeta) + \xi\,\chi(\varrho), \tag{70}$$

indem wir schon nach dem ersten Gliede abbrechen.

χ ist eine kleine Funktion von $\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ allein, deren Form wir eben durch die Stationäritätsbedingung ermitteln wollen.

Wir fragen nun nach der Zahl der pro Zeiteinheit aus dem Zustand $k\,l\,m$ austretenden Elektronen, wenn ihre Verteilungsfunktion durch (70) gegeben ist. Dabei beschränken wir uns auf die durch (62) gegebenen Wechselwirkungsprozesse mit den a-Oszillatoren, da die Rechnung für die b-Oszillatoren genau dieselbe bleibt.

Sei nun $B^{k\,l\,m\,q\,(f^*\,g^*\,h^*\,j^*)}_{k'\,l'\,m'\,q'\,(f^*\,g^*\,h^*\,j^*)}$ die Übergangswahrscheinlichkeit für einen Elektronenübergang $k\,l\,m \to k'\,l'\,m'$, bei dem gleichzeitig einer der durch die Zahlen

$$f^* = \pm (k - k'), \quad g^* = \pm (l - l'), \quad h^* = \pm (m - m') \tag{71}$$

bezeichneten Oszillatoren von $q\,(f^*\,g^*\,h^*\,j^*)$ nach $q'\,(f^*\,g^*\,h^*\,j^*)$ übergeht. Dann ist offenbar die Zahl der pro Zeiteinheit aus $k\,l\,m$ insgesamt austretenden Elektronen gegeben durch

$$\sum_{k'\,l'\,m'\,q'} \sum_{q} B^{k\,l\,m\,q}_{k'\,l'\,m'\,q'}\, g(q) \cdot f(k\,l\,m)\,[1 - f(k'\,l'\,m')],$$

die der eintretenden durch

$$\sum_{k'\,l'\,m'\,q'} \sum_{q} B^{k'\,l'\,m'\,q'}_{k\,l\,m\,q}\, g(q') \cdot f(k'\,l'\,m')\,[1 - f(k\,l\,m)]$$

und ihre Differenz, unter Verwendung von $B^{k\,l\,m\,q}_{k'\,l'\,m'\,q'} = B^{k'\,l'\,m'\,q'}_{k\,l\,m\,q}$

$$n_a = \sum_{k'\,l'\,m'\,q'} \sum_{q} B^{k\,l\,m\,q}_{k'\,l'\,m'\,q'} \{g(q) f(k\,l\,m)\,[1 - f(k'\,l'\,m')] - g(q') f(k'\,l'\,m')\,[1 - f(k\,l\,m)]\}. \tag{72}$$

Nach (66) und (54) ist

$$g(q_{fghj}) = \text{const}\, e^{-\frac{(q_{fghj}+1/2)h\nu_{fghj}}{kT}}$$

Da

$$\sum_{q=0}^{\infty} g(q) = 1$$

sein muß, folgt

$$g(q_{fghj}) = e^{-\frac{q_{fghj}\cdot h\nu_{fghj}}{kT}}\left(1 - e^{-\frac{h\nu_{fghj}}{kT}}\right). \tag{73}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten $B^{klmq}_{k'l'm'q'}$ sind gegeben durch (62). Wir benutzen folgende Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\ \frac{2\pi k}{G} = \xi, \quad \frac{2\pi l}{G} = \eta, \quad \frac{2\pi m}{G} = \zeta,\\
&\quad\ \frac{2\pi k'}{G} = \xi', \quad \frac{2\pi l'}{G} = \eta', \quad \frac{2\pi m'}{G} = \zeta',\\
&\text{b)}\ \frac{2\pi(k-k')}{G} = X, \quad \frac{2\pi(l-l')}{G} = Y, \quad \frac{2\pi(m-m')}{G} = Z,\\
&\text{c)}\ \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = \varrho, \ \sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2} = \varrho', \ \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = R,\\
&\text{d)}\ \frac{1}{x^2}\left(1-\cos\frac{2\pi t}{h}x\right) = \mathfrak{Q}(x),\\
&\text{nach (71):}\\
&\text{e)}\ q(f^*g^*h^*j^*) = q[\pm(k-k'), \pm(l-l'), \pm(m-m'), j^*]\\
&\qquad\qquad = q(X, Y, Z, j^*)\\
&\qquad\quad \nu(f^*g^*h^*j^*) = \nu(X, Y, Z, j^*)\\
&\text{f)}\ E_{klm} = E, \quad E_{k'l'm'} = E'.
\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Dann wird aus (72) unter Berücksichtigung von (62)

$$n_a = \frac{d}{dt}\frac{G^3}{8\pi^3}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\iiint d\xi'\, d\eta'\, d\zeta' \sum_{j=1}^{3} 2\,|J_{klm,\,k'l'm',\,j^*}|^2 \cdot \frac{h}{8\pi^2 M\nu\ (XYZj)}$$

$$\cdot \sum_{q(XYZj)=0}^{\infty} g[q(XYZj)]$$

$$\cdot \Big\{ f(\xi\,\eta\,\zeta)[1 - f(\xi'\,\eta'\,\zeta')]\Big[q(XYZj)\,\mathfrak{Q}[E - E' + h\nu(XYZj)]$$
$$+ [q(XYZj)+1]\,.\,\mathfrak{Q}[E - E' - h\nu(XYZj)]\Big]$$
$$- f(\xi'\,\eta'\,\zeta')[1 - f(\xi\,\eta\,\zeta)]\Big[q(XYZj)\,\mathfrak{Q}[E - E' - h\nu(XYZj)]$$
$$+ [q(XYZj)+1]\,.\,\mathfrak{Q}[E - E' + h\nu(XYZj)]\Big]\Big\}.$$

Wir führen an Stelle der Variabeln $\xi' \eta' \zeta'$ die durch (74b) definierten XYZ ein, und verwenden im XYZ-Raum Polarkoordinaten R, ϑ, φ,

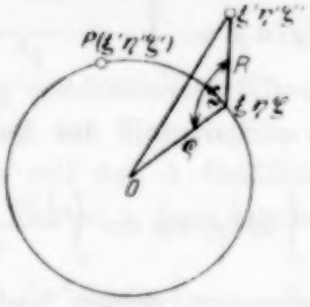


Fig. 1.

indem wir aber statt der Größe R von (74c) die ihr nach (52a) proportionale

$$\nu(XYZj^*) = \frac{v_{j^*}}{2\pi a} R$$

einführen (Fig. 1). Die Ebene $\varphi = 0$ verlaufe parallel der ξ-Achse. $f(\xi' \eta' \zeta')$ hängt dann bei festem ξ, η, ζ nur von ν, ϑ, φ ab. Wir schreiben daher $f(\xi' \eta' \zeta') = f(\nu\, \vartheta\, \varphi)$. Bedenken wir, daß nach (64a)

$$|J_{klm,\, k'l'm',\, 1}|^2 = \frac{C^2}{4\mu^2 a^2} R^2 = \frac{\pi^2 C^2}{\mu^2 v^2} \nu^2 (XYZ,\, 1),$$

so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} n_a = \frac{'G^3}{8\pi^3} \frac{2\pi^2 C^2}{\mu^2 v^2} \frac{h}{8\pi^2 M} \cdot \left(\frac{2\pi a}{v}\right)^3 \frac{d}{dt} \iiint \nu^3 \sin\vartheta\, d\nu\, d\vartheta\, d\varphi \\ \cdot \sum_{q(\nu\vartheta\varphi)=0}^{\infty} g\,[q\,(\nu\,\vartheta\,\varphi)] \\ \{ f(\xi\,\eta\,\zeta)\,[1 - f(\nu\,\vartheta\,\varphi)]\,[q\,(\nu\,\vartheta\,\varphi)\,\Omega\,(E - E' + h\nu) \\ + [q\,(\nu\,\vartheta\,\varphi) + 1]\,\Omega\,(E - E' - h\nu)] \\ - f(\nu\,\vartheta\,\varphi)\,[1 - f(\xi\,\eta\,\zeta)]\,[q\,(\nu\,\vartheta\,\varphi)\,\Omega\,(E - E' - h\nu) \\ + [q\,(\nu\,\vartheta\,\varphi) + 1]\,\Omega\,(E - E' + h\nu)]\} \cdot \end{aligned}\right\} \quad (75)$$

Nun ist nach (63c) $E = \omega \varrho^2$, mithin (vgl. Fig. 1)

$$E - E' = \omega\,(R^2 - 2\,\varrho\, R \cos\vartheta).$$

Führen wir an Stelle von ϑ:

$$y = E - E' \pm h\nu = \omega \left(\frac{4\pi^2 a^2}{v^2} \nu^2 - 2\,\varrho\, \frac{2\pi a}{v} \nu \cos\vartheta\right) \pm h\nu$$

ein, so ist

$$\nu \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{v}{4\pi\, \varrho\, a\, \omega}\, dy$$

und wir erhalten in (75) bei der Integration über ϑ Ausdrücke der Form

$$\int \Omega(y)\,dy = \int \frac{1-\cos\frac{2\pi t}{h}y}{y^2}\,dy.$$

Ist t hinreichend groß, so darf mit der Bezeichnung $x = \frac{2\pi t}{h}y$ das Integral

$$\frac{h}{2\pi t}\int \Omega(y)\,dy = \int \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$$

von $-\infty$ bis $+\infty$ genommen werden und liefert einen wesentlichen Beitrag nur in der Umgebung der Stelle

$$y = 0, \quad \text{d. h. } E - E' = \pm h\nu.$$

Man erhält mithin

$$\int \Omega(y)\,dy = \frac{2\pi^2 t}{h}.$$

Also wird aus (75)

$$\begin{aligned} n_a = \frac{(aG)^3}{M}\,\frac{\pi C^2}{8\varrho a\omega\nu^4\mu^2}\iint \nu^2\,d\nu\,d\varphi \sum_{q(\nu\vartheta\varphi)=0}^{\infty} g\,[q(\nu\vartheta\varphi)] \\ \{f(\xi\eta\zeta)\,[1-f(\nu\vartheta\varphi)_{E'=E+h\nu}]\,q(\nu\vartheta\varphi) \\ + f(\xi\eta\zeta)\,[1-f(\nu\vartheta\varphi)_{E'=E-h\nu}]\,[q(\nu\vartheta\varphi)+1] \\ - f(\nu\vartheta\varphi)_{E'=E-h\nu}\,[1-f(\xi\eta\zeta)]\,q(\nu\vartheta\varphi) \\ - f(\nu\vartheta\varphi)_{E'=E+h\nu}\,[1-f(\xi\eta\zeta)]\,[q(\nu\vartheta\varphi)+1]\}\end{aligned}$$

Setzen wir hier für f und g die Ausdrücke (70) und (73) ein, so wird

$$\begin{aligned} n_a = \frac{(aG)^3}{M}\,\frac{\pi C^2}{8\varrho a\omega\nu^4\mu^2}\iint \nu^2\,d\nu\,d\varphi\cdot\sum_{q(\nu)=1}^{\infty} q(\nu)\,.\,e^{-\frac{q h\nu}{kT}}\left(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) \\ \Big\{[f_0(E)+\xi\chi(E)]\,[1-f_0(E+h\nu)-\xi'\chi(E+h\nu)] \\ + [f_0(E)+\xi\chi(E)]\,[1-f_0(E-h\nu)-\xi'\chi(E-h\nu)]\,e^{\frac{h\nu}{kT}} \\ - [f_0(E-h\nu)+\xi'\chi(E-h\nu)]\,[1-f_0(E)-\xi\chi(E)] \\ - [f_0(E+h\nu)+\xi'\chi(E+h\nu)]\,[1-f_0(E)-\xi\chi(E)]\,.\,e^{\frac{h\nu}{kT}}\Big\}.\end{aligned}$$

Die χ-freien Glieder verschwinden, z. B. wird

$$f_0(E)\,[1-f_0(E+h\nu)] - e^{\frac{h\nu}{kT}}\,.\,f_0(E+h\nu)\,[1-f_0(E)] = 0$$

oder

$$e^{\frac{h\nu}{kT}}\,\frac{1-f_0(E)}{f_0(E)} = \frac{1-f_0(E+h\nu)}{f_0(E+h\nu)} = \frac{e^{\frac{E+h\nu}{kT}}}{A}$$

nach (69). Ferner ist

$$\sum_{q(\nu)=1}^{\infty} q(\nu) \cdot e^{-\frac{q h\nu}{kT}} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Vernachlässigt man die in χ quadratischen Glieder, so bleibt schließlich unter nochmaliger Benutzung der Formel (69) und, wenn man bedenkt, daß durch Wechselwirkung mit den b-Oszillatoren derselbe Ausdruck nochmals auftritt, d. h. ein Faktor 2 dazu kommt

$$\left.\begin{aligned} n_a = \frac{(a G)^3}{M} \frac{2\pi C^2}{8 \varrho a \omega v^4 \mu^2} \int\int \frac{\nu^2 d\nu d\varphi}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \Bigg\{ \xi \chi(E) \frac{f_0(E + h\nu) \cdot e^{\frac{h\nu}{kT}} + f_0(E - h\nu)}{f_0(E)} \\ - \xi' \left[\chi(E + h\nu) \frac{f_0(E)}{f_0(E + h\nu)} + \chi(E - h\nu) \frac{f_0(E) \cdot e^{\frac{h\nu}{kT}}}{f_0(E - h\nu)} \right] \Bigg\}. \end{aligned}\right\} \quad (76)$$

Nun soll bei Anwesenheit eines Feldes statistisches Gleichgewicht herrschen, d. h. nach (50) und (74c) hat zu gelten

$$n_a = -\frac{2\pi e F a}{h} \frac{\partial f_0}{\partial \xi} = -\frac{2\pi e F a}{h} \frac{\partial f_0}{\partial \varrho} \frac{\xi}{\varrho}.$$

Wie in der Theorie der spezifischen Wärme fester Körper brechen wir das elastische Spektrum bei einer Grenzfrequenz ν_g ab, die gegeben ist durch $\frac{h\nu_g}{k\Theta} = 1$, wo Θ die charakteristische Temperatur des Körpers bedeutet.

Führen wir in (76) $x = \frac{h\nu}{kT}$ als neue Integrationsvariable ein, so wird

$$\left.\begin{aligned} n_a = \frac{G^3}{M} \cdot \frac{2\pi C^2}{8 \varrho a \omega v \mu^2} \left(\frac{a k \Theta}{h v}\right)^3 \cdot \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 \\ \cdot \int_{x=0}^{\Theta/T} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{x^2 dx d\varphi}{e^x - 1} \Bigg\{ \xi \chi(E) \frac{f_0(E + kTx) \cdot e^x + f_0(E - kTx)}{f_0(E)} \\ - \xi' \left[\chi(E + kTx) \frac{f_0(E)}{f_0(E + kTx)} + \chi(E - kTx) \frac{f_0(E) \cdot e^x}{f_0(E - kTx)} \right] \Bigg\} \\ = -\frac{2\pi e F a}{h} \frac{\partial f_0}{\partial \varrho} \frac{\xi}{\varrho}. \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

Da die Punkte $\xi' \eta' \zeta'$ [vgl. den Punkt P $(\xi' \eta' \zeta')$ von Fig. 1] im wesentlichen auf einer Kugel um O mit dem Radius ϱ liegen, gilt

$$\xi' = \xi - X = \xi - \frac{\xi R^2}{2\varrho^2} - R \cos\varphi \sqrt{1 - \left(\frac{R}{2\varrho}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^2},$$

und es ist $$R^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{v^2} v^2 = 4\pi^2 \left(\frac{a k \Theta}{h v}\right)^2 \left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 x^2.$$

Setzt man dies in (77) ein, so verschwindet bei der Integration über φ das Glied mit $\cos\varphi$ und es bleibt nach beidseitiger Division durch $\frac{2\pi\xi}{\varrho}$

$$\frac{G^3}{M} \frac{2\pi C^2}{8 a \omega v \mu^2} \left(\frac{a k \Theta}{h v}\right)^3 \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 \int_0^{\Theta/T} \Big\{ \chi(E) \frac{f_0(E + kTx) e^x + f_0(E - kTx)}{f_0(E)}$$

$$- \chi(E + kTx) \frac{f_0(E)}{f_0(E + kTx)} - \chi(E - kTx) \frac{f_0(E) e^x}{f_0(E - kTx)} \Big\} \frac{x^2 dx}{e^x - 1}$$

$$+ \frac{1}{2\varrho^2} \frac{G^3}{M} \frac{8\pi^3 C^2}{8 a \omega v \mu^2} \left(\frac{a k \Theta}{h v}\right)^5 \left(\frac{T}{\Theta}\right)^5 \int_0^{\Theta/T} \Big\{ \chi(E + kTx) \frac{f_0(E)}{f_0(E + kTx)}$$

$$+ \chi(E - kTx) \frac{f_0(E) e^x}{f_0(E - kTx)} \Big\} \frac{x^4 dx}{e^x - 1}$$

$$= - \frac{eFa}{h} \frac{\partial f_0}{\partial \varrho} = - \frac{eFa}{h} \frac{\partial f_0}{\partial E} 2\omega\varrho. \tag{78}$$

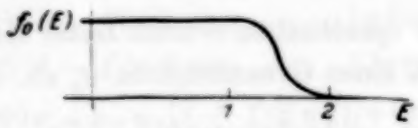


Fig. 2.

Ist das Elektronengas vollkommen entartet, so hat man in (65) zu setzen

$$A = e^{\frac{\omega\varrho_0^2}{kT}},$$

wobei, wie in § 2

$$\varrho_0 = \sqrt[3]{6\pi^2 \varkappa}$$

und $\omega\varrho_0^2$ diejenige Energie ist, in deren Umgebung (vgl. das Intervall 1—2 von Fig. 2) sich der Abfall von $f_0(E)$ vollzieht. Führen wir an Stelle von E die dimensionslose Größe

$$\varepsilon = \frac{E - \omega\varrho_0^2}{kT} \tag{79}$$

ein, so wird also

$$f_0(E) = f_0(\varepsilon) = \frac{1}{e^\varepsilon + 1} \tag{79a}$$

und

$$- \frac{\partial f_0}{\partial E} = - \frac{1}{kT} \frac{df_0}{d\varepsilon} = \frac{1}{kT} \frac{1}{(e^\varepsilon + 1)(e^{-\varepsilon} + 1)} \tag{79b}$$

wird nur in der Umgebung der Stelle $\varepsilon = 0$ merklich von Null verschieden sein. Dann darf man die in (78) auftretende Größe ϱ durch ϱ_0 ersetzen. An Stelle der gesuchten Funktion $\chi(E) = \chi(\varepsilon)$ führen wir nun eine neue ein:

$$c(\varepsilon) = kT(e^{\varepsilon} + 1)(e^{-\varepsilon} + 1)\chi(\varepsilon) = \frac{\chi(E)}{-\frac{\partial f_0}{\partial E}}. \tag{80}$$

Verwenden wir ferner noch die Abkürzungen

$$P = \frac{eFa}{h}\frac{M}{G^3}\frac{16\,a\,\omega^2\varrho_0 v\mu^2}{2\pi C^2}\left(\frac{hv}{ak\Theta}\right)^3; \quad Q = \frac{4\pi^2}{2\varrho_0^2}\left(\frac{ak\Theta}{hv}\right)^2, \tag{81}$$

so wird aus (78) unter Benutzung von (79a, b)

$$\int_0^{\Theta/T}\left\{\frac{e^{\varepsilon}+1}{e^{\varepsilon}+e^{-x}}\left[c(\varepsilon) - \left(1 - Q\left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 x^2\right)c(\varepsilon + x)\right]\right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\varepsilon}+1}{e^{-\varepsilon}+e^{-x}}\left[c(\varepsilon) - \left(1 - Q\left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 x^2\right)c(\varepsilon - x)\right]\right\}\frac{x^2\,dx}{e^x - 1} = P\left(\frac{\Theta}{T}\right)^3. \tag{82}$$

Da das Elektron nicht mehr Energie abgeben kann, als ihr ursprünglicher Wert E beträgt, darf strenggenommen im letzten Term die Integration nur bis zur Stelle $kTx = E$ erstreckt werden. Da uns aber, wie wir unten zeigen werden, der Wert der Funktion $c(\varepsilon)$ ohnedies nur in der Nähe der kritischen Stelle interessiert, d. h. wo $E = \omega\varrho_0^2$ und da $k\Theta < \omega\varrho_0^2$, bleibt die Integrationsgrenze $\frac{\Theta}{T}$ zu Recht bestehen.

Wir wollen nun den Temperaturverlauf der Leitfähigkeit für die beiden folgenden Fälle getrennt betrachten:

1. $T \gg \Theta$. Hier werden wir für $\chi(E)$ dasselbe Resultat erwarten, das Lorentz (l. c.) nach der klassischen Statistik gefunden hat, nämlich

$$\chi(E) = -c\frac{\partial f_0}{\partial E},$$

wobei nach (79b) und (80)

$$c(\varepsilon) = c = \text{const.}$$

Der wesentliche Unterschied in unserer Rechnung gegenüber der klassischen liegt nämlich in dem dem Pauliverbot Genüge leistenden Stoßzahlansatz. Dies äußert sich in (72) in dem in der Klammer auftretenden Ausdruck, wo man nach der klassischen Rechnung einfach

$$g(q)\,[f(klm) - f(k'l'm')]$$

erhalten würde. Nun sind aber für $T \gg \Theta$ sämtliche Eigenschwingungen stark angeregt, d. h. ihre Quantenzahlen $q \gg 1$, so daß man $q' = q \pm 1$ durch q ersetzen darf. Setzt man aber in (72)

$$g(q) = g(q'),$$

so erhält man eben wieder das klassische Resultat *.

Tatsächlich befriedigt der Ansatz

$$c(\varepsilon) = c$$

die Gleichung (82). Da $\frac{\Theta}{T} \ll 1$ und mithin $x \ll 1$ darf man nämlich setzen

$$Q\left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 \int_0^{\Theta/T} \left\{ \frac{e^{\varepsilon}+1}{e^{\varepsilon}+e^{-x}} c(\varepsilon+x) + \frac{e^{-\varepsilon}+1}{e^{-\varepsilon}+e^{-x}} c(\varepsilon-x) \right\} \frac{x^4\,dx}{e^x-1}$$

$$= 2c\,Q\left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 \int_0^{\Theta/T} x^3\,dx = \frac{c}{2} Q \left(\frac{\Theta}{T}\right)^2 = P\left(\frac{\Theta}{T}\right)^3.$$

Also nach (80)

$$\chi(E) = -c\frac{\partial f_0}{\partial E} = -\frac{2P}{Q}\frac{\Theta}{T}\frac{\partial f_0}{\partial E} = -\frac{2P}{2\omega\varrho Q}\frac{\Theta}{T}\frac{\partial f_0}{\partial \varrho}.$$

Ersetzt man nicht schon in (78) ϱ durch ϱ_0, wie dies hier zur Vereinfachung von (82) geschehen ist, so hat man in den Ausdrücken (81) für P und Q statt ϱ_0: ϱ zu schreiben (was freilich für die Berechnung der Leitfähigkeit ohne Belang ist) und erhält

$$\chi(\varrho) = -\frac{4Fe M a^2 \varrho^2 \omega v \mu^2}{G^3 \pi^3 C^2 h} \left(\frac{hv}{ak\Theta}\right)^5 \frac{\partial f_0}{\partial \varrho}\frac{\Theta}{T}. \tag{83}$$

Da nach (63 d) der Impuls in der x-Richtung beim Zustand $\xi\,\eta\,\zeta : \tau\,\xi$ beträgt, ist der Strom pro cm³, der bei der stationären Verteilung (70) besteht, gegeben durch

$$J = \frac{2e}{mV} \iiint \tau\,\xi^2\,\chi(\varrho)\,\frac{G^3}{8\pi^3}\,d\xi\,d\eta\,d\xi. \tag{84}$$

Der von $f_0(\xi\,\eta\,\zeta)$ herrührende Strom verschwindet und der Faktor 2 in (84) rührt davon her, daß wegen des Spins das statistische Gewicht jedes

* L. W. Nordheim, Proc. Roy. Soc. **119**, 689, 1928, hat auf die Rechtfertigung der den klassischen Ausdruck zugrunde legenden Rechnungen von Sommerfeld und Houston hingewiesen, sofern die Elektronen elastisch am Gitter reflektiert werden. Dann hätte man tatsächlich immer $g(q) = g(q')$ zu setzen. Bei uns ist dies jedoch nicht erlaubt und dieser Unterschied ist, wie wir im folgenden zeigen werden, für tiefe Temperaturen wesentlich.

Zustands verdoppelt werden muß. V ist das Volumen unseres Kristallstückes. Die weitere Rechnung unter Benutzung der Ausdrücke (83) und (65) sowie des in § 3 beim entarteten Gas gefundenen Wertes

$$\lg A = \frac{\omega}{kT}(6\pi^2 \varkappa)^{2/3}$$

verläuft genau wie bei Sommerfeld, l. c.

Wir erhalten schließlich für die Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{J}{F} = \frac{4(6\pi^2\varkappa)^2}{3\pi^5} \cdot \frac{e^2 d \tau \omega v a^2 \mu^2}{m C^2 h} \left(\frac{h\nu}{ak\Theta}\right)^5 \cdot \frac{\Theta}{T}, \tag{85}$$

$d = \frac{M}{V}$ ist die Dichte unseres Stoffes.

Zunächst wollen wir die Größenordnung des in (85) erhaltenen Ausdruckes abschätzen. ω ist wie in § 2 eine Energie von der Größenordnung $\beta' \cdot 10^{-12}$ erg. τ/m ist nach (63 d) von der Größenordnung der Maximalgeschwindigkeit der Elektronen, da k in (63 d) die Werte von $-G$ bis $+G$ durchläuft. Bei den freien Elektronen von Sommerfeld beträgt sie 10^8 cm sec^{-1}. Wir wollen setzen $\frac{\tau}{m} = \tau' \cdot 10^8$ cm sec^{-1}, so daß für freie Elektronen τ' wie auch β' von der Größenordnung 1 sind, und die Bindung dadurch berücksichtigen, daß wir setzen $\tau' = \beta' = \frac{1}{10}$. C ist nach (64) das reziproke Quadrat einer Länge von der Größenordnung des Atomradius, d. h. 10^{-8} cm. $\frac{h\nu}{ak\Theta}$ ist, wie man sich leicht überzeugt, eine reine Zahl von der Größenordnung 1. Sei $T = 3\Theta$, so erhalten wir mit diesen Werten $\sigma \simeq 10^{18}$ elst. Einh. Dieser mit der Erfahrung im Einklang stehende Wert ist in Anbetracht unserer rohen Annahmen immerhin befriedigend.

Für den Widerstand $W = \frac{1}{\sigma}$ erhalten wir die durch die Erfahrung längst bekannte Proportionalität mit der absoluten Temperatur, wie dies auch von W. V. Houston, l. c., gefunden wurde.

2. $T \ll \Theta$: Ein gänzlich anderes Verhalten aber zeigt unser Leiter bei tiefen Temperaturen. Ohne Berücksichtigung der Nullpunktsbewegung des Gitters hat W. V. Houston hier ein Abfallen proportional T^2 gefunden. Würde man die Nullpunktsenergie mit berücksichtigen, was von der Quantenmechanik gefordert wird, indem man etwa die entsprechende, von Debye und Waller* für die Streuung von Röntgenstrahlen ab-

* P. Debye, Ann. d. Phys. (4) **43**, 49, 1914; J. Waller, ebenda (4) **83**, 153, 1927.

geleitete Formel verwendet, so bekäme man einen temperaturunabhängigen Zusatzwiderstand, der noch beim absoluten Nullpunkt etwa ein Viertel vom Widerstand bei Zimmertemperatur ausmachen würde. Es erscheint zunächst schwierig, dieser völlig im Widerspruch mit dem Experiment stehenden Tatsache zu entgehen, um so mehr, als die Streuung der Röntgenstrahlen deutlich auf die Existenz einer Nullpunktsbewegung in Übereinstimmung mit der Theorie hinweist.

Wir wollen zeigen, daß trotzdem unsere Formel (78) das Verschwinden des Widerstandes für tiefe Temperaturen richtig wiedergibt.

Es beruht dies auf dem oben in Gleichung (62 a) hervorgehobenen Umstand, daß bei jedem Streuprozeß die Energie $h\nu$ vom Gitter aufgenommen oder abgegeben werden muß. Energieabgabe durch das Gitter ist bei abnehmender Temperatur immer weniger möglich, da das Gitter immer weniger Energie enthält. Energieaufnahme ist dagegen für das Gitter selbst bei tiefsten Temperaturen unverändert möglich und führt im allgemeinen zum genannten Restwiderstand am absoluten Nullpunkt (vgl. die Streuung der Röntgenstrahlen). In unserem Falle befinden sich aber auch die zu streuenden Elektronen (im Gegensatz zum eben genannten Fall der Röntgenstrahlen) in thermischem Gleichgewicht, können daher bei abnehmender Temperatur immer weniger Energie an das Gitter abgeben. Also werden bei abnehmender Temperatur auch die Prozesse, die im allgemeinen zu jenem Restwiderstand Anlaß geben, immer seltener, der Restwiderstand verschwindet.

Es ist mir nicht gelungen, aus der Integralgleichung (82) die Funktion $c(\varepsilon)$ streng zu ermitteln, was zu einer genauen Berechnung des Widerstandes nötig wäre. Um zu zeigen, daß für tiefe Temperaturen der Widerstand proportional zu T^3 verschwindet, genügt es indessen, den asymptotischen Verlauf der Funktion $c(\varepsilon)$ für $|\varepsilon| \gg 1$ zu untersuchen. Der physikalische Grund hierfür liegt darin, daß es, wie wir unten zeigen werden, von diesem Verlauf abhängt, wie stark die bei tiefen Temperaturen nur noch sehr wenig angeregten kurzwelligen Eigenschwingungen von den Stößen der Elektronen beeinflußt werden.

Wir wollen zunächst annehmen, daß $c(\varepsilon)$ für $\frac{\Theta}{T} \gg \varepsilon \gg 1$ stark anwachse, etwa nach Art einer Funktion $\varepsilon^n e^{\varepsilon}$, wo n irgend eine positive oder negative Zahl von der Größenordnung 1 ist und diese Annahme ad absurdum führen. Dabei beschränken wir uns auf $\varepsilon > 0$, da nach (82) gilt

$$c(\varepsilon) = c(-\varepsilon).$$

Aus (82) wird für $\varepsilon \gg 1$

$$P\left(\frac{\Theta}{T}\right)^3 = c(\varepsilon)\int_0^{\Theta/T}\frac{x^2\,dx}{e^x-1} - \int_0^{\Theta/T} c(\varepsilon+x)\left[1-Q\left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 x^2\right]\frac{x^2\,dx}{e^x-1}$$
$$+ c(\varepsilon)\int_0^{\Theta/T}\frac{x^2\,dx}{(e^x-1)(e^{-\varepsilon}+e^{-x})}$$
$$-\int_0^{\Theta/T} c(\varepsilon-x)\left[1-Q\left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 x^2\right]\frac{x^2\,dx}{(e^x-1)(e^{-\varepsilon}+e^{-x})}. \qquad (86)$$

Der dritte Summand darf ersetzt werden durch $c(\varepsilon)\int_0^{\varepsilon} x^2\,dx = \frac{\varepsilon^3}{3}c(\varepsilon)$, da der Integrand für $1 \ll x < \varepsilon$; $e^{-x} \gg e^{-\varepsilon}$, wo er den Hauptanteil beiträgt, durch x^2 ersetzt werden darf und für $x > \varepsilon$ exponentiell verschwindet, sobald $e^{-x} \ll e^{-\varepsilon}$. Der vierte Summand darf vernachlässigt werden, da für den wesentlich in Betracht kommenden Teil $1 \ll x < \varepsilon$ nach unserer Annahme $c(\varepsilon - x) \ll c(\varepsilon)$ und da für $x > 2\varepsilon$, wo [da $c(\varepsilon)$ eine gerade Funktion ist] $c(\varepsilon - x) = c(\varepsilon)$ oder sogar $c(\varepsilon - x \gg c(\varepsilon)$ das im Nenner auftretende e^x dafür sorgt, daß dort der vierte Summand gegen den zweiten vernachlässigt werden kann. Das beim ersten Summand auftretende Integral ist eine Zahl der Größenordnung 1, darf deshalb gegen das beim dritten auftretende $\frac{\varepsilon^3}{3} \gg 1$ vernachlässigt werden und statt (86) dürfte man schreiben:

$$P\left(\frac{\Theta}{T}\right)^3 = \frac{\varepsilon^3}{3}c(\varepsilon) - \int_0^{\Theta/T} c(\varepsilon+x)\left[1-Q\left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 x^2\right]\frac{x^2\,dx}{e^x-1}.$$

Diese Integralgleichung aber wird für $\varepsilon \gg 1$ gelöst durch den Ansatz

$$c(\varepsilon) = \frac{3P}{\varepsilon^3}\left(\frac{\Theta}{T}\right)^3,$$

da dann das Integral für wachsende Werte von ε verschwindet, und mithin ist die Annahme eines für große Werte von ε exponentiell ansteigenden $c(\varepsilon)$ als sich selbst widersprechend widerlegt.

Daraus folgt zunächst, daß

$$\chi(\varepsilon) = \frac{c(\varepsilon)}{kT(e^{\varepsilon}+1)(e^{-\varepsilon}+1)} \quad \text{für} \quad |\varepsilon| \gg 1$$

wegen des Ansteigens des Nenners exponentiell verschwindet, da dieses nicht durch ein entsprechendes Anwachsen von $c(\varepsilon)$ kompensiert werden

kann. Dies bedeutet, daß sich wiederum nur diejenigen Elektronen merklich an der Stromleitung beteiligen, deren Energie an der kritischen Stelle 1 bis 2 (Fig. 2) liegt.

Ist aber ε von der Größenordnung 1, so ändert sich (82) nicht wesentlich, wenn für die obere Grenze des Integrals statt $\frac{\Theta}{T} \gg 1 : \infty$ gesetzt wird, da $c(\varepsilon - x)$ und $c(\varepsilon + x)$ für $x \gg 1$ nicht in dem Maße wachsen können, um zu verhindern, daß wegen des e^x im Nenner der Integrand hinreichend verschwindet. Damit wird ausgesagt, daß diejenigen Eigenschwingungen, für deren Frequenz die Beziehung $x = \frac{h\nu}{kT} \gg 1$ gilt, nicht mehr wesentlich am Zustandekommen des Widerstands beteiligt sind, d. h. um so langwelligere Eigenschwingungen nur noch mitmachen, je tiefer die Temperatur ist. Da Q eine reine Zahl von der Größenordnung 1 ist, darf dann in (82) $Q\left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 x^2$ gegen 1 vernachlässigt werden und bei gegebenem ε hängt $c(\varepsilon)$ nur noch dank des auf der linken Seite auftretenden $\left(\frac{\Theta}{T}\right)^3$ von der Temperatur ab, d. h. es gilt

$$c(\varepsilon) = \left(\frac{\Theta}{T}\right)^3 c^*(\varepsilon),$$

wobei $c^*(\varepsilon)$ nur noch von ε allein abhängt. Daraus folgt nach (80) in der Umgebung der kritischen Stelle:

$$\chi(E) = -\frac{\partial f_0}{\partial E}\left(\frac{\Theta}{T}\right)^3 c^*\left(\frac{E - \omega\varrho_0^2}{KT}\right),$$

und daraus wie in (84) für den Strom

$$J = \frac{2e\tau}{mV}\iiint \xi^2 \chi(\varrho)\frac{G^3}{8\pi^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \frac{4\pi}{3\omega}\cdot\frac{e\tau}{mV}\,\frac{G^3}{8\pi^3}\left(\frac{\Theta}{T}\right)^3 6\pi^2\varkappa . c^*(0),$$

und mithin für den Widerstand

$$W \sim T^3.$$

Die von Grüneisen aufgestellte empirische Formel † verlangt $W \sim T^4$, doch scheinen neuere Messungen auch einem T^3-Gesetz recht zu geben.

Es ist durchaus wesentlich, daß die „Zusammenstöße" der Elektronen mit dem Gitter nicht vollkommen elastisch, sondern stets von einem Energieaustausch begleitet sind. Zum ersten beruht darauf natürlich die Erwärmung eines Leiters, der von einem Strom durchflossen

† Siehe z. B. Handb. d. Phys. XIII, S. 18.

wird. Dann aber ist diese Tatsache wie oben erwähnt auch entscheidend für das Verschwinden des Widerstandes mit der Temperatur. Würde man in (76) statt $E \pm h\nu$ einfach E setzen, so bekäme man für den Widerstand ein Gesetz von der Form

$$W \sim \left(\frac{T}{\Theta}\right)^5 \cdot \int_0^{\Theta/T} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} x^4 \, dx = 2\left(\frac{T}{\Theta}\right)^5 \cdot \int_0^{\Theta/T} \frac{x^4 \, dx}{e^x - 1} + \frac{1}{5},$$

d. h. einen temperaturunabhängigen Zusatzwiderstand, wie er sich auch nach der Theorie der Wärmestreuung von Röntgenstrahlen bei Berücksichtigung der Nullpunktsbewegung des Gitters ergäbe.

In § 3 wurde gezeigt, daß das entartete und das nicht entartete Gas hinsichtlich ihrer spezifischen Wärme ein ganz verschiedenes Verhalten zeigen. Wir wollen zeigen, daß dies auch für die elektrische Leitfähigkeit gilt, indem wir auch hier neben dem soeben behandelten Fall $\gamma \gg 1$ des entarteten Gases den Fall $\gamma \ll 1$ untersuchen.

Die Überlegungen verlaufen im wesentlichen gleich, wie bei $\gamma \gg 1$. Man erhält wieder

$$\chi(\varrho) = -c(\varrho)\frac{\partial f_0}{\partial \varrho}. \tag{87}$$

f_0 entwickeln wir, wie in (33) nach Potenzen von $1/T$, und zwar erhält man mit (63 c)

$$f_0 = \frac{A}{A+1}\left[1 - \frac{1}{A+1}\left(\frac{\omega}{kT}\varrho^2 + \cdots\right)\right],$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \varrho} = -2\varrho\frac{\omega}{kT}\frac{A}{(A+1)^3}.$$

Setzt man dies in (87) ein und berechnet sich, wie in (84), den Strom und daraus den Widerstand, so erhält man, wieder unter Benutzung der Temperatur $T_0 = \frac{\omega}{k}$, von der wir voraussetzen wollen $T_0 \ll \Theta$ für $T_0 \ll T \ll \Theta$ infolge der Nullpunktsbewegung

$$W \sim T$$

und für $T_0 \ll \Theta \ll T$

$$W \sim T^2,$$

welch letzteres Gesetz allerdings nie bei Leitern gefunden wurde. Wir wollten mit der zuletzt gegebenen Überlegung nur zeigen, daß die Möglichkeit eines Überganges zwischen zwei ganz verschiedenen Gesetzen der Leitfähigkeit besteht, der sich bei einer von der charakteristischen

völlig unabhängigen Temperatur vollzieht. Daß sich solche Übergänge wirklich ereignen, zeigt das Phänomen der Supraleitfähigkeit, das allerdings bis heute noch unerklärt ist.

Zum Schlusse möchte ich Herrn Professor Heisenberg meinen herzlichsten Dank aussprechen für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für sein stetes Interesse an ihrem Fortgang und die zahlreichen wertvollen Ratschläge, die er mir dabei hat zuteil werden lassen.

Leipzig, Institut d. Universität f. theor. Physik, 25. Juni 1928.

Berichtigung

zu der Arbeit: Über die Polarisation der charakteristischen Röntgenstrahlung*. Von H. Mark und Karl Wolf.

S. 5, Z. 4 v. u. lies $D_0 - D_8$, $D_1 - D_9$, $D_2 - D_{10}$ usw. statt D_0 bis D_8, D_1 bis D_9, D_2 bis D_{10} usw.

S. 6, Z. 9/10 v. u. lies $D_4 - D_0$, $D_4 - D_8$, $D_{12} - D_8$ usw. statt D_4 bis D_0, D_4 bis D_8, D_{12} bis D_8 usw.

---

* ZS. f. Phys. **52**, 1—7, 1928.

Über Zuordnungsfragen, insbesondere über die Zuordnung von Multiplettermen zu Seriengrenzen.

Von **F. Hund** in Rostock.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 15. November 1928.)

Die Zuordnung von Termen eines quantenmechanischen Systems für verschiedene Werte eines Parameters ist eine theoretisch nicht immer streng definierte, aber praktisch wichtige Aufgabe. Sie wird mit Hilfe einer schon früher ausgesprochenen Vermutung an einigen Beispielen erläutert: an den Termen im gleichzeitig wirkenden elektrischen und magnetischen Felde, an der Veränderung der Termstruktur zweiatomiger Molekeln bei stärker werdender Rotation, schließlich an der Zuordnung der Multiplettkomponenten zu Seriengrenzen. Dabei zeigt sich, daß frühere Angaben stark eingeschränkt werden müssen.

Bei der qualitativen Betrachtung des Termschemas eines quantenmechanischen Systems tritt oft der Fall auf, daß die Termordnung für gewisse Werte eines veränderlichen Parameters bekannt ist; man wünscht dann eine Interpolation der Terme für Zwischenwerte des Parameters und ist häufig froh, wenn man wenigstens weiß, welche Terme des einen bekannten Grenzfalles in bestimmte Terme des anderen bekannten Grenzfalles bei einer stetigen Änderung des Parameters übergehen. Ein Beispiel ist die von Sommerfeld und Pauli auf Grund korrespondenzmäßiger Betrachtungen angegebene Zuordnung der Zeemankomponenten in schwachen und starken Magnetfeldern*. Ihr Ergebnis kann man allgemein so aussprechen: bei der Zuordnung bleibt die magnetische Quantenzahl m erhalten, und Terme mit gleichem m schneiden einander nicht**. Eine analoge Frage ist die nach der Zuordnung der Starkeffektkomponenten in schwachen und starken Feldern. Andere Zuordnungsfragen treten in der Betrachtung des Zweizentrensystems auf.

Die Zuordnung der Molekelterme zu Termen getrennter Atome oder die Verfolgung der Schwingungsniveaus bis zum Kontinuum, das der Dissoziation entspricht, ist strenggenommen eine etwas andere Frage. Denn hier wird nicht ein Parameter stetig geändert, sondern eine diskrete Termfolge wird in ihrem Verlauf bei wachsender Quantenzahl betrachtet. Ob z. B. zwei diskrete Wertreihen, die sich einander nähern und später wieder auseinanderrücken, so zu ordnen sind, daß sie an-

---

* A. Sommerfeld, ZS. f. Phys. **8**, 257, 1922; A. Landé, ebenda **19**, 112, 1923; W. Pauli, ebenda **20**, 371, 1923; W. Heisenberg und P. Jordan, ebenda **37**, 263, 1926.

** F. Hund, Linienspektren 1927, S. 71 und 110.

einander vorbeigehen, oder so, daß sie sich überschneiden, ist gar nicht streng definierbar. Da die diskreten Werte der Schwingungsterme einer Molekel in der kontinuierlichen Folge der Terme eines Zwei- oder Mehrzentrensystems mit wachsendem Kernabstand enthalten sind, kann man praktisch die Frage nach der Zuordnung der Molekelterme zu den Atomtermen ersetzen durch die Frage nach der Zuordnung der Zwei- oder Mehrzentrensystem-Terme bei veränderlichem Parameter. Ebenso ist die Frage nach der Zuordnung der Atomterme zu Seriengrenzen oder die Verfolgung einer Termserie bis zum Kontinuum, das der Abtrennung eines Elektrons entspricht, eine etwas andere, theoretisch gar nicht immer streng faßbare, aber praktisch wichtige Frage. Da die diskreten Werte der Terme wachsender Hauptquantenzahl in der kontinuierlichen Folge der Terme eines gedachten Atoms konstanter Hauptquantenzahl, aber allmählich gelockerter Kopplung des Leuchtelektrons enthalten sind, hat man die genannte Zuordnungsfrage ersetzt durch die Frage nach der Zuordnung der Terme in dem gedachten Atom mit stetig veränderlichem Parameter*.

I. Regeln für die Zuordnung. Wenn das quantenmechanische System nur eine Koordinate hat, so fallen außer in singulären Fällen nie Terme zusammen, und die Zuordnung der Terme zweier Fälle mit bestimmten Parameterwerten geschieht ohne Überschneidungen**. Für Systeme mit mehreren Koordinaten gilt die (früher oft nicht beachtete) Tatsache, daß die Art der Zuordnung vom Weg abhängt und bei einer geringfügigen Abänderung des Weges eine vollständig andere werden kann. Wir erläutern dies an der Zuordnung der zweiten und dritten Eigenschwingung einer reckteckigen Membran (sie entsprechen Termen eines bestimmten einfachen quantenmechanischen Systems) bei stetiger Änderung des Verhältnisses der Seiten (während etwa Fläche oder Umfang konstant bleibt)***. Liegt am Anfang die kürzere Rechteckseite a wagerecht, die längere b senkrecht, so hat die zweite Eigenschwingung nur eine wagerechte Knotenlinie und bei nicht zu stark von 1 verschiedenem Seitenverhältnis die dritte Eigenschwingung nur eine senkrechte Knotenlinie. Nähern wir das Seitenverhältnis a/b dem Wert 1, so bleiben die Knotenlinien in ihrer Lage, die Eigenwerte rücken einander näher; für $a/b = 1$ fallen sie zusammen, für $a/b > 1$ rücken sie wieder auseinander. Jetzt gehört aber zum wagerechten Knoten der dritte, zum

* F. Hund, ZS. f. Phys. **34**, 296, 1925 und Linienspektren 1927, § 39.
** F. Hund, ZS. f. Phys. **40**, 742, 1927.
*** F. Hund, ebenda **42**, 93, 1927, siehe S. 100.

senkrechten Knoten der zweite Eigenwert. Die Eigenfunktionen mit wagerechtem Knoten für $a/b \gtrless 1$ gehen stetig ineinander über, ebenso die Eigenfunktionen mit senkrechtem Knoten; ein adiabatischer Übergang würde unter Überkreuzen der Eigenwerte erfolgen; wir sagen kurz: die Terme überkreuzen sich*.

Wir können nun einen von dem oben genannten Wege der Überführung des hohen Rechtecks in das breite beliebig wenig verschiedenen Weg einschlagen und erhalten die andere Zuordnung. Wenn wir beim hohen Rechteck eine Ecke etwas abschrägen, dann das Rechteck über ein Quadrat mit einer abgeschrägten Ecke in ein breites Rechteck übergehen lassen, so gehen, wenn beim Quadrat die Abstumpfung symmetrisch zur Diagonale liegt, aus Symmetriegründen die Eigenfunktionen vor und nach dem Quadratfall stetig über in solche des Quadratfalles, deren Knoten entweder in der Symmetriediagonale liegt oder genähert senkrecht dazu. Die Eigenfunktion mit ursprünglich wagerechtem Knoten geht stetig in die mit senkrechtem über, und umgekehrt. Die Eigenwerte rücken einander näher und entfernen sich wieder, ohne sich zu treffen.

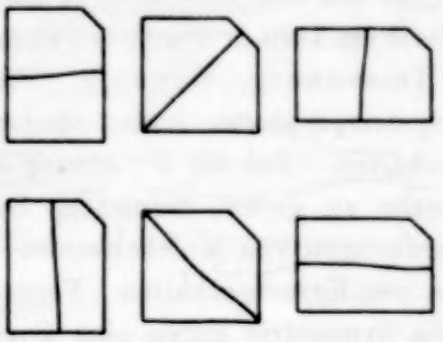


Fig. 1.
Zuordnungen von Eigenschwingungen einer Membran.

Wir sehen an diesem Beispiel, daß auch die Ausführung einer Näherungsrechnung noch nichts über die wirkliche Zuordnung aussagt. Der physikalisch geforderte stetige Übergang der beiden verschiedenen Zuordnungsfälle kommt so zustande, daß in Fällen, wo die Terme sich nicht treffen, aber einander sehr nahe kommen, große Wahrscheinlichkeiten für Quantensprünge auftreten**.

---

* Fälle, wo die Eigenfunktionen nach der Entartung und vor der Entartung sich nicht stetig an die gleichen unabhängigen Eigenfunktionen des entarteten Falles anschließen, können auch vorkommen. Läßt man z. B. das Achsenverhältnis einer elliptischen Membran gegen 1 gehen, also die Ellipse zum Kreis werden und schließlich wieder den Kreis zur Ellipse, aber mit anderer Achsenrichtung, so schließen sich die Eigenfunktionen hinter dem Fall des Kreises stetig an an Linearkombination mit einer von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verschiedenen Matrix der Grenzwerte der Eigenfunktionen vor dem Fall des Kreises. Hier würde bei einem adiabatischen Übergang über den Kreisfall für jeden der beiden Wege eine gewisse Wahrscheinlichkeit bestehen.

** F. Hund, ZS. f. Phys. **40**, 742, 1926, siehe S. 750 *f.*

Dieser Sachverhalt zeigt, daß die Tragweite einer Zuordnung nicht überschätzt werden darf. Der Fall der Überkreuzung zweier Terme und der des Entgegenkommens und Wiederentfernens zweier Terme sehen im Termschema (z. B. wenn man auf Grund der Zuordnung Bezeichnungen einführt) sehr verschieden aus, sind aber manchmal physikalisch kaum verschieden. Wir müssen in manchen Fällen bei der Ordnung von Spektren eine nicht auf mangelnder Kenntnis, sondern in der Natur der Sache ruhende Unbestimmtheit in Kauf nehmen.

Wegen der praktischen Wichtigkeit von Zuordnungen wollen wir doch überlegen, welche Aussagen über die Zuordnung gemacht werden können. Zunächst sind es solche, die durch die Symmetrieverhältnisse der Eigenfunktionen gefordert sind. Wenn wir den Einfluß des Elektronenspins auf den Termwert vernachlässigen, so entspricht jedem Multiplettterm ein Term bestimmter Symmetrie gegen Vertauschungen der Elektronen (Heisenberg, Wigner). Diese Symmetrie bleibt bei Änderungen der Systemparameter (unter dauernder Vernachlässigung des Spineinflusses) erhalten. Bei der Zuordnung bleibt also s erhalten. Dies braucht nicht mehr zu gelten, wenn der Spineinfluß berücksichtigt wird. Bei Zuordnungen von Molekeltermen bei gleichen Kernen bleibt die Symmetrie in den Kernen erhalten. Ferner kommt in Betracht* bei freien Systemen die Symmetrie gegen eine Drehung im Raum und gegen die Spiegelung im Koordinatenursprung: die azimutale Quantenzahl l (bei Berücksichtigung des Spineinflusses j) bleibt erhalten, gerade Terme gehen in gerade, ungerade in ungerade über. Bei einer elektrischen Symmetrieachse kommt die Symmetrie gegen Drehungen um diese Achse und Spiegelung an einer durch sie gehenden Ebene in Betracht: Σ-Terme gehen in Σ-Terme, Σ'- in Σ'-Terme, Π- in Π-Terme usw. über. Bei einer magnetischen Symmetrieachse muß die Drehung um sie und die Spiegelung an einer Ebene senkrecht zu ihr betrachtet werden; m bleibt erhalten.

All diese Angaben bestimmen (besonders in Fällen geringer Symmetrie) die Zuordnung noch nicht vollständig. Zur Vervollständigung der Zuordnung wurde die mathematische Vermutung aufgestellt**: Außer den durch Symmetrie geforderten Überkreuzungen von Termen kommen keine vor.

II. Beispiele von Zuordnungen. Als Beispiel für die Anwendung der oben genannten Zuordnungsvermutung wählen wir die Terme eines

* E. Wigner, ZS. f. Phys. **43**, 624, 1927, siehe S. 635 f.
** F. Hund, ebenda **42**, 93, 1927, siehe S. 100 f.

Atoms, das gleichzeitig in einem magnetischen und in einem elektrischen Feld ist. Dabei soll das Magnetfeld stetig nach Null abnehmen und gleichzeitig das elektrische Feld zunehmen. Im Falle paralleler Felder ist die Zuordnung, wenn wir gleich bei einem starken Magnetfeld beginnen, schon durch die Werte von m_l und m_s eindeutig bestimmt. Im Falle senkrecht gekreuzter Felder haben wir Symmetrie zu einer auf $\mathfrak{H}$ senkrechten Ebene ($\mathfrak{E}$ ist polarer, $\mathfrak{H}$ ist axialer Vektor); wir haben (im starken Magnetfeld unter Weglassung des Spins) Terme, die zu dieser Ebene symmetrisch sind (+-Terme), nur symmetrischen zuzuordnen, entsprechend antisymmetrische (—-Terme) zu antisymmetrischen*. Im Magnetfeld sind die Terme + oder —, je nachdem $\sum l_\tau + m_l$ gerade oder ungerade ist. Im elektrischen Felde sind die Π-, Δ-... Terme

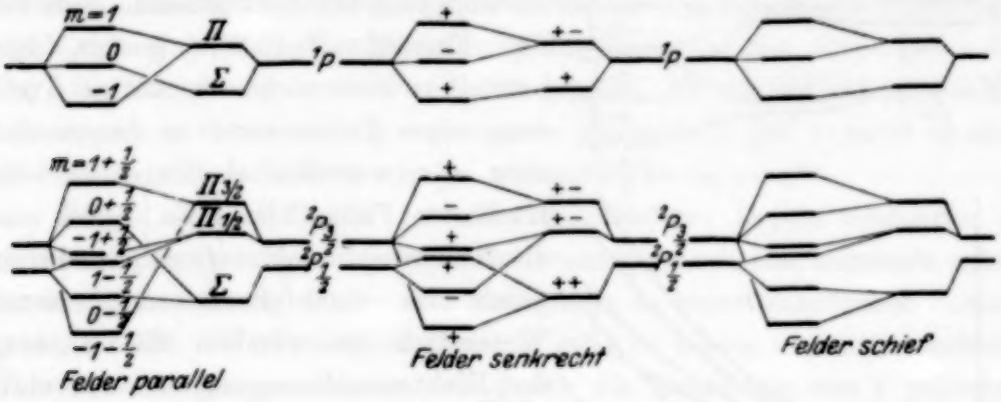


Fig. 2.
Zuordnung von Termen im gleichzeitig wirkenden elektrischen und magnetischen Feld.

($m_l = 1, 2 \ldots$) entartet und aus + und — zusammengesetzt, die Σ-Terme ($m_l = 0$) sind + oder —, je nachdem, ob $\sum_\tau l_\tau + l$ gerade oder ungerade ist**. Durch die Symmetrie ist die Zuordnung noch nicht vollständig bestimmt; wir müssen also hier unsere Vermutung benutzen. Im Falle der schief gekreuzten Felder haben wir keinerlei Symmetrie. Fig. 2 gibt die Zuordnungen für einen ^1P-Term und einen ^2P-Term in parallelen, senkrecht gekreuzten und schief gekreuzten Feldern. Links sind jeweils die Terme ohne Feld, dann der Übergang zum starken Magnetfeld, dann der Übergang zum starken elektrischen Feld und schließlich der Übergang zum feldlosen Fall angegeben. Im Falle der parallelen Felder sind die für die Zuordnung wichtigen Quantenzahlen $m = m_l + m_s$ bzw. Σ, Π

* + + - und — — -Kombinationen geben Strahlung, die senkrecht zu $\mathfrak{H}$ polarisiert ist, + — -Kombinationen solche, die parallel zu $\mathfrak{H}$ polarisiert ist.

** Es ist dies genau die Wigner-Witmersche Unterscheidung von $\lambda = 0$ und $\lambda = 0'$ in ZS. f. Phys. **51**, 859, 1928.

angegeben, im Falle der senkrechten Felder der $+$- oder $-$-Charakter des spinfreien Anteils.

An zweiter Stelle betrachten wir einen Fall, der keine Zuordnungsfrage im oben angegebenen Sinne enthält, aber durch Vergleich mit einer solchen erläutert wird. In zweiatomigen Molekeln kommt es oft vor, daß für kleine Werte der Rotationsquantenzahl j der Einfluß der Rotation klein ist gegen den der Bindung von Elektronenspin und Elektronenschwerpunktsbewegung an die Kernachse, daß bei höheren j-Werten der Rotationseinfluß noch klein ist gegen die Bindung der Schwerpunktsbewegung an die Kernachse und daß sogar Zeichen auftreten (feine Dublettaufspaltung der Π-, Δ-... Terme) für eine allmähliche Entkopplung des Elektronenumlaufs von der Kernachse *. Wie gesagt, hier handelt es sich nicht um stetige Änderung eines Parameters; es lassen sich aber die wesentlichen Züge des betrachteten Falles übersehen, wenn man die Änderung der Rotationsquantenzahl durch die eines Parameters ersetzt. Wesentlich ist nämlich die Bindung der Elektronenbewegung an eine elektrisch ausgezeichnete Achse, die Kernachse, und die Beeinflussung von Spin und Elektronenumlauf durch die Rotation. Letztere kann durch ein Magnetfeld ersetzt gedacht werden, das stets senkrecht zur Kernachse steht. Wir haben also den Fall senkrecht gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldes vor uns. Das elektrische Feld bleibt konstant, das Magnetfeld nimmt stetig von Null aus zu.

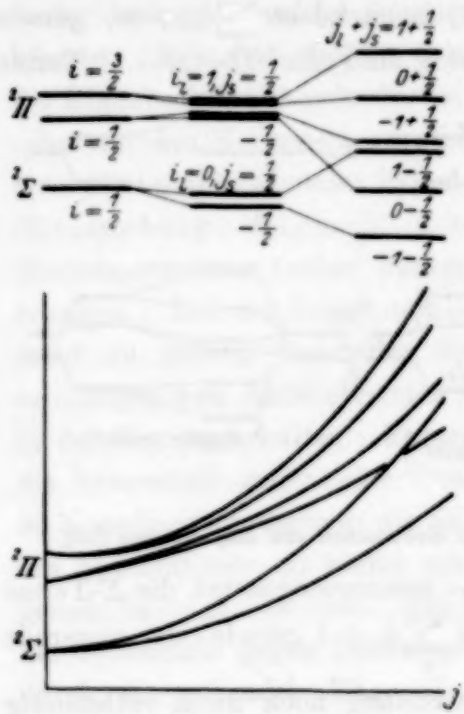


Fig. 3. Terme einer Molekel bei zunehmender Rotation.

In Fig. 3 ist oben das Verhalten der aus einem ^2P entstehenden Terme $^2\Sigma$ und $^2\Pi$ angegeben, links ist nur das durch die ausgezeichnete Kernachse gegebene elektrische Feld vorhanden (Quantenzahlen $i = i_l + i_s$), in der Mitte außerdem ein Magnetfeld senkrecht dazu, das den Spin an seine Achse koppelt, aber den Elektronenumlauf an die Kernachse ge-

* F. Hund, ZS. f. Phys. **36**, 657, 1926. Den Fall der Entkopplung des Elektronenumlaufs hat W. Weizel an Heliumbanden aufgezeigt, ZS. f. Phys. **52**, 175, 1928.

koppelt läßt (Quantenzahlen i_l und j_s, wir sagen j_s statt m_s im Hinblick auf die Anwendung bei den Molekeln); rechts ist das Magnetfeld so stark, daß auch der Elektronenumlauf durch das Magnetfeld stärker beeinflußt wird als durch die Kernachse (Quantenzahlen j_l und j_s entsprechend m_l und m_s). Fig. 3 gibt unten den analogen Verlauf der Rotationsterme einer Molekel mit wachsender Rotation qualitativ wieder.

Für die Zuordnung der einzelnen Komponenten eines Atommultipletts zu den Komponenten einer mehrfachen Seriengrenze (Multiplett des Ions) betrachten wir den analogen stetigen Übergang vom Atomterm zum Term des Ions unter allmählicher Lockerung der Bindung des Leuchtelektrons. Diese Frage wurde früher behandelt, wobei während der Lockerung des Leuchtelektrons ein starkes Magnetfeld gedacht wurde. Unter Benutzung der Zuordnungen im starken und schwachen Magnetfeld ergab sich eine eindeutige Zuordnung der Terme zu den Grenzen*. Da aber die Zuordnung vom Weg abhängig ist, ist die so gefundene Zuordnung zwar sicher richtig im starken Magnetfeld, sie braucht es aber ohne Feld (und da wollen wir sie wissen) nicht zu sein**.

Wenn wir auf Grund der oben aufgestellten Regeln verfahren, so werden die Symmetrieforderungen für s und l, gerade und ungerade schon durch die Zuordnung des ganzen Multipletts zu einer mehrfachen Seriengrenze erfüllt. Wir brauchen also nur auf j zu achten und keine anderen Überschneidungen zuzulassen, als durch die Erhaltung von j gefordert werden. Wenn einem Ion in einem Zustand mit der inneren Quantenzahl J ein Elektron mit der Nebenquantenzahl l_e zugefügt wird, so gibt das Terme mit den J-Werten

$$\begin{array}{lll} J+l_e+\frac{1}{2} & J+l_e-\frac{1}{2}\cdots & |J-(l_e+\frac{1}{2})| \\ & J+l_e-\frac{1}{2}\cdots & |J-(l_e-\frac{1}{2})|. \end{array}$$

Wir betrachten nun von den Termen der Multipletts, die zu einer mehrfachen Seriengrenze gehören, alle mit einem bestimmten j. Zur obersten Seriengrenze, aus der dieses j entstehen kann, gehen die obersten dieser Terme, und zwar so viele als dazu gehören. Zur nächsttieferen Grenze gehen die nächsttieferen Multipletterme, wieder so viele als zur Grenze gehören usw. So erhält man für jede gegebene Reihenfolge der Multiplettterme und für jede gegebene Reihenfolge der Seriengrenzen eine ein-

---

* F. Hund, ZS. f. Phys. **34**, 296, 1925 und Linienspektren 1927, § 39 und Abb. 34 (am Schluß).

** A. G. Shenstone, Phys. Rev. **29**, 380, 1927 und Nature **121**, 619, 1928, hat Fälle gefunden, wo sie offenbar nicht richtig ist.

deutige Zuordnung. Für regelrechte Seriengrenzen (kleineres J tiefer) und für normale Reihenfolge der Multipletts (größeres s tiefer, bei gleichem s größeres l tiefer) erhält man genau die frühere Zuordnung. Für verkehrte Seriengrenzen und normale Reihenfolge der Multipletts sind in Fig. 4 einige Zuordnungen angegeben; es sind die Multipletts betrachtet, die durch Zufügung eines s- oder p-Elektrons aus einem ^2P- und ^2D-Term entstehen und die durch Hinzufügung solcher Elektronen aus einem ^3P- und ^3D-Term entstehen. Für andere Reihenfolgen erhält man andere Zuordnungen*.

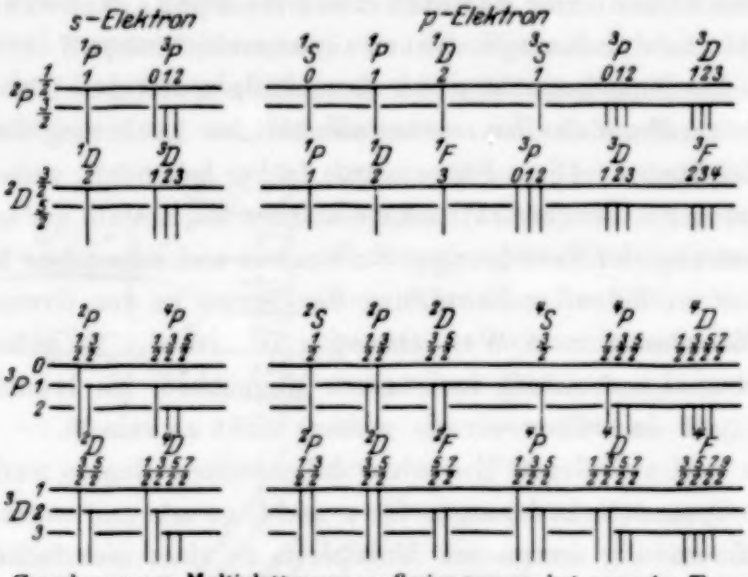


Fig. 4. Zuordnung von Multiplettermen zu Seriengrenzen bei normaler Termordnung und verkehrten Seriengrenzen.

Die Gültigkeit der Ergebnisse des § 39 meines Buches Linienspektren, die in Fig. 34 dort zusammengestellt sind, ist also auf den Fall regelrechter Seriengrenzen und normaler Ordnung der Multipletts beschränkt. Die Fig. 41 wird also ungültig, ebenso die für die Termordnung von Ne, Ar und Pd gezogenen Schlüsse (Fig. 42 und 43). Es sei noch darauf hingewiesen, daß auf Grund der obigen Zuordnungsvermutung die Zuordnung von Termen mit empirisch bekanntem j zu Seriengrenzen und

* In einer neuen Note (Nature **122**, 727, 1928) gibt A. G. Shenstone auch ein Verfahren, Multiplettterme zu Seriengrenzen zuzuordnen. Er benutzt starke Magnetfelder; es werden aber unter Berufung auf die Regel, Terme mit gleichem m schneiden einander nicht, Terme mit $m_s \neq 0$ zu Singulettermen ($s = 0$) zugeordnet. Das Verfahren ist daher nur zu verstehen, wenn das Magnetfeld schwach ist; dann liefert es aber die gleichen Ergebnisse, wie man ohne Feld erhält mit der Regel, Terme mit gleichem j schneiden einander nicht. Allerdings vermag ich dann nicht einzusehen, warum in verwickelteren Fällen keine Zuordnung möglich sein soll.

die Zusammenfassung der Terme zu Multipletts, also zu l- und s-Werten, zwei voneinander unabhängige Fragen sind.

Beim Neon hat die Paschensche Zuordnung der tieferen s-, p-, d-Terme zu den höheren Seriengliedern und den Seriengrenzen die Eigenschaft, daß Terme mit gleichem j sich nicht überkreuzen*. Bei der damals von mir (auf Grund der Überlegung mit dem starken Magnetfeld) vorgeschlagenen Zuordnung kommen solche Überschneidungen bei den s-Termen vor, während bei den p-Termen Schwierigkeiten für das Verständnis der Zeemaneffekte entstehen. Natürlich liefert die Zugehörigkeit zu den Seriengrenzen jetzt keine Gesichtspunkte für die Zuordnung der empirischen Terme zu den Symbolen $^1S\ ^1P\ ^1D \ldots\ ^3S_0\ ^3P_0\ ^3P_1\ ^3P_2 \ldots$; dafür gibt es nur Zeemaneffekte, Lage der Terme und Intensitäten. Bei den s-Termen ist die Zusammenfassung von $s_3\ s_4\ s_5$ zum ^3P-Triplett überzeugend. Für die p-Terme ist wohl die von Goudsmit** und mir*** auf Grund der Zeemaneffekte angegebene Zuordnung zu den Symbolen die wahrscheinlichste.

Für Ni, Cu^+, Pd und Ag^+ gibt Shenstone eine Zuordnung der tiefen $d^9 s\ ^3D$- und ^1D-Terme zu höheren Seriengliedern und zu den beiden dem $d^9\ ^2D$-Dublett von Ni^+, Cu^{++}, Pd^+, Ag^{++} entsprechenden Grenzen. Es geht bei ihm der tiefere Term $^3D_3$ zur tieferen Grenze, der höhere Term $^1D_2$ zur höheren Grenze. Für die von McLennan und Smith**** gegebene Zuordnung der $d^9\,d$-Terme des Pd zu den Symbolen $^{1,3}S\ ^{1,3}P \ldots$ besteht jetzt auch kein Grund mehr.

---

* A. G. Shenstone, l. c., gibt empirische Gründe für die Bevorzugung der Paschenschen Zuordnung.

** S. Goudsmit, ZS. f. Phys. **32**, 794, 1925.

*** F. Hund, ebenda **33**, 345, 1925.

**** A. G. Shenstone, Phys. Rev. **29**, 380, 1927 und **31**, 317, 1928; vgl. auch (Ga^{+++}, Ge^{4+}); J. E. Mack, O. Laporte und R. J. Lang, Phys. Rev. **31**, 1124, 1928; I. C. Mc Lennan und H. G. Smith, Proc. Roy. Soc. (A) **112**, 110, 1926.

Über die Überführung angeregter $2\,^3P_1$-Hg-Atome in den metastabilen Zustand $2\,^3P_0$.

Von **H. Klumb** und **Peter Pringsheim** in Berlin.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 6. November 1928.)

Die Absorbierbarkeit der von einer wassergekühlten Hg-Bogenlampe ausgesandten Linie 4047 Å in Hg-Dampf, dem verschiedene Fremdgase (He–Ne, Ar, N_2, CO, CO_2, H_2O) zugemischt sind, wird mit Hilfe einer Photozelle gemessen in Abhängigkeit vom Drucke des Fremdgases, dem Drucke von Verunreinigungen und von der Intensität der Querbeleuchtung, durch deren Strahlung ein Teil der Hg-Atome im Absorptionsraum in den angeregten Zustand $2\,^3P_1$ versetzt wird. Die erhaltenen Kurven werden an Hand theoretisch abgeleiteter Gleichungen diskutiert. Die extrem starke Wirkung des N_2, welche die aller anderen Gase um ein Vielfaches übertrifft, wird, wenigstens teilweise, auf eine Linienverbreiterung infolge eines Resonanzphänomens zurückgeführt.

Die Überführung von Hg-Atomen aus dem angeregten Zustand $2\,^3P_1$ in den metastabilen Zustand $2\,^3P_0$ durch Zusammenstöße mit fremden Molekülen ist, wenn auch die Möglichkeit dieses Prozesses wohl schon vorher außer Zweifel stand, fast gleichzeitig auf rein optischem Wege durch R. W. Wood* und K. Donat** zuerst beobachtet worden. Donat verwandte dabei die mehr indirekte Methode der sensibilisierten Fluoreszenz, wobei die Existenz metastabiler Atome erschlossen wird aus ihrer Fähigkeit, Anregungsenergie auf die gleichzeitig anwesenden Tl-Atome zu übertragen, ohne selbst Strahlung zu emittieren — auf diese Versuche werden wir weiter unten zurückkommen. Wood dagegen beobachtete direkt das Auftreten von dem Hg $2\,^3P_0$ angehörenden Linien im Absorptionsspektrum des Quecksilbers, wenn er dem durch Einstrahlung der Resonanzlinie 2537 Å angeregten Dampf bestimmte Fremdgase zusetzte; insbesondere die Absorptionslinie 4047 Å ($2\,^3P_0 \rightarrow 2\,^3S_1$) hat er unter verschiedenen Versuchsbedingungen mit einer Lummer-Gehrcke-Platte photographiert, im wesentlichen aber beschäftigte er sich in der zitierten sowie in mehreren darauf folgenden Arbeiten*** nicht mit diesem Absorptionsphänomen, sondern mit der aus ihm resultierenden „stufenweisen" Fluoreszenzanregung und der Abhängigkeit der Intensität in den einzelnen Fluoreszenzlinien von den Versuchsbedingungen. Die

---

* R. W. Wood, Proc. Roy. Soc. (A) **106**, 679, 1924.

** K. Donat, ZS. f. Phys. **29**, 345, 1924.

*** R. W. Wood, Phil. Mag. (6) **50**, 774, 1925; ebenda (7) **4**, 466, 1927; Journ. Franklin Inst. **205**, 481, 1928; derselbe und E. Gaviola, Phil. Mag. (2) **6**, 271, 352, 1928.

letztere ist aber keineswegs ausschließlich oder auch nur eindeutig durch die Zahl der im Dampfe vorhandenen $2\,^3P_0$-Atome bestimmt, sondern in erster Linie durch die Intensitätsverteilung im Spektrum der anregenden Primärstrahlung und gerade die Untersuchung dieses Zusammenhangs bildet den Hauptinhalt der betreffenden Arbeiten. Andererseits wird aber auch bereits in der ersten von ihnen und dann immer wieder die weitgehend ungleiche Wirksamkeit verschiedener Zusatzgase betont, insbesondere die Ausnahmestellung, die dem Stickstoff in dieser Richtung zuzukommen scheint, ohne daß freilich dieser Seite des Problems eine besondere quantitative Untersuchung zuteil wurde.

Natürlich ist auch die Absorbierbarkeit einer dem $2\,^3P_0$-Atom angehörenden Linie in einer Dampfschicht kein wirkliches Maß für die Zahl dieser Atome im Volumenelement, es sei denn, daß man auf unendlich dünne absorbierende Schichten reduziert und überdies ganz bestimmte Annahmen über die Intensitätsverteilung in der eingestrahlten Linie machen kann*. Und die Verhältnisse werden sogar dadurch noch ungünstiger, daß bei der von uns ebenso wie von Wood verwandten Methode der optischen Anregung durch Querbeleuchtung die primär angeregten $2\,^3P_1$-Atome keineswegs gleichmäßig im Absorptionsraum verteilt sind. Gleichwohl kann man auf diese Weise ziemlich weitgehende Aufschlüsse in mehrfacher Beziehung erlangen, wenn man nur die Versuchsbedingungen nach allen Richtungen variiert und die dabei erhaltenen Resultate einer eingehenden Diskussion unterzieht.

Problemstellung. Die uns interessierende Frage gilt nicht eigentlich der Zahl N_0 der unter bestimmten Bedingungen im Zustand $2\,^3P_0$ vorhandenen Atome, sondern der Wahrscheinlichkeit des Überganges $2\,^3P_1 \rightarrow 2\,^3P_0$ beim Zusammenstoß der angeregten Atome mit Fremdgasmolekülen. Ganz unabhängig von dieser Wahrscheinlichkeit würde, wie man ohne weiteres sieht, N_0 immer unendlich werden, wenn es nicht auch Prozesse gäbe, durch welche die metastabilen Atome wieder zerstört werden. Es gilt also zunächst die Natur aller derartigen Prozesse anzugeben und ihren Einfluß auf die Größe der sich im Gleichgewicht einstellenden Zahl N_0 zu berechnen. Dahin zielende Überlegungen sind zwar schon mehrfach durchgeführt worden, so vor allem in letzter Zeit von P. D. Foote**, dessen Rechnungen weitgehend mit den von uns angestellten überein-

* Wirklich quantitative Resultate kann man sicher sehr viel besser durch Messung der anomalen Dispersion erhalten, wie sie z. B. am angeregten Neon von R. Ladenburg durchgeführt werden (ZS. f. Phys. **48**, 15, 1928).

** P. D. Foote, Phys. Rev. (2) **30**, 288, 1927.

stimmen; wenn wir diese gleichwohl hier noch einmal mitteilen, so mag das dadurch begründet werden, daß wir einesteils die Footesche Darstellungsweise für weit weniger übersichtlich halten als die unsere, die überdies in mancher Beziehung doch auch vollständiger ist, daß wir aber vor allem anderenteils zur Diskussion unserer Resultate der in den Gleichungen vorkommenden Konstanten bedürfen, deren Definition sich am leichtesten durch die Herleitung eben dieser Gleichungen geben läßt.

Es sei J die in Quanten gemessene Intensität der einfallenden Primärstrahlung, a messe den Bruchteil dieser Strahlung, der im Dampfvolumen absorbiert wird; wenn keinerlei störende Zusammenstöße stattfinden, so wird die gesamte absorbierte Energie reemittiert. Ist die unter diesen Umständen im Gleichgewicht vorhandene Zahl der angeregten Atome gleich Z und τ ihre mittlere Lebensdauer, so ist:

$$a \,.\, J\,dt = \frac{Z}{\tau}\,dt. \tag{1}$$

Dabei ist τ etwa gleich 10^{-7} sec und Z eine nur von J abhängige Konstante.

Nun mögen durch Zusammenstöße mit Fremdgasmolekülen die erregten Atome teilweise, ehe sie ausstrahlen, in den metastabilen Zustand gelangen; die diesen Prozessen eigentümliche mittlere Stoßzeit (bestimmt durch den Partialdruck p der Fremdgasmoleküle und einen Wahrscheinlichkeitskoeffizienten) sei T. Dann finden, wenn schon in geringerer Zahl, auch Übergänge im umgekehrten Sinne ($P_0 \to P_1$) statt*, mit einer mittleren Stoßzeit, die gleichfalls p proportional ist, also gleich αT $(0 < 1/\alpha < 1)$ gesetzt werden kann. Für den Gleichgewichtszustand gilt jetzt unter Berücksichtigung von (1)

$$\left.\begin{aligned} \frac{Z}{\tau}\,dt + \frac{N_0}{\alpha T}\,dt = \frac{N_1}{\tau}\,dt + \frac{N_1}{T}\,dt = N_1\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T}\right)dt \\ 1S \to P_1 + P_0 \to P_1 = P_1 \to 1S + P_1 \to P_0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{N_1}{T}\,dt = \frac{N_0}{\alpha T}\,dt \\ P_1 \to P_0 = P_0 \to P_1, \end{aligned}\right\}$$

wobei N_1 und N_0 die im Gleichgewicht wirklich vorhandenen Atome im

* Auf die relativ große, in einer früheren Arbeit nicht berücksichtigte Häufigkeit dieser Vorgänge hat zum ersten Male J. Franck hingewiesen (G. Cario und J. Franck, ZS. f. Phys. **37**, 619, 1926). Diese Bemerkung scheint Foote entgangen zu sein, dem aber doch das Verdienst bleiben dürfte, einen quantitativen Ansatz für die Wahrscheinlichkeit solcher Stöße erster Art gemacht zu haben.

Zustand P_1 bzw. P_0 zählen. Durch Kombination der beiden Gleichungen erhält man:

$$N_0 = CJ \tag{3}$$

ganz unabhängig von p, was auch im entferntesten nicht mit den wirklichen Verhältnissen übereinstimmen kann.

Führt man weitere Ursachen ein, durch welche die erregten Atome vollständig zerstört werden, so können diese entweder auf $2\,^3P_1$ oder auf $2\,^3P_0$ einwirken, sie sollen im folgenden konsequent durch die Indizes 1 und 0 unterschieden werden, zu ihrem Maße diene auch wieder die mittlere Zeit, nach der sie zur Katastrophe führen. Diese Ursachen können prinzipiell von dreierlei Art sein: 1. Sie sind vom Drucke des Fremdgases unabhängig (Zusammenstöße mit spurenweisen Verunreinigungen, etwa H_2 oder O_2, die bereits bei $p = 0$ noch im Beobachtungsraum vorhanden sind; Zerstörung angeregter Atome durch Absorption von Licht, spontane strahlende Übergänge aus dem metastabilen Zustand): mittlere „Stoßzeit“ T_c^0 bzw. T_c^1. 2. Sie sind proportional dem Drucke des Fremdgases, sei es, daß dieses selbst auch zu „auslöschenden“ Stößen fähig ist, oder daß es einen bestimmten Bruchteil anderer Verunreinigungen enthält, mit den entsprechenden p umgekehrt proportionalen Stoßzeiten T_p^0 bzw. T_p^1. 3. Sie nehmen mit p ab, die zugehörigen „Stoßzeiten“ also wachsen mit p. Unter diese Kategorie fallen wohl nur die Wandzusammenstöße, deren Häufigkeit mit sinkender Diffusionsgeschwindigkeit gegen 0 konvergiert. Gemäß den von Hertz und Harries* durchgeführten Rechnungen kann man die Zeit t, in der im Mittel ein angeregtes Atom aus dem Gasvolumen an die Wand gelangt, in erster Annäherung p direkt proportional setzen.

Es sind also nunmehr folgende Größen zu berücksichtigen:

Z = Zahl der Atome $2\,^3P_1$ im Gleichgewicht ohne Zusammenstöße,
N_1 = Zahl der Atome $2\,^3P_1$ im Gleichgewicht mit Zusammenstößen,
N_0 = Zahl der Atome $2\,^3P_0$ im Gleichgewicht mit Zusammenstößen,
τ = natürliche Lebensdauer der Atome $2\,^3P_1$,
$T \sim p$ = mittlere Stoßzeit für die Überführung $2\,^3P_1 \rightarrow 2\,^3P_0$,
$\alpha T \sim p$ = mittlere Stoßzeit für die Überführung $2\,^3P_0 \rightarrow 2\,^3P_1$,
T_c^1 und T_c^0 = mittlere Zerstörungszeit der Atome $2\,^3P_1$ bzw. $2\,^3P_0$ durch vom Fremdgasdruck p unabhängige Ursachen,
T_p^1 und $T_p^0 \sim \frac{1}{p}$ = mittlere Zerstörungszeit der Atome $2\,^3P_1$ bzw. $2\,^3P_0$ durch mit p wachsende Ursachen,
$t \sim p$ = mittlere Zerstörungszeit durch Wandzusammenstöße.

* ZS. f. Phys. **32**, 298, 1925; **46**, 177, 1927.

Unter Berücksichtigung aller dieser Größen treten an Stelle von (2) die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{N_0}{\alpha T}+\frac{Z}{\tau} &= N_1\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{T_c^1}+\frac{1}{T_p^1}+\frac{1}{T}+\frac{1}{t}\right) \\ &= \frac{N_1}{\tau}\left(1+\frac{\tau}{T_c^1}+\frac{\tau}{T_p^1}+\frac{\tau}{T}+\frac{\tau}{t}\right) \\ N_0\left(\frac{1}{\alpha T}+\frac{1}{T_c^0}+\frac{1}{T_p^0}+\frac{1}{t}\right) &= N_1\cdot\frac{1}{T}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Da unsere Überlegungen sich wesentlich auf Zusatzgase beziehen, durch welche die Resonanzstrahlung des Quecksilbers nicht stark ausgelöscht wird, und wir ebenso starke anderweitige Verunreinigungen ausschließen, sind sicher T_c^0, T_c^1 und $T_p^1 \gg \tau$; ebenso sind in dem von uns betrachteten Druckintervall stets die Diffusionszeiten $t \gg \tau$, so daß wir also die Glieder mit τ/T_c^0, τ/T_c^1, τ/T_p^1 und τ/t ohne merklichen Fehler vernachlässigen dürfen. Dann erhält man schließlich

$$N_0 = \frac{Z}{\frac{1}{\alpha}+\frac{\tau}{T_p^0}+\frac{T}{T_c^0}+\frac{T}{T_p^0}+\frac{T}{t}}\,. \tag{5}$$

Da in (5) die Glieder $1/\alpha$ und T/T_p^0 unabhängig vom Drucke p sind, möge

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{T}{T_p^0} = b \tag{6}$$

gesetzt werden, wobei für die Größenordnung von b praktisch nur der Wert von $1/\alpha$ maßgebend ist, da wohl stets $T_p^0 \gg T$. Lassen wir zunächst auch noch das Glied T/t unberücksichtigt, das p^2 umgekehrt proportional ist, und folglich nur bei den kleinsten Drucken stärker mitwirkt, so kann man schreiben:

$$N_0 = \frac{Z}{b+\frac{\tau}{T_p^0}+\frac{T}{T_c^0}} = \frac{Z}{b+\beta\cdot p+\gamma\frac{1}{p}}\,.^{*} \tag{7}$$

Das bedeutet, daß für kleine Fremdgasdrucke die Zahl N_0 mit wachsendem p erst zunimmt, dann ein Maximum erreicht, das unter Umständen sehr flach verlaufen kann, und schließlich wieder absinkt, um für sehr große p gegen 0 zu konvergieren.

---

* Diese Gleichung ist ihrem Inhalt nach identisch mit der Gleichung (13) bei Foote, l. c.

Setzt man für b (bzw. für $1/\alpha$) den Wert $2 \cdot 10^{-4}$ (jeder 5000. Stoß hat die Energie $=$ 0,2 Volt für den Übergang $2\,^3P_0 = 2\,^3P_1$, was der Größenordnung nach bei Zimmertemperatur zutrifft), ferner $\tau = 10^{-7}$, $T_p^0 = \dfrac{10^{-2}}{p}$ (jeder 10^5-te Stoß zerstört ein $2\,^3P_0$-Atom), $T = 10^{-7}$ (etwa jeder zweite Stoß überführt $2\,^3P_1$ nach $2\,^3P_0$) und $T_c^0 = 10^{-3}$ (was bei einer konstanten Verunreinigung mit etwa $2 \cdot 10^{-5}$ mm H_2 erreicht wäre), so erhält man nach Gleichung (7) die Kurve I der Fig. 1*. Die hier benutzten Zahlen besitzen zunächst, abgesehen von τ, keinerlei Bedeutung, immerhin entspricht ihre Größenordnung durchaus den Verhältnissen, wie sie bei unseren Versuchen vorgelegen haben dürften. Berücksichtigt man auch noch das Glied mit T/t der Gleichung (5) (Diffusionsglied), so wird dadurch die Kurve der Fig. 1 nur in ihrem ersten Teile (unterhalb $p = 0{,}1$ mm) etwas verschoben, dergestalt, daß der Anstieg weniger steil erfolgt.

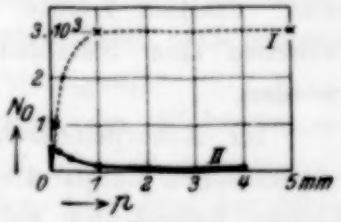


Fig. 1.
Zahl N_0 der $2\,^3P_0$-Atome als Funktion des Fremdgasdruckes p unter verschiedenen Voraussetzungen.

Versuchsanordnung. Die von uns verwandte Versuchsanordnung ist in Fig. 2 skizziert. Eine wassergekühlte Bogenlampe wurde durch eine Projektionslinse L_1 von langer Brennweite in der Mitte des

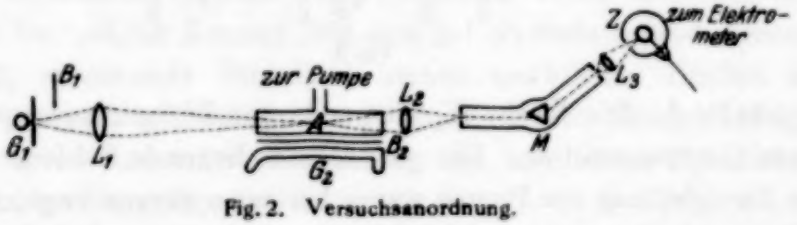


Fig. 2. Versuchsanordnung.

Absorptionsrohres A abgebildet, und die von dort austretende Strahlung durch eine zweite Linse L_2 auf den Kollimatorspalt eines kleinen als Monochromator dienenden Spektrographen kondensiert. Vom Austrittsspalt des Monochromators, der nur das Licht der Linie 4047 hindurch ließ, wurde schließlich durch L_3 ein Bild in das Innere der als „schwarzer Körper" ausgebildeten Kaliumphotometerzelle Z entworfen; die Kathode von Z stand mit dem Faden eines Saitenelektrometers in Verbindung, der über einen Widerstand von $10^9\,\Omega$ geerdet war. Unmittelbar unterhalb von A befand sich eine gleichfalls wassergekühlte und mit Magnetfeld versehene große Hg-Bogenlampe (Bogenlänge $=$ etwa 15 cm) Q_2.

* Die Kurve würde für $p = 100$ mm erst wieder auf $1 \cdot 10^3$ heruntergehen.

Sowohl das von ihr ausgehende Licht („Querbeleuchtung"), das zur primären Anregung des Hg-Dampfes in A diente, als auch das von Q_1 stammende „Meßlicht" konnte durch geeignete bewegliche Blenden B_1 und B_2 von A abgeschirmt werden; beide Blenden ließen sich durch kleine Elektromagnete steuern, so daß der Beobachter am Elektrometer die nötigen Handgriffe sämtlich von seinem Platze auszuführen imstande war. Endlich konnte die Intensität der Querbeleuchtung durch Einschieben einer Netzblende im Verhältnis von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{8}$ geschwächt werden.

Im Absorptionsrohr A, einem zylindrischen Quarzglasgefäß mit angeblasenen planparallelen Endflächen von 2 cm Durchmesser und 12 cm Länge, befand sich kein flüssiges Hg als Bodenkörper, doch stand er dauernd mit einem Hg-Barometerverschluß (V_1 in Fig. 3) in Verbindung, so daß er stets bei Zimmertemperatur gesättigten Quecksilberdampf enthielt. Jenseits von B_1 führte die Röhrenleitung über eine mit flüssiger

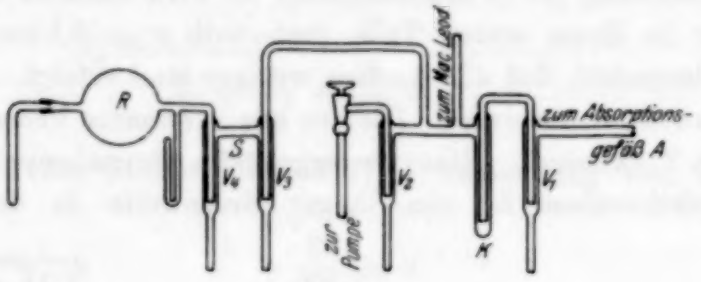


Fig. 3.

Luft gekühlte Ausfriertasche K_1 einerseits zur Diffusionspumpe, andererseits zum Gasreservoir R. Die vor diesem liegende Schleuse S, ebenso wie die Zweigleitung zur Pumpe waren bei den späteren Versuchen mit N_2 ebenfalls durch Barometerverschlüsse abzusperren, so daß das reine Gas nirgends mit gefetteten Hähnen in Berührung kam*.

Zur Verwendung gelangten Stickstoff, ein Helium-Neongemisch, das zur Reinigung längere Zeit über mit flüssiger Luft gekühlter Holzkohle stand, Argon, CO, CO_2 und Wasserdampf. Der Stickstoff wurde durch Erhitzung von Natriumazid gewonnen, das Kohlenoxyd durch Erhitzung

* Ob damit viel gewonnen wird, mag dahingestellt bleiben; denn während die Hahnfettdämpfe durch Ausfriervorrichtungen weitgehend beseitigt werden können, geben Barometerabschlüsse, wenn nicht ganz besondere, meist wohl vernachlässigte Vorsichtsmaßregeln berücksichtigt werden, bei jedem Öffnen und Schließen Spuren von im Hg okkludierten oder an den Barometerrohrwänden adsorbierten nicht kondensierbaren Gasen ab. Auf diesen Umstand hat uns nachträglich Herr Gaede hingewiesen.

eines Gemisches von Calciumoxalat und Calciumoxyd, die Kohlensäure durch Erhitzung von Magnesiumcarbonat — in allen Fällen nach vorangehender sorgfältiger Trocknung und Entgasung der Ausgangsmaterialien im Hochvakuum unter gleichzeitiger Erwärmung; das Wasser wurde mehrfach im Vakuum umdestilliert, der Wasserdampfdruck nachher durch entsprechende Temperaturbäder, in die der Wasserbehälter eintauchte, reguliert. Die Edelgase wurden uns in dankenswerter Weise von der Firma Linde, Höllriegelskreuth, zur Verfügung gestellt, das Argon enthielt nach Angabe der Firma weniger als 0,5 % Stickstoff als Verunreinigung.

Jede Messung bestand aus drei Ablesungen am Elektrometer. 1. Blenden B_1 und B_2 geschlossen: Nullpunkt; 2. B_1 offen, B_2 geschlossen: Intensität des Meßlichtes $= J_1$; 3. B_1 und B_2 offen: Intensität des durch Absorption geschwächten Meßlichtes $= J_2$. Das Verhältnis $\varepsilon = \frac{J_1 - J_2}{J_1}$ galt dann als Maß für die Absorbierbarkeit des Meßlichtes im Dampfe. Die drei Ablesungen erfolgten unmittelbar hintereinander innerhalb weniger Sekunden; um Lampenschwankungen möglichst zu eliminieren, wurde jeder Punkt mehrfach gemessen, und der Mittelwert aus diesen Resultaten bestimmt. Da die Intensität der Resonanzlinie in der „Querbeleuchtung" bei jedesmaliger Zündung der Lampe Q_2 etwas verschieden war, differieren die an verschiedenen Tagen unter sonst konstanten Bedingungen erhaltenen Absolutwerte manchmal nicht unbeträchtlich, der qualitative Verlauf der Kurven ließ sich jedoch stets reproduzieren. Daß das von Q_2 stammende Streulicht keinen merklichen Einfluß auf die Elektrometerausschläge hatte, wurde durch Beobachtungen festgestellt, bei denen unter dauernder Abblendung des Meßlichtes B_2 abwechselnd geöffnet und geschlossen wurde.

Versuche mit Stickstoff. Die Kurven in Fig. 4 und 5 geben die erhaltenen Werte für ε mit wachsendem Stickstoffdruck p; für $p = 0$ ist $\varepsilon = 0$, d. h. die Zahl der auch unter diesen Bedingungen nach den Woodschen Beobachtungen über stufenweise Anregung sicher vorhandenen $2\,^3P_0$-Atome ist so klein, daß sie unter unserer Meßgenauigkeit liegt. Im Druckintervall von 0 bis 1 mm zeigen die Kurven einen steilen Anstieg, oberhalb von 2 mm fast vollständige Konstanz; in einigen Meßreihen, die bis zu einem N_2-Druck von 20 mm verfolgt wurden, läßt sich ein geringer Abfall von ε erkennen, der gerade außerhalb der Meßfehler liegt. Vergleicht man die experimentellen Kurven mit der theoretisch konstruierten von Fig. 1, so ergibt sich eine fast vollständige Übereinstimmung. Es wurde nun zunächst untersucht, ob ein wesentlicher Anteil

der vom Fremdgasdruck unabhängigen Zerstörung der metastabilen Atome [also des Wertes von T_c^0 in Gleichung (7)] durch die Einstrahlung von in diesen Atomen absorbiertem Lichte verursacht wird; zu diesem Zwecke wurde zwischen Q_2 und A ein Bromdampffilter nach Wood eingeschoben, das die Resonanzlinie nur wenig schwächt, den violetten Teil des Spektrums dagegen praktisch nicht durchläßt. Die Meßresultate wurden dadurch nicht merklich geändert: die in Fig. 4 als Kreise eingetragenen Punkte sind unter diesen Bedingungen gewonnen. Die fraglichen Zerstörungsprozesse müssen also durch von vornherein im Absorptionsrohr enthaltene Verunreinigungen erklärt werden. Der nach den Angaben auf S. 614 dazu nötige O_2- oder H_2-Druck von etwa $2 \cdot 10^{-5}$ mm ist unter unseren Versuchsbedingungen durchaus möglich, da weder das Quarzgefäß noch die Pumpenzuleitung in unserer Anordnung ausgeheizt werden

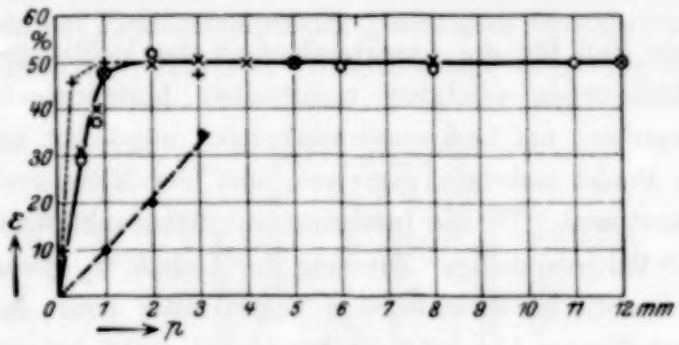


Fig. 4.
Absorption ε der Hg-Linie 4047 Å im angeregten Hg-Dampf als Funktion des N_2-Druckes.
——— „reiner" Stickstoff. — — — mit 10^{-4} mm H_2. ····· mit 12 mm He—Ne.

konnten. Eine absichtliche konstante Verunreinigung mit 10^{-4} mm H_2 ergab die in Fig. 4 punktiert gezeichnete Kurve, mit wesentlich flacherem Anstieg für kleine Drucke, durchaus im Einklang mit der Theorie. Ein konstanter Zusatz von 12 mm Helium-Neongemisch dagegen hatte eine starke Vergrößerung der ε-Werte zur Folge, solange die Stickstoffdrucke unter 0,5 mm lagen (Kreuze in Fig. 4), während er für den weiteren Kurvenverlauf ohne Einfluß blieb; hier dürfte es sich also um die zu erwartende Herabsetzung der Diffusion [Vergrößerung von A in Gleichung (5)] handeln, die nur bei geringen Drucken des N_2 selbst eine Rolle spielt. Die gleiche Wirkung hätte natürlich auch eine merkliche Verunreinigung des zugesetzten Edelgases mit Stickstoff, doch ist das bei der vorangehenden Behandlung des Gases kaum zu erwarten. Wurde endlich statt des reinen N_2 Bombenstickstoff in die Apparatur eingelassen, so daß nun die mit wachsendem Stickstoffdruck parallel zunehmende Verunreinigung sehr viel größer war [Abnahme von T_p in Gleichung (5)], so wurde einer-

seits ein weniger hoher Maximalwert von ε erreicht, während andererseits der Abfall hinter dem Maximum sehr viel deutlicher war.

Ehe auf eine weitere Diskussion der bisherigen Resultate eingegangen werden kann, muß noch gezeigt werden, daß der Verlauf der Kurve in Fig. 4 wirklich im wesentlichen durch die einem Höchstwert zustrebende Zahl der metastabilen Atome (N_0) verursacht wird; denn auch, wenn N_0 mit steigendem p immer weiter wüchse, könnte ε im Idealfall niemals 100 % übersteigen; in Wahrheit kann es, da ja die Breite der Linie im Meßlicht sehr viel größer ist als im Absorptionsspektrum des kalten Dampfes, diesen Wert praktisch nicht erreichen, sondern wird sich einem bestimmten Höchstwert ε_m annähern, dessen Höhe von dem Verhältnis der beiden Linienbreiten abhängt, bzw. darüber hinaus nur

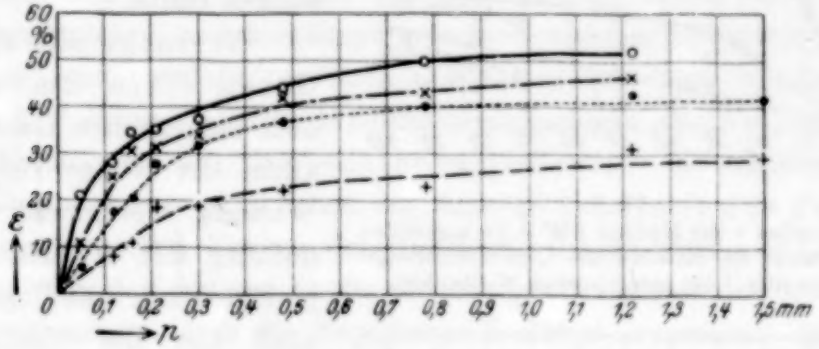


Fig. 5.
Absorption ε der Hg-Linie 4047 Å im angeregten Hg-Dampf als Funktion des N_2-Druckes p bei verschiedenen Querbeleuchtungsintensitäten $\bar{J}$.
○ $\bar{J} = 100$, × $\bar{J} = 50$, ● $J = 25$, + $J = 12{,}5$.

sehr langsam steigen. Um diese Verhältnisse näher zu untersuchen, wurden eine Reihe von Kurven mit variabler Intensität $\bar{J}$ der Querbeleuchtung aufgenommen, wobei mit Sicherheit angenommen werden darf, daß Z und also unter sonst konstant gehaltenen Bedingungen N_0 dem $\bar{J}$ streng proportional ist. Wie man aus Fig. 5 sieht, tragen die Kurven für alle Werte von $\bar{J}$ denselben Charakter, sie erreichen insbesondere alle bei angenähert demselben Drucke $p = 1$ mm den Höchstwert ε_m. Während aber für kleine Drucke, wo N_0 für alle $\bar{J}$-Werte noch relativ klein ist, auch die ε den $\bar{J}$ ziemlich gut proportional sind, gilt das im Bereich größerer Drucke nicht mehr, wie aus einem Vergleich der Kurven in Fig. 6 ersichtlich, in denen ε als Funktion von $\bar{J}$ bei drei verschiedenen Stickstoffpartialdrucken dargestellt ist. Das bedeutet nichts weiter, als daß, wie schon in der Einleitung bemerkt, ε als einigermaßen quantitatives Maß von N_0 nur gelten kann, solange es nicht zu große Werte erreicht, etwa $\varepsilon < 20\,\%$, daß dagegen späterhin ε viel

langsamer wächst als N_0. Will man also exakte Resultate mit dieser Methode erzielen, so müßte man mit möglichst kleinen Querbeleuchtungsintensitäten arbeiten, was freilich dann auch wieder die Meßgenauigkeit beeinträchtigt; wo es sich dagegen, wie hier, um mehr größenordnungsmäßige Betrachtungen handelt, ist auch das bequemere Arbeiten mit großen Intensitäten $\bar{J}$ zulässig, insbesondere sieht man aus Fig. 5, daß der Verlauf der Kurve für den höchsten $\bar{J}$-Wert wegen der mangelnden Proportionalität zwischen ε und N_0 nur insoweit einer Korrektur bedarf, daß sie, um auch streng für die N_0 gültig zu sein, lediglich im Druckbereich $p < 0{,}5$ mm relativ etwas weniger steil ansteigen sollte.

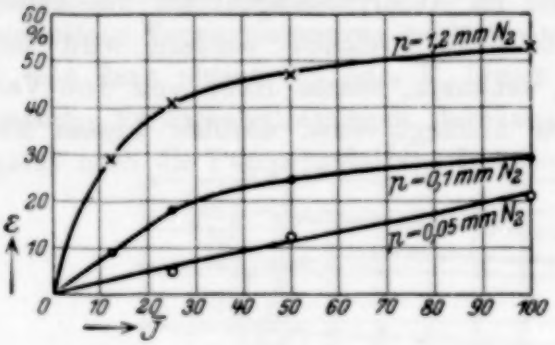


Fig. 6.
Absorption ε der Hg-Linie 4047 Å im angeregten Hg-Dampf als Funktion der Querbeleuchtungsintensität $\bar{J}$ bei verschiedenen N_2-Drucken.

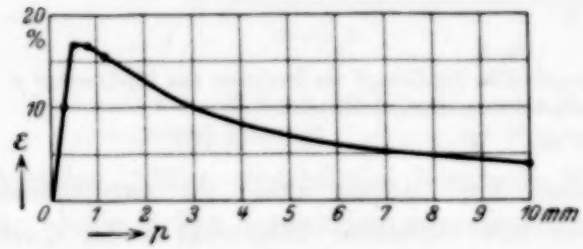


Fig. 7.
Absorption ε der Hg-Linie 4047 Å im angeregten Hg-Dampf als Funktion des Wasserdampfdruckes p.

Versuche mit anderen Gasen. Von den anderen oben aufgezählten Gasen hatte allein der Wasserdampf eine Wirkung, die in der Größenordnung mit der des N_2 vergleichbar ist; allerdings betrug auch hier der Maximalwert von ε, der bei $p = 0{,}5$ mm schon erreicht war, nur 17 %, auch war der Abfall von ε hinter dem Maximum viel deutlicher, für $p = 10$ mm betrug ε bloß noch 4 % (Fig. 7). Da bei diesen Meßreihen die Querbeleuchtung immer nur wenige Sekunden (während der Beobachtung) zugelassen wurde, ist dieser schnelle Abfall nicht durch eine andere zunächst sehr überraschende Erscheinung zu erklären: wenn nämlich die Querbeleuchtung längere Zeit eingeschaltet blieb, so ging bei sonst ganz konstant gehaltenen Bedingungen die Absorption ε immer mehr zurück (sie sank z. B. in einer Viertelstunde auf etwa ein Fünftel des Maximalwertes), um schließlich ganz zu verschwinden. Dies Phänomen ist inzwischen durch die Versuche von Wood und Gaviola vollkommen aufgeklärt worden: durch die intensive Bestrahlung des Wasserdampfes in Gegenwart von Hg-Dampf mit dem Lichte der Hg-Resonanzlinie wird jener dissoziiert, so daß nun

durch das neugebildete H_2 oder O_2 die angeregten Hg-Atome sehr schnell zerstört werden.

Mit Argon oder dem He-Ne-Gemisch wurde überhaupt keine merkliche Wirkung erhalten; mit CO erreichte die Absorption für $p = 0{,}1$ mm den noch mit Sicherheit meßbaren Wert von 2 %, war für $p = 0{,}3$ mm kaum noch zu beobachten und für $p = 1$ mm bereits wieder vollständig verschwunden. Entsprechend der starken „auslöschenden Wirkung" auf die Hg-Resonanzstrahlung, die Stuart für CO angibt (Halbwertdruck 0,4 mm), werden auch die Hg-Atome im $2\,^3P_0$-Zustand durch Zusammenstöße mit CO-Molekülen mit großer Wahrscheinlichkeit zerstört: beträgt der Wert von ε bei Anwesenheit von 0,5 mm N_2 30 %, so wird er durch Zulassen von 2 mm CO auf 4 % herabgedrückt. Ähnlich wie CO verhielt sich auch CO_2, auch hier nur sehr niedrige Werte von ε bei den kleinsten Drucken, und überhaupt kein nachweisbarer Effekt bei Drucken > 1 mm; und ebenfalls zerstörende Wirkung auf durch N_2-Zusatz erzeugte $2\,^3P_0$-Atome, allerdings beträchtlich geringer als beim CO.

Diskussion der Beobachtungsresultate. Die verhältnismäßig gute Übereinstimmung zwischen der theoretischen Kurve I in Fig. 1 und den experimentellen Kurven der Fig. 4 und 5 berechtigt nicht, die zur Konstruktion der ersteren in die Gleichung (7) eingesetzten Konstanten als bereits genau durch das Experiment bestätigt anzusehen. Man kann sie (da man ja eine beträchtliche Zahl von Konstanten zur Verfügung hat) ziemlich weitgehend verändern und dabei eine nicht wesentlich schlechtere Übereinstimmung erzielen. Da allerdings der Wert von α von der Größenordnung 10^{-3} bis 10^{-4} bei Zimmertemperatur wohl eindeutig feststeht, so ist die Größenordnung der anderen unbekannten Konstanten sicher auch nicht sehr falsch gewählt, sobald man mit Foote annimmt, daß praktisch alle Zusammenstöße von Stickstoffmolekülen mit angeregten Hg-Atomen diese in den metastabilen Zustand überführen. Auch dann bleibt es freilich noch ganz unsicher, ob die durch T_p^0 charakterisierten Stöße, die den „auslöschenden" Übergang $2\,^3P_0 \rightarrow 1\,^1S_0$ auslösen, mit sehr kleinem Nutzeffekt dem Stickstoff selbst oder aber einer diesem beigemischten Verunreinigung zugehören. Nach dem Footeschen Postulat, nach dem einem bestimmten Stoß eine bestimmte Wirkung mit 100 %iger Sicherheit entspricht, müßte das letztere richtig sein, was nach unserer Meinung jedoch im allgemeinen nicht zutreffen dürfte. Uns scheint nämlich dieses Postulat nicht allein mit allen sonstigen Erfahrungen im Widerspruch zu stehen (wir erinnern nur an die schönen Versuche von Beutler und Josephi über die „Quantenresonanz" bei den Zusammen-

stößen von angeregten Hg-Atomen und Na-Atomen*), sondern auch mit Footes eigenen Überlegungen nur schwer sich in Einklang bringen zu lassen: wenn es manche Zusammenstöße angeregter Hg-Atome gibt (mit Ar oder N_2), die diese von $2\,^3P_1$ nach $2\,^3P_0$, andere (mit H_2 oder O_2), die sie von $2\,^3P_1$ nach $1\,^1S_0$, und schließlich auch solche (mit „Verunreinigungen"), die den Zustand $2\,^3P_0$ nach $1\,^1S_0$ überführen, so ist bereits damit die Wirkungsweise von Zusammenstößen weitgehend differenziert und es ist gar nicht einzusehen, warum dann nicht jedem Stoß jede dieser Wirkungen möglich sein sollte, nur mit sehr ungleicher statistischer Wahrscheinlichkeit. Wäre demgemäß auch der von uns eingesetzte Wert $T \sim \frac{10^{-7}}{p}$ um mehrere Zehnerpotenzen falsch (weil eben die Übergangswahrscheinlichkeit $2\,^3P_1 \to 2\,^3P_0$ bei Zusammenstößen mit N_2 viel kleiner sein könnte als 100%), so müßte man im gleichen Verhältnis auch die mittleren Stoßzeiten T_c^0 und T_p^0 ändern. Immerhin mag gerade beim N_2 die Annahme einer günstigen, nicht allzu tief unter 50% liegenden Ausbeute** für den Übergang $2\,^3P_1 \to 2\,^3P_0$ nicht ganz unberechtigt sein, eben im Hinblick auf Woods und unsere eigenen experimentellen Resultate: die Ursache hierfür wäre, entsprechend den Überlegungen von Beutler, in einem Resonanzphänomen*** zu suchen, das allerdings durch die Beziehung

* Unvereinbar mit der Footeschen Hypothese scheint uns z. B. auch die Kurve II in der von Foote übersehenen, oben zitierten Arbeit von Cario und Franck: wenn jeder Zusammenstoß mit N_2 die angeregten Hg-Atome nach $2\,^3P_0$ überführte, würde dadurch die totale mittlere Lebensdauer der Hg-Atome in den angeregten Zuständen bei 20 mm Stickstoffpartialdruck so groß, daß die Resonanzstrahlung durch einige zehntel Millimeter Wasserstoffzusatz praktisch ganz ausgelöscht werden müßte, während auf der Franckschen Kurve die Intensität mit und ohne N_2 bei gleichem H_2-Druck sich nur um etwa 30% unterscheidet. Durch Aufnahmen, die eben zur Prüfung dieser Frage der eine von uns gemeinsam mit Herrn W. Orthmann gemacht hat, konnte eine Veränderung der Hg-Resonanzintensität bei 20 mm He-Partialdruck durch Zusatz von 10^{-2} mm H_2 überhaupt nicht nachgewiesen werden, so daß man annehmen muß, daß für He-Zusammenstöße die Überführungswahrscheinlichkeit $2\,^3P_1 \to 2\,^3P_0$ nicht nur nicht 100% beträgt, sondern sogar weit unter 1% liegen dürfte.

** Das ist der Wert, den wir oben in unsere Gleichung eingesetzt haben; aber auch mit einer Ausbeute von nur 5% $\left(T \sim 10^{-6} \cdot \frac{1}{p}\right)$ ließen sich unsere Messungen in Einklang bringen, wobei dann nur den Konstanten T_p^0 und T_c^0 entsprechend andere Werte zu geben wären.

*** Vgl. z. B. H. Beutler, ZS. f. Phys. **50**, 581, 1928. Die naheliegende Vermutung, daß es sich hier um eine solche Resonanzwirkung handelt, hat auch Oldenberg schon ausgesprochen (ZS. f. Phys. **49**, 609, 1928). — Zusatz bei der Korrektur: Nach neueren Überlegungen, die Herr Beutler teilweise persönlich uns mitzuteilen die Freundlichkeit hatte, läßt sich eine wesentlich größere Resonanz-

zwischen der Größe des Kernschwingungsquants des N_2 (0,28 Volt) und der Energiedifferenz $2\,^3P_1 - 2\,^2P_0 = 0{,}21$ Volt nur sehr unvollständig erklärt wäre.

Bei den Untersuchungen mit anderen Gasen ist die außerordentliche Kleinheit des Effekts beim CO, sein vollständiges Ausbleiben beim Ar aus entgegengesetzten Gründen auffällig. Für CO könnte man am ehesten eine ähnliche Wirkung erwarten wie für N_2, teils allgemein wegen der auch in anderer Beziehung vielfach hervortretenden Ähnlichkeit im Verhalten beider Gase, teils wegen der immerhin hier etwas besser erfüllten Resonanzbedingung (Kernschwingungsquant etwa 0,25 Volt). Wollen wir daraus folgern, daß Übergänge Hg $2\,^3P_1 \rightarrow 2\,^3P_0$ durch CO ebenso häufig ausgelöst werden wie durch N_2, so kann das ganz andere Ergebnis unserer Beobachtungen nur dadurch erklärt werden, daß hier T_p^0 viel kleiner ist als beim Stickstoff, und da wir keinen Grund haben anzunehmen, daß unser CO besonders stark verunreinigt gewesen wäre, müßte dem CO selbst eine sehr starke Fähigkeit zugeschrieben werden, auch den Übergang $2\,^3P_0 \rightarrow 1\,^1S_0$ auszulösen: das ist vielleicht auch darum nicht sehr unwahrscheinlich, weil nach Stuart* durch Kohlenoxyd die Hg-Resonanzfluoreszenz selbst kaum weniger stark ausgelöscht wird als durch O_2 (mit einer auslöschenden Ausbeute von 80 %)**. Setzt man versuchsweise in Gleichung (5) $T_p^0 \sim T \sim \frac{10^{-7}}{p}$, so erhält man unter Beibehaltung der früher verwandten Werte für die anderen Konstanten die Kurve II der Fig. 1, die aber im Vergleich zur Kurve I mit stark vergrößertem Ordinatenmaßstab eingezeichnet ist. Sie erreicht bei ganz kleinen Drucken ($p = 10^{-2}$ mm) ein relativ sehr niedriges Maximum und sinkt oberhalb von $p = 1$ mm bereits wieder auf sehr kleine Werte herab, was qualitativ durchaus mit unseren Beobachtungen übereinstimmt.

Eine Mittelstellung zwischen dem N_2 und CO nimmt in seiner Wirksamkeit der Wasserdampf ein, wie man durch Vergleich der Fig. 7 mit den Kurven von Fig. 1 und Fig. 4 ersieht: das Maximum, das wesentlich niedriger liegt als beim N_2, wird auch schon bei geringeren

---

schärfe errechnen, wenn man noch eine gleichzeitige Änderung (Abnahme!) der Rotationsenergie beim N_2-Molekül berücksichtigt. Siehe hierzu auch ZS. f. Phys. **50**, 581, 1928.

* H. A. Stuart, ebenda **32**, 262, 1925.

** Gemäß der Beutlerschen Überlegung entspricht dem Übergang Hg ($2\,^3P_1 \rightarrow 1\,^1S_0$) eine Zunahme der Kernschwingungsquantenzahl des CO: $0 \rightarrow 21$ mit einer Resonanzschärfe von 0,011 Volt, der Übergang Hg ($2\,^3P_0 - 1\,^1S_0$) der Zunahme: $0 \rightarrow 20$ mit einer Genauigkeit von 0,028 Volt.

Drucken ($p = 0{,}5$ mm) überschritten, der darauf folgende Abfall drängt sich ebenfalls auf ein viel kürzeres Druckintervall zusammen. Das würde im Sinne unserer vorangehenden Überlegung bedeuten, daß die mittlere Zeit T_p^0 der den Zustand $2\,^3P_0$ auslöschenden Stöße zwar nicht wie beim CO von gleicher Größenordnung mit T ist, aber doch sehr viel kleiner als bei N_2. Diese Annahme ist gut verträglich sowohl mit der Angabe von Stuart über die auslöschende Wirkung des Wasserdampfes auf die Resonanzfluoreszenz des Hg-Dampfes als auch mit der Tatsache, daß ja der Wasserdampf durch Zusammenstöße mit angeregten Hg-Atomen allmählich zersetzt wird, also wirklich imstande ist, diesen ihre Anregungsenergie zu entziehen.

Anders liegen die Dinge im Falle des Argons. Hier bestehen zunächst sicher keinerlei Resonanzbeziehungen zwischen Anregungspotentialen des Ar im Normalzustand und des Hg, d. h. sowohl T als T_p^0 (soweit dieses nicht von Verunreinigungen herrührt) sind wohl relativ sehr groß, die entsprechenden Übergänge werden durch Stöße nur mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit ausgelöst. Da im übrigen über ihre Größe nichts bekannt ist, kann man die Konstanten — zumal auch noch die auslöschenden Stöße durch Verunreinigungen zur Verfügung stehen — leicht so festsetzen, daß die Zahl N_0 der metastabilen Atome im Gleichgewicht für alle Drucke sehr klein wird und so unserer Beobachtungsmethode entgeht. Nun existieren aber Messungen von Donat über die Verstärkung der sensibilisierten Thalliumfluoreszenz in einem Hg-Tl-Dampfgemisch bei Anregung mit der Hg-Resonanzlinie durch den Zusatz von Stickstoff oder Argon, die dadurch erklärt wird, daß die sonst unter Strahlung schnell zerfallenden angeregten Hg-Atome durch Zusammenstöße mit den Molekülen des Zusatzgases in den metastabilen Zustand versetzt werden, und so die Wahrscheinlichkeit einer Übertragung der Anregungsenergie auf die Tl-Atome vermehrt wird. Diese Wirkung müßte zunächst direkt proportional der Zahl der erzeugten metastabilen Hg-Atome sein; da sie aber für Ar nach den Donatschen Angaben nicht nur von der gleichen Größenordnung, sondern sogar absolut größer ist als für N_2, so ergibt sich ein direkter Widerspruch zu unseren Resultaten, als dessen einzige Lösung sich die Annahme zu bieten scheint, daß einerseits die Methode der sensibilisierten Fluoreszenz sehr viel empfindlicher ist als unsere Beobachtungsweise und sehr viel kleinere Zahlen N_0 von metastabilen Atomen bereits nachzuweisen gestattet, daß aber andererseits der Stickstoff eine spezifische stark auslöschende Wirkung auf die angeregten Tl-Atome ausübt (wie das z. B. Mannkopf für die Na-Resonanz

fand), so daß trotz einer viel größeren Zahl metastabiler Hg-Atome und also auch durch Stöße zweiter Art angeregter Thalliumatome doch die Thalliumfluoreszenz relativ geringe Intensität aufweist*.

Dieser Erklärungsversuch bedarf natürlich der experimentellen Nachprüfung. Ebenso möchten wir betonen, daß alle übrigen in diesem letzten Abschnitt zusammengestellten Überlegungen noch manches Hypothetische enthalten. Trotzdem glauben wir, daß sie unsere Versuchsresultate zum mindesten qualitativ richtig deuten und daß die von uns verwandte Methode durch noch weitere möglichst vielseitige Variation der Versuchsbedingungen alle aufgeworfenen Fragen auch quantitativ vollständig zu beantworten imstande sein dürfte.

Zum Schluß sei noch eine Bemerkung über die Höchstwerte der von uns bei den Versuchen mit Stickstoff erzielten Absorption ε angefügt. Dieselben schwankten je nach dem Brennen der Lampen Q_1 und Q_2 im allgemeinen zwischen 50 und 60%, in einigen Fällen wurden sogar 65% erreicht. Maßgebend ist dafür, wie wir sahen, nicht so sehr die Intensität der Querbeleuchtung Q_2, sondern wohl fast ausschließlich die Breite und Intensitätsverteilung der Linie 4047 im „Meßlicht", wie sie von der Lampe Q_1 geliefert wird; die Breite dieser Linie ist von uns nicht gemessen worden, sie ist aber ganz bestimmt sehr groß gegenüber der Dopplerbreite oder gar der natürlichen Breite einer Absorptionslinie im Quecksilberdampf von Zimmertemperatur. Wenn die Absorption bei Stickstoffzusatz gleichwohl so hohe Werte erreichen kann, so läßt sich das nur durch eine ganz anomale Verbreiterung der Absorptionslinie erklären. Wood hat auch wirklich durch photographische Aufnahmen gezeigt, daß bei höheren N_2-Drucken die Absorption (die schon bei 0,5 mm N_2 durch Lienienumkehr sich bemerkbar macht) sich fast über die ganze Breite der von der gekühlten Bogenlampe ausgesandten Linie erstreckt. In seiner letzten Veröffentlichung, gemeinsam mit Gaviola, kommt er auf diese Beobachtung zurück und sucht sie durch die Annahme zu erklären, daß Zusammenstöße mit N_2-Molekülen sehr häufig den Übergang $2\,^3P_0 \rightarrow 1\,^1S_0$ hervorrufen und daß die so sich ergebende kurze Lebensdauer des Zustandes $2\,^3P_0$ als Ursache für die relativ große Breite der Linie $2\,^3P_0 \rightarrow 2\,^3S_1$ (d. h. eben 4047 Å) anzusehen sei. Zusammenstöße mit H_2O dagegen sollen wohl den Übergang $2\,^3P_1 \rightarrow 2\,^3P_0$ mit großer Wahrscheinlichkeit auslösen, nicht aber den Übergang $2\,^3P_0 \rightarrow 1\,^1S_0$ und darum weniger verbreiternd auf die fragliche Linie wirken. Gegen diese Auffassung muß

* Siehe aber hierzu auch noch die Fußnote ** auf S. 626.

angeführt werden, daß nach unseren bisherigen Kenntnissen keine Beobachtung vorliegt, wonach die verbreiternde Wirkung eines Zusammenstoßes größer sein sollte, wenn er die Lebensdauer des angeregten Zustandes verkürzt, als wenn er dies nicht tut: nach den Messungen von Orthmann* scheint die verbreiternde Wirkung von H_2, das die Resonanzlinie des Quecksilbers auslöscht, und von He, das nicht auslöschend wirkt, von derselben Größenordnung, nämlich der durch die Lorentzsche Stoßdämpfungstheorie geforderten zu sein; im übrigen ist ja auch nach dieser Theorie die Wirkung eines Stoßes nicht verschieden, gleichviel ob durch ihn die Emission einer Welle vollständig abgebrochen wird, oder ob sie nur einen beliebigen Phasensprung erleidet. Dagegen glauben wir, daß, wenn wirklich die große Überführungswahrscheinlichkeit Hg $2\,^3P_1 \rightarrow 2\,^3P_0$ durch Zusammenstöße mit N_2 auf einer Resonanzwirkung beruht, für Energieübertragungen zwischen Hg-Atomen in einem der beiden genannten $2\,^3P$-Zustände und N_2-Molekülen die Wirkungsradien sehr viel größer sind als für normale gaskinetische Stöße, und daß sich daraus eine extrem große Stoß- bzw. Kopplungsverbreiterung ergibt, gerade wie das für die Wechselwirkung zwischen anderen gleichen Atomen schon länger bekannt ist**. Verschiedene sich mit dieser Frage beschäftigende Versuche sind bereits im Gange.

Ein Teil der bei diesen Versuchen verwandten Apparate wurde aus Mitteln beschafft, die wir der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft verdanken.

Berlin, Physikalisches Institut der Universität, Oktober 1928.

---

* W. Orthmann, Ann. d. Phys. **78**, 601, 1925. W. Orthmann und Peter Pringsheim, ZS. f. Phys. **43**, 9, 1927.

** Es muß darauf hingewiesen werden, daß die Existenz einer derartigen anomalen Linienverbreiterung die Auswertung von Absorptionsmessungen zur quantitativen Bestimmung der Zahl N_0 von absorbierenden Atomen noch beträchtlich erschweren würde. Insbesondere könnte dadurch eine relativ viel zu kleine Zahl N_0 für solche Zusammenstöße (Argon!) vorgetäuscht werden, die viel weniger verbreiternd wirken, um so mehr, als möglicherweise im Meßlicht trotz Kühlung und Magnetfeld die Linie 4047 Å etwas Selbstumkehr aufweisen mag.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Eine Kompensationsmethode zur Messung schwacher Ströme.

Von **Robert Jaeger** in Charlottenburg.

Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 9. November 1928.)

Es wird ein mittels einer Blende zwischen Null und etwa $5 \cdot 10^{-10}$ Amp. variabler Stromstandard (Bronsonwiderstand) beschrieben, mit dessen Hilfe sich eine Reihe von Meßmethoden bedeutend vereinfachen läßt. Der Vorteil tritt besonders bei Kompensationsschaltungen, z. B. bei der „Methode des konstanten Ausschlages", der Ablaufmethode und Messungen mit dem Röhrengalvanometer hervor, bei denen die Apparatekonstanten herausfallen und der zu messende (Ionisations-) Strom direkt an der Abschirmblende des Stromstandards abgelesen werden kann.

Bei der Eichung bzw. Kontrolle der Eichkonstanten von Röntgendosismessern, d. h. also bei der Messung von Ionisierungsströmen in der Größenordnung von etwa 10^{-9} bis 10^{-12} Amp., hat sich der Gebrauch von sogenannten Stromstandards als praktisch erwiesen*. Der erste Dosismesser der Praxis, der mit einem solchen Standard ausgerüstet wurde, war der Siemensdosismesser. Heute benutzen die meisten der gebräuchlichen Dosismesser zur Kontrolle ihrer Eichkonstante einen Stromstandard in Form eines radioaktiven Präparates, so z. B. das Küstnersche Eichstandgerät, das Hammerdosimeter, das Straussche Mekapion, das Wulfionometer u. a.

Die Stromstandards, wie sie in dem Röntgenlaboratorium der Reichsanstalt seit Jahren benutzt werden, sind nach Art eines Bronsonwiderstandes gebaut. Sie bestehen aus einem Luftkondensator, dessen Platten oder Plattensysteme unter Verwendung eines Schutzringes voneinander hochisoliert und gleichmäßig mit Uranoxyd (Ur_3O_8) belegt sind.

Legt man an den Kondensator eine ausreichende Spannung, so bildet der Sättigungsstrom ein Strometalon von stets gleicher Größe. Der radioaktive Zerfall des Urans spielt bei der großen Halbwertszeit von 2×10^9 Jahren keine Rolle**. Die Ausnutzung der Uranstrahlung ist nahezu vollkommen, wenn die Schichtdicke der verwendeten Uranverbindung 1 mg pro Quadratzentimeter Oberfläche nicht überschreitet.

---

* H. Behnken, ZS. f. techn. Physik **4**, 3—16, 1924 und Strahlentherapie **26**, 79, 1927.

** H. N. McCoy, Phys. Rev. **20**, 381, 1905; Phil. Mag. **11**, 176, 196, und eine Reihe von Arbeiten mit verschiedenen Mitarbeitern, ferner Stefan Meyer und F. Paneth, Wien. Ber. **121** [2a], 1403, 1912.

Kommen etwa 15 mg auf das Quadratzentimeter, so beträgt der einseitige, von 1 cm^2 ausgehende Strom 0,001 75 elst. Einh. oder $0{,}583 \cdot 10^{-12}$ Amp.*. Derartige Standards, die nach Angaben von H. Behnken hergestellt wurden, erwiesen sich in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, wo sie u. a. zur Kontrolle der Eichapparatur für Dosismesser Verwendung finden, seit mehr als 5 Jahren innerhalb der erreichten Meßgenauigkeit, d. h. auf weniger als 1 % konstant.

Will man sich nicht auf einen einzelnen Standard verlassen, so kann man z. B. eine Serie von drei Stück benutzen und durch Kombination bis zu sieben Punkten einer Eichkurve kontrollieren. Bei dieser Methode bleibt aber stets die Notwendigkeit bestehen, die übrigen Meßpunkte zu interpolieren. Es liegt aber nahe, den Stromstandard selbst direkt zur Messung zu verwenden, indem man ihn auf irgend eine Weise variabel macht und in Kompensationsschaltung benutzt.

Eine Möglichkeit, einen variablen Stomstandard zu erhalten, wäre dadurch gegeben, daß man die Ionisationsspannung von Null bis zum Maximalwert variiert, wobei unter der Voraussetzung, daß die gesamte Stromspannungscharakteristik des Präparates erhalten bleibt, das an der Spannung liegende Voltmeter selbst in Stromwerten geeicht sein kann.

Ein Verschieben der Platten gegeneinander in der Weise, wie es bei Drehkondensatoren geschieht, führt ohne besondere Vorsichtsmaßregeln nur eine mäßige Veränderung des Stromes herbei, da die von dem einen Plattenpaar zum anderen übergehenden Kraftlinien stets nahezu gleich viele Ionen erfassen.

Am zuverlässigsten bleibt eine einfache mechanische Abschirmung der radioaktiven Schicht, wie sie z. B. von Schering in seiner Arbeit über die „Registrierungen des spez. Leitvermögens der atmosphärischen Luft“ angewendet wurde**. Die von ihm benutzte Uranzelle ließ eine Veränderung des Stromes von 0,6 bis etwa $1{,}8 \cdot 10^{-11}$ Amp. zu. Die beispielsweise in einer kleinen Ionisationskammer fließenden Ströme sind jedoch bei den üblichen Röntgendosismessern wesentlich größer; man muß daher für die Kontrolle von solchen Instrumenten einen Maximalstrom von rund $1 \cdot 10^{-9}$ Amp. zur Verfügung haben. Um dies zu erreichen, wurde eine Reihe von konzentrischen Zylindern kombiniert in der Weise, wie es in Fig. 1 in halbem Schnitt schematisch wiedergegeben

---

* H. Geiger, Die Radioaktivität im Handb. d. Elektr. u. d. Magn. von L. Graetz, III, S. 94. Leipzig 1914.

** H. Schering, Registrierungen des spez. Leitvermögens der Luft. Nachr. der Kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen, Mathem.-Physikal. Klasse 1908.

ist. Will man eine Abschirmung des Stromes bis auf Null erreichen, so muß man die Blenden ganz dicht vor der radioaktiven Schicht vorbeiführen. Anderenfalls holt das Feld aus dem Zwischenraum so viel Ionen heran, daß noch ein merklicher Strom entsteht. Aus diesem Grunde wurden, wie aus der Schnittzeichnung ersichtlich ist, für jeden Zwischenraum zwischen zwei Belegungen zwei Zylinder vorgesehen, die möglichst dicht vor jeder Belegung vorbeigeschoben werden konnten. Erst auf diese

Fig. 1. Halber Längschnitt eines variablen Stromnormals.

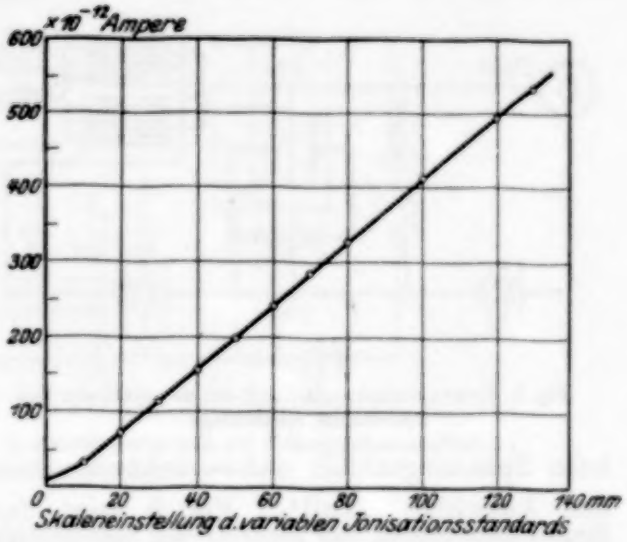


Fig. 2. Abhängigkeit des Stromes von der Stellung der Abschirmblende des Stromnormals (bei 90 Volt Sättigungsspannung).

Weise war es möglich, den Ionisationsstrom fast völlig auf Null zu bringen. Man braucht diese Möglichkeit, um die Isolation der Anordnung zu prüfen.

Die erforderliche Sättigungsspannung ist am höchsten bei völlig herausgezogener Blende. Sie beträgt dann etwa 90 Volt. Die Stromkurve in Abhängigkeit von der Blendenstellung zeigt Fig. 2. Man ersieht daraus, daß es noch nicht gelungen ist, den Strom ganz restlos zum Verschwinden zu bringen, doch schadete der kleine Reststrom für die meisten Messungen nichts, da die kleinsten zur Messung gelangenden Ionenströme größer waren als der Anfangsstrom des Standards. Die Stromkurve zeigt im übrigen einen geradlinigen Verlauf, wie es zu er-

warten ist, da die Größe des Stromes der emittierenden Oberfläche proportional ist.

Im folgenden sollen einige Kompensationsschaltungen behandelt werden, in denen der variable Stromstandard mit Vorteil verwendet werden kann.

Bei der Methode des „konstanten Ausschlages" wird der zu messende Strom über einen hochohmigen Widerstand geleitet und die an diesem auftretende Spannung elektrometrisch gemessen. Schaltet man aber einen veränderlichen Stromstandard in der in Fig. 3 dargestellten Weise hinzu, und zwar in dem Sinne, daß der von dem Stromstandard gelieferte Strom in umgekehrter Richtung durch den Widerstand R fließt wie der zu messende Strom, so wird bei geeigneter Einstellung der Stromblende Bl der Strom in dem Widerstande R völlig kompensiert. Es ist dann

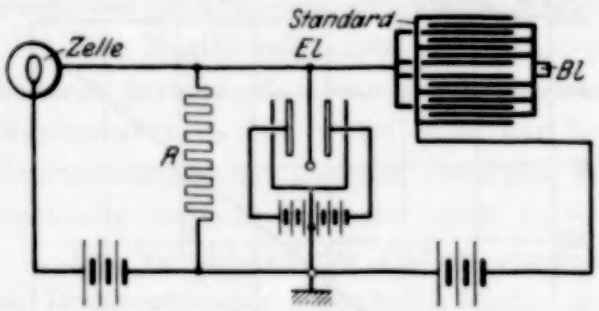


Fig. 3. Kompensationsschaltung bei der Methode des konstanten Ausschlags.

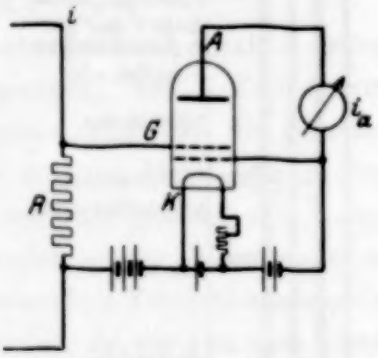


Fig. 4. Grundschema des Röhrengalvanometers.

kein Spannungsabfall mehr vorhanden, und das Elektrometer El zeigt den Ausschlag „Null". Fig. 3 zeigt das Prinzip der Schaltung am Beispiel eines Photostromes. Statt des Elektrometers kann man auch mit einem Röhrenverstärker galvanometrisch arbeiten. In diesem Falle fließt der zu messende Strom i über einen hochohmigen Widerstand R (siehe Fig. 4), der zwischen Gitter G und Kathode K einer Verstärkerröhre besonderer Art liegt; diese hat eine bernsteinisolierte Gitterzuleitung und wird mit einer Anodenspannung von maximal 7 Volt betrieben, um die Ionisierungsspannung der Restgase nicht zu überschreiten*. Die an dem Widerstand R auftretende Spannungsänderung beeinflußt das Potential des Steuergitters der Verstärkerröhre und damit gemäß der Charakteristik den Anodenstrom i_a. Merkwürdigerweise findet man noch häufig falsche Angaben über die Schaltung eines Röhren-

* K. W. Hausser, R. Jaeger und W. Vahle, Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemenskonzern **2**, 325, 1922.

galvanometers, und eine unrichtige Schaltzeichnung ist auch leider in das Handbuch der Physik übergegangen*. Dort wird der zu messende Strom direkt dem Gitter der Röhre zugeführt. Auf diese Weise würde zwar eine Aufladung bzw. Entladung des Gitters erfolgen, diese würde jedoch von dem Widerstande der Vakuumstrecke zwischen Kathode und Gitter, der alles andere als konstant ist, abhängen. Man hat für die Messung so vorzugehen, daß man diesen Widerstand groß macht im Vergleich zu einem außerhalb der Röhre parallel dazu geschalteten Widerstande R von der Größenordnung 10^8 bis 10^{10} Ω. Man kann auch hier eine Kompensationsschaltung entsprechend Fig. 5 anwenden, die das Beispiel eines Röntgendosismessers (Siemensdosismesser) zeigt. Hier bewirkt der durch die Ionisationskammer J fließende Ionisationsstrom, auf dessen Messung

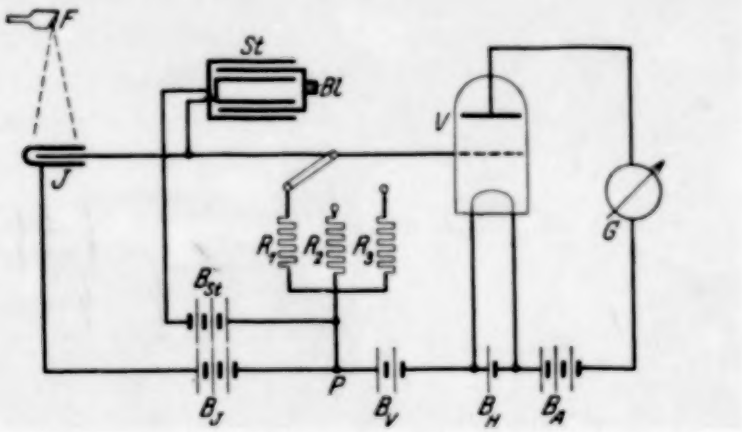


Fig. 5. Kompensation eines Ionisierungsstromes am Röhrengalvanometer (Siemens-Röntgen-Dosismesser.

es abgesehen ist, eine Potentialänderung des Gitters der Röhre und damit eine Änderung des durch das Galvanometer G fließenden Anodenstromes von einem ursprünglichen Werte i_0 auf einen anderen Wert i_1. Durch Hinzuschalten des veränderlichen Stromstandards St in der gezeichneten Weise läßt sich eine Einstellung der Stromblende Bl finden, bei der der Ionisationsstrom gerade kompensiert wird, so daß der Anodenstrom wieder den ursprünglichen Wert i_0 annimmt. In diesem Falle ist der Ionisationsstrom gerade so groß wie der Sättigungsstrom des Stromstandards. Er kann also auf einer an der Stromblende angebrachten Skale unter Benutzung der Eichkurve Fig. 2 abgelesen werden. Hierbei spielt weder die Größe der Parallelwiderstände $R_1 R_2 R_3$ noch die Röhrencharakteristik eine Rolle. Der Stromstandard wurde an den Verstärkerkasten in der

* Handbuch der Physik von Geiger und Scheel, Bd. XIX, S. 869, Abb. 51.

gleichen Weise angeschlossen wie der feste Standard, der den als Röntgendosismessern ausgestalteten Instrumenten beigegeben ist*. (Siehe Fig. 6.) K_1 ist das von der Ionisierungskammer oder der lichtelektrischen Zelle kommende hochisolierende Kabel, K_2 die zum Meßtisch führende Leitung, die den verstärkten Strom zum Galvanometer führt. Die Einstellung der Blende des Standards geschieht mittels einer Zahnstange durch den Griff G. An dem Verstärkerkasten des gewöhnlichen Siemens-Röntgendosismessers mußte eine kleine Veränderung in der Weise vorgenommen werden, daß der Ansatz, an den der Ionisationsstandard angesteckt wird von dem Gehäuse isoliert wurde, so daß die äußere Belegung nicht mehr direkt auf dem Potential des Gehäuses (Erde) lag, sondern über eine Batterie

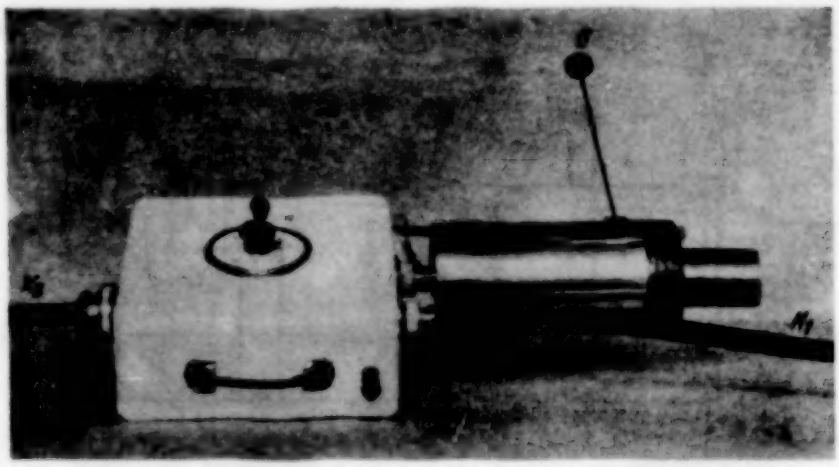


Fig. 6. Variabler Stromstandard in Verbindung mit dem Röhrengalvanometer von Siemens & Halske.

B_{St} (siehe Fig. 5) mit dem Punkt P verbunden werden konnte. Die Batterie B_{St} war so geschaltet, daß der Strom des Ionisationsstandards dem eigentlichen Stom entgegenlief und ihn kompensierte. J ist die Kammer, St der Standard mit der Abschirmungsblende Bl; R_1, R_2, R_3 sind die drei verschieden großen Widerstände für die drei Meßbereiche, B_J, B_V, B_H und B_A die Batterien für die verschiedenen Stromkreise, V das Verstärkerrohr und G das Galvanometer, das auf Null eingestellt wird. Auf einen wichtigen Punkt sei hier noch hingewiesen. Würde die Charakteristik der Röhre in der Weise benutzt werden, daß auf den Anfangspunkt des Anodenstromes eingestellt wird, so würde wegen des langsamen Ansteigens der Charakteristik die Kompensation nur mit großer

* G. Grossmann, Phys. u. techn. Grundlagen der Röntgentherapie, S. 285. Berlin, Urban & Schwarzenberg, 1925.

Ungenauigkeit auszuführen sein. Bei dem Siemensdosismesser wird deshalb das Galvanometer umgekehrt geschaltet, so daß der Anfangspunkt der Skale dem vollen Ausschlag des Instrumentes entspricht. Bei der Messung wird die Charakteristik von oben nach unten benutzt, so daß man den steilsten Teil der Charakteristik, also den empfindlichsten Teil der Skale, an den Anfang legt.

Bisher geht eine Messung am Siemensdosismesser folgendermaßen vor sich. Der in der Ionisierungskammer fließende Strom bildet an dem parallel zu der Strecke Gitter—Kathode liegenden Widerstand eine bestimmte Spannung aus, die eine entsprechende Änderung des Anodenstromes zur Folge hat. Aus dem Ausschlag des im Anodenkreis liegenden Galvanometers ermittelt man gemäß der als bekannt vorausgesetzten Charakteristik der Verstärkerröhre die am Gitter liegende Spannung V_1. Mit Hilfe eines festen Stromstandards geeigneter Größe, der bei gleicher Ionisierungsspannung, wie sie an der Kammer liegt, den bekannten Strom I_2 liefert, ergibt sich ein anderer Anodenstrom, dem gemäß der Charakteristik die Gitterspannung V_2 zukommt. Aus diesen Größen ergibt sich nach der Beziehung $I_1/I_2 = V_1/V_2$ der gesuchte Ionisierungsstrom I_1.

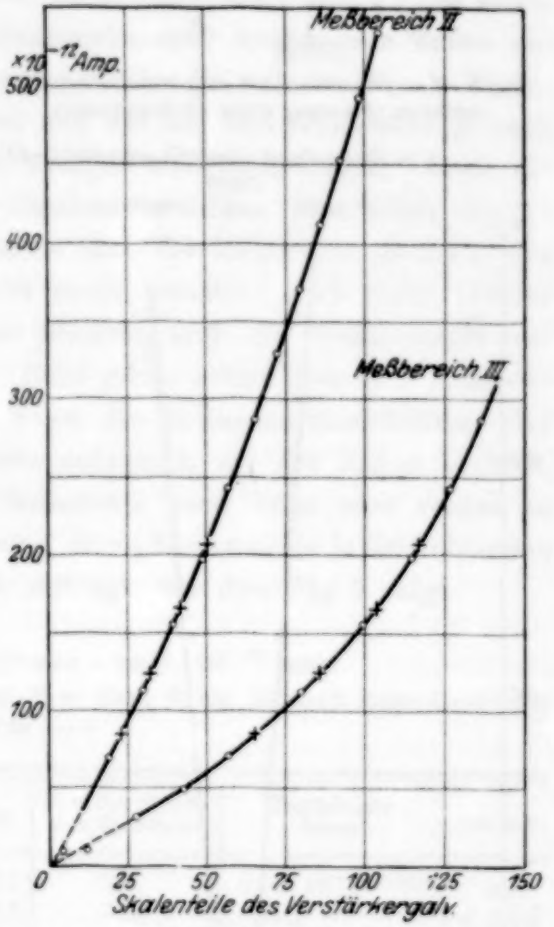


Fig. 7. Eichung der Skale eines Röhrengalvanometers in Strom mit Hilfe des Stromnormals.

Mit dem variablen Stromstandard wird die Messung bedeutend vereinfacht. Will man kein Kompensationsverfahren verwenden, so kann man mit Hilfe des Standards vor der Messung die Skale des im Anodenkreis liegenden Galvanometers direkt in Strom eichen, indem man die Batterie B_{St} (Fig. 5) so schaltet, daß der Standard positive Ausschläge liefert.

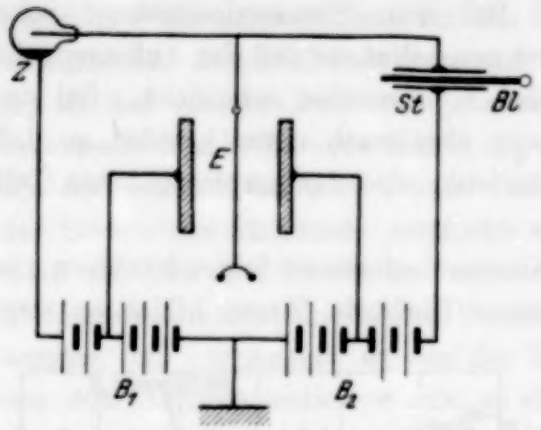


Fig. 8. Kompensationsschaltung bei der Ablaufmethode (Messung eines Photostromes).

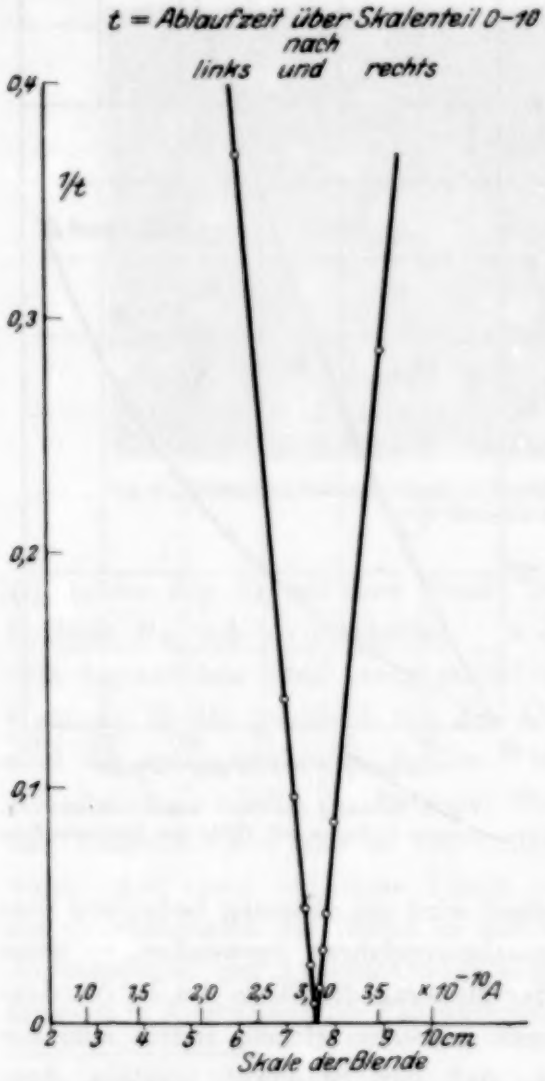


Fig. 9. Beispiel einer Messung mit der Kompensationsschaltung bei der Ablaufmethode.

Ist die Batterie umgekehrt geschaltet, so, daß der Standard Ströme liefert, die dem Röntgenionisierungsstrom entgegengesetzt sind (Fig. 5), so werden die Ausschläge des Galvanometers auf Null kompensiert und die unbekannten Ströme an der Blende des Standards direkt abgelesen. (Siehe oben.)

Beide Methoden geben, wie zu erwarten ist, die gleichen Ergebnisse. In Fig. 7 finden sich Versuchsmeßreihen für die beiden Meßbereiche des Siemensdosismessers nach den beiden Verfahren aufgetragen. Die einen Werte sind durch Kreuze, die anderen durch Punkte gekennzeichnet. Die Übereinstimmung ist vollkommen.

Würde man ein Röhrengalvanometer von vornherein mit einem variablen Stromstandard ausstatten, der in Kompensationsschaltung benutzt wird, so könnte man es der bisherigen Bauart gegenüber bedeutend vereinfachen. Es ist nicht mehr nötig, die Anodenspannung auf ein zehntel Volt konstant zu halten, noch den Heizstrom an einem Amperemeter abzulesen, da die Charakteristik der Verstärkerröhre aus der Messung herausfällt. Es würde genügen, den Heizstrom mit einem kleinen Nernstwiderstand konstant zu halten und die Anodenspannung von etwa 6 bis 7 Volt ohne

Spannungsteiler direkt anzulegen. Die Größe der parallel zur Gitterkathodenstrecke liegenden hochohmigen Widerstände braucht zahlenmäßig nicht bekannt zu sein, auch sind kleine Änderungen des Widerstandes über längere Zeiten hin bedeutungslos.

Besonders bequem wird die Messung, wenn man den variablen Stromstandard bei der elektrometrischen Ablaufmethode verwendet. Die für diese Messungen benutzte Schaltung zeigt Fig. 8. Elektrometer E, variabler Standard St und Batterien B_1 und B_2 wurden des elektrostatischen Schutzes wegen in einen Zinkkasten eingebaut. Eine lichtelektrische Zelle Z oder eine Ionisationskammer konnte von außen angeschlossen werden. An einer linearen Skale, die mit der Blende Bl des Stromstandards starr verbunden war und die aus dem Zinkkasten je nach der Stellung der Blende mehr oder weniger weit herausragte, konnte die Größe des Kompensationsstromes abgelesen werden. Die Größe des zu messenden Stromes findet man, indem man die Blende so einstellt, daß der Faden des Elektrometers nicht mehr wandert. Bei einer kleinen Verschiebung der Blende aus dieser Stellung läuft der Faden sofort entweder nach links oder rechts ab. Sehr genau erhält man den Kompensationspunkt, indem man in der Nähe der Kompensationsstellung der Blende für einige Punkte die Zeiten aufnimmt, die der Faden braucht, um über eine bestimmte Anzahl Skalenteile nach links oder rechts zu wandern, und das Ergebnis der Messung, deren Zahlenwerte in der folgenden Tabelle eingetragen sind, graphisch aufträgt, wie dies Fig. 9 zeigt.

Messung eines Stromes von $3 \cdot 10^{-10}$ Amp.
t = Ablaufzeit in Sekunden für Ablauf über Sktl. 0 bis 10 nach links (—) oder rechts (+).

Sktl. der Blende des Standards	Zugehöriger Strom	t in sec	Sktl. der Blende des Standards	Zugehöriger Strom	t in sec
6,0	$2{,}35 \cdot 10^{-10}$ Amp.	— 2,7	7,6	$3{,}00 \cdot 10^{-10}$ Amp.	∞
7,0	2,75	— 7,2	7,65	3,02	+ 67,7
7,2	2,85	— 10,5	7,7	3,04	+ 32,4
7,4	2,92	— 20,8	7,8	3,08	+ 21,6
7,5	2,96	— 38	8,0	3,15	+ 11,7
7,55	2,98	—121	9,0	3,55	+ 3,5

Als Abszisse ist die Blendenstellung bzw. der Strom, als Ordinate der reziproke Wert der Ablaufzeit nach links oder rechts, d. h. also die auf das Elektrometer fließende Elektrizitätsmenge aufgetragen. Man erhält dann zwei fast gerade Linien, die beide auf den gleichen Punkt der Abszissenachse zulaufen. Eine Blendenverschiebung von $^1/_{10}$ mm war

so noch nachweisbar. $^1/_{10}$ mm bedeutet im beschriebenen Falle $1\,^0/_{00}$ des gemessenen Stromes. Dabei war das Elektrometer noch nicht auf höchste Empfindlichkeit gebracht. Die Genauigkeit relativer Messungen läßt sich daher meist viel größer machen als diejenige, mit der sich der Absolutwert des Standards bestimmen läßt. Der kleinste überhaupt noch meßbare Strom liegt in der gleichen Gegend wie bei der üblichen Ablaufmethode, also etwa bei 10^{-15} Amp.

Die Arbeit wurde durch die sachgemäße Ausführung der Versuchsapparatur von Herrn Techniker Emil Müller wesentlich gefördert.

Zusammenfassung.

Es wird ein variabler Stromstandard aus Uranoxyd beschrieben, bei dem durch eine Blende der Sättigungsstrom zwischen Null und etwa $5 \cdot 10^{-10}$ Amp. variiert werden kann. Mit Hilfe dieser Anordnung läßt sich eine Reihe von Meßmethoden außerordentlich vereinfachen. Benutzt man einen variablen Stromstandard in irgend einer Schaltung zur Kompensation des zu messenden Stromes, so kann man an der Blende direkt den Strom ablesen. Man kann auf diese Weise sowohl die „Methode des konstanten Ausschlages“ als auch die Ablaufmethode verbessern. Bei der erstgenannten Methode wird durch Gegenschalten der beiden Ströme über einen hochohmigen Widerstand die an diesem auftretende Potentialdifferenz auf Null gebracht. Eingehender wird die Methode an einem Siemensschen Röhrengalvanometer erläutert, wobei die Größe des hochohmigen Widerstandes sowie die Charakteristik der Verstärkerröhre aus der Messung herausfallen, so daß auch die genaue Innehaltung der Anodenspannung und des Heizstromes nicht mehr notwendig ist. Hierdurch wird die ganze Einrichtung eines Röhrengalvanometers bedeutend vereinfacht. Eine besonders einfache und zuverlässige Meßmethode ergibt sich, indem man die Stromkreise so schaltet, daß ein empfindliches Elektrometer von geringer Kapazität bei entsprechender Regulierung des variablen Standards weder nach der einen noch nach der anderen Seite abläuft. Der unbekannte Strom läßt sich dann an der Blende direkt ablesen, ohne daß die Elektrometerempfindlichkeit oder Kapazität der Anordnung bekannt zu sein braucht. Ein Meßbeispiel, das die hohe Genauigkeit dieser Methode erkennen läßt, wird mitgeteilt.

Das β-Strahlenspektrum des Radiothors als Absorptionsspektrum seiner γ-Strahlen.

Von **Lise Meitner** in Berlin-Dahlem.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 27. September 1928.)

Es werden Aufnahmen des β-Strahlenspektrums von Radiothor in verschiedenen Magnetfeldern ausgeführt und daraus die erregenden γ-Linien abgeleitet. Es wird der Ursprung dieser γ-Linien diskutiert.

Einleitung. In der ersten Arbeit über den Zusammenhang zwischen γ-Strahlen und den von ihnen ausgelösten β-Strahlspektren * hatte ich darauf hingewiesen, daß beim α-strahlenden Radiothor zwei sekundäre β-Strahlgruppen vorliegen **, die von einer γ-Linie von $1{,}45 \cdot 10^{-9}$ cm Wellenlänge herrühren müssen. Es schien aus mehreren Gründen nicht unwichtig, eine genauere Untersuchung des β-Strahlenspektrums des Radiothors vorzunehmen. Da ich von vornherein von der jetzt allgemein angenommenen Annahme ausging, daß die Emission der γ-Strahlen nach dem Zerfall stattfindet, also eigentlich dem (angeregten) Kern des Folgeproduktes angehört, schien es merkwürdig, daß die Wellenlänge von $1{,}45 \cdot 10^{-9}$ cm identisch gleich ist mit der dem Zerfallsprodukt des Radiothors entsprechenden K_α-Linie der charakteristischen K-Serie. Diese Übereinstimmung wurde noch auffallender, nachdem die Untersuchung des β-strahlenden Urans X_1, das ebenso wie das Radiothor ein Thorisotop ist, ergeben hatte, daß das beim UX_1 auftretende β-Strahlspektrum wahrscheinlich von der charakteristischen Röntgenstrahlung und nicht von einer Kern-γ-Strahlung herrührt ***. Da beim UX_1 primäre β-Strahlen mit einer Energie zwischen 1,7 bis $2 \cdot 10^{-7}$ Erg nachgewiesen worden sind, die Anregungsgrenze für die K-Serie des Folgeproduktes bei $1{,}77 \cdot 10^{-7}$ Erg liegt, so können jedenfalls die primären β-Strahlen das charakteristische Röntgenspektrum im eigenen Atom anregen. Allerdings wird man bei dem geringen Energieüberschuß keine sehr große Ausbeute erwarten dürfen. Tatsächlich hat die Ausphotometrierung neuerlich aufgenommener β-Spektren von UX_1, für deren Ausführung im Institut von Prof. P. P. Koch in Hamburg ich hier meinen besonderen Dank aussprechen möchte, ergeben, daß die Ausbeute in der Größenordnung von wenigen Prozenten liegen muß.

---

* L. Meitner, ZS. f. Phys. **9**, 131, 1922.

** O. v. Baeyer, O. Hahn und L. Meitner, Phys. ZS. **16**, 6, 1815.

*** L. Meitner, ZS. f. Phys. **17**, 54, 1923.

Beim Radiothor, das ein α-Strahler ist, wäre das Auftreten der K-Strahlung des Folgeproduktes viel merkwürdiger und es schien also von Interesse, die Frage genauer zu prüfen.

Versuchsergebnisse. Um ein genaues Spektrum der β-Strahlen des Radiothors aufnehmen zu können, mußte ein Radiothor frei von allen seinen Zerfallsprodukten in möglichst dünner Schicht als lineare Strahlungsquelle hergestellt werden. Da zur Abtrennung von den Folgeprodukten irgend ein Träger für das Radiothor in, wenn auch sehr geringer Menge (es wurde Zirkonnitrat gewählt) zugesetzt werden muß, kann man zwar keine unendlich dünnen, aber immerhin relativ sehr dünne Schichten erhalten. Das von seinen Folgeprodukten quantitativ befreite Radiothor wurde elektrolytisch auf einen 0,3 mm dicken und etwa 6 bis 8 mm langen Platindraht niedergeschlagen. Die Reinheit der Präparate wurde durch Verfolgen der Anstiegskurven geprüft. In allen untersuchten Fällen betrug der Gehalt des Radiothors an Folgeprodukten weniger als 0,5 %.

Fig. 1.

Die Aufnahme der β-Strahlspektra erfolgte in der üblichen Weise im Felde eines Halbringmagnets, mit tellerförmigen Polschuhen, wobei eine Apparatur mit erheblich vergrößerten Dimensionen gegenüber der früher benutzten verwendet werden konnte, bei der Krümmungsradien bis über 4 cm noch innerhalb des homogenen Magnetfeldes verlaufen. Es wurden mit verschiedenen Radiothorpräparaten und bei verschiedenen Feldern Aufnahmen gemacht. Der Umstand, daß keine unendlich dünne Schicht vorliegt und daß Platin als Träger der radioaktiven Substanz gewählt werden mußte, bedingt eine Verbreiterung der Linien nach der Seite der langsamen Geschwindigkeiten *, was aber die Meßgenauigkeit der scharfen Kanten nach der Seite der schnellen Strahlen nicht beeinträchtigt. Die Meßgenauigkeit für die $H\varrho$-Werte beträgt einige Promille. Die Expositionszeiten variierten zwischen 5 bis 7 Stunden. Die Eichung des Feldes erfolgte mittels der stärksten β-Strahlengruppe von Thorium B, deren

* H. Schonland, Proc. Roy. Soc. **104**, 235, 1923.

$H\varrho$-Wert nach der Arbeit von Black* gleich 1398 gesetzt wurde. Eine der erhaltenen Aufnahmen zeigt die Figur, die im Gebiet der langsamen Strahlen sechs β-Strahlengrupen deutlich erkennen läßt, zwei sehr schwache (langsamere) und vier verhältnismäßig starke, von denen zwei mit den bereits oben erwähnten identisch sind. Um sicher zu sein, daß alle sechs Gruppen wirklich dem Radiothor angehören, wurden zu verschiedenen Zeiten Aufnahmen mit demselben Präparat gemacht. In dem Maße, wie die Folgeprodukte nachgebildet werden, müssen die ihnen zugehörigen Linien neu auftreten bzw. an Intensität zunehmen, während die von Radiothor herrührenden wegen der langen Lebensdauer des Radiothors an Intensität unverändert bleiben müssen. Zugleich bieten diese späteren Aufnahmen die Möglichkeit, das Magnetfeld mittels der stärksten Thorium B-Linien zu eichen. Das in der Figur reproduzierte Bild stellt eine Aufnahme dar, bei der das Radiothorpräparat unter Berücksichtigung der Expositionsdauer etwa 12 Stunden alt war, also schon eine geringe Menge Thorium B enthielt. Tatsächlich ist auf der Originalaufnahme sehr deutlich, wenn auch schwach, die Thorium B-Linie weit rechts von den Radiothorgruppen zu erkennen, während die unmittelbar nach der Herstellung des Radiothors erhaltene Aufnahme die sechs ersten Gruppen in der gleichen Stärke, aber keine Spur der Thorium B-Linie aufweist. Die späteren Aufnahmen ergaben ein immer stärkeres Hervortreten der Thorium B- und Thorium C-β-Strahlgruppen bei unveränderter Intensität der erwähnten sechs Gruppen. Es ist damit bewiesen, daß diese tatsächlich dem Radiothor angehören. In der nachstehenden Tabelle 1 sind die $H\varrho$-Werte und die zugehörigen Energien in Erg und Volt zusammengestellt. Entsprechend der angegebenen Meßgenauigkeit ist der Fehler in der Energiebestimmung sicher kleiner als 1 %.

Tabelle 1. β-Strahlspektrum des Radiothors.

Nummer der Linie	$H\varrho$	Energie in Erg	Energie in Volt
1	806	$0{,}868 \cdot 10^{-7}$	$5{,}47 \cdot 10^{4}$
2	827	0,904	5,67
3	891	1,049	6,56
4	911	1,095	6,88
5	988	1,274	8,01
6	1010	1,328	8,34

Bei der Zuordnung der β-Strahlgruppen zu bestimmten γ-Strahllinien müssen die Intensitäten der Gruppen berücksichtigt werden. Die beiden

* H. Black, Proc. Roy. Soc. **109**, 169, 1925.

schwachen Gruppen 1 und 2 konnten nicht eingeordnet werden. Für die Gruppen 3 bis 6 folgt aus den Energiedifferenzen, daß sie aus den L- und M-Niveaus stammen müssen. Nun haben gerade die Untersuchungen an γ-Strahlen gezeigt, daß die Beteiligung der drei L-Niveaus an der Absorption sehr wesentlich von der Wellenlänge, also von der Energie der absorbierten Strahlung abhängt. Je größer diese Energie im Verhältnis zur Ablösungsarbeit der L-Elektronen ist, um so stärker absorbierend wirken die am festesten gebundenen L_1-Elektronen gegenüber den zwei anderen L-Niveaus. So wurden im Spektrum des mit Radiothor isotopen Radioactiniums* für eine γ-Strahlung von der Wellenlänge 282 X-E. ($0{,}695 \cdot 10^{-7}$ Erg Energie) noch alle drei L-Niveaus in der Absorption nachgewiesen, während für eine γ-Linie von 232 X-E. Wellenlänge (entsprechend $0{,}98 \cdot 10^{-7}$ Erg Energie) nur mehr Photoelektronen aus dem L_1-Niveau nachweisbar waren, obwohl diese γ-Linie viel intensiver ist als die langwelligere.

Da die Energie der auslösenden γ-Strahlen beim Radiothor für die β-Strahlgruppen 3 bis 6 unbedingt einen größeren Wert als $1 \cdot 10^{-7}$ Erg haben muß, so kann bei ihrer Absorption im L-Niveau nur das L_1-Niveau maßgebend sein.

Unter Berücksichtigung dieser Tatsache erhält man für die vier β-Strahlgruppen die Ursprungsniveaus und die Energien der auslösenden γ-Strahlung, die in der Tabelle 2 zusammengestellt sind.

Tabelle 2.

Nummer des β-Strahls	Energie des β-Strahls Erg	Ursprungsniveau	Energie des zugehörigen γ-Strahls Erg	Wellenlänge der γ-Strahlen cm
3	$1{,}049 \cdot 10^{-7}$	L_1	$1{,}354 \cdot 10^{-7}$	$1{,}45 \cdot 10^{-9}$
5	1,274	M_1	1,351	
4	1,095	L_1	1,400	$1{,}40 \cdot 10^{-9}$
6	1,328	M_1	1,405	

Aus den vorstehenden Versuchen hat sich ergeben, daß das Radiothor zwei γ-Strahllinien von 1,45 und $1{,}40 \cdot 10^{-9}$ cm Wellenlänge emittiert. Das merkwürdige an diesem Resultat ist nun, daß diese Linien in ihrer Wellenlänge identisch sind mit den beiden K_α-Linien des Folgeproduktes des Radiothors, des Thoriums X, das ein Radiumisotop mit der Kernladungszahl 88 ist. Für die Kernladungszahl 88 berechnen sich die Energien der beiden K_α-Linien zu 1,350 und $1{,}399 \cdot 10^{-7}$ Erg; die Über-

* L. Meitner, ZS. f. Phys. **34**, 807, 1925.

einstimmung mit den gefundenen Mittelwerten ist also so gut, daß man zu dem Schluß gedrängt wird, die beiden Linien stammen nicht aus dem Kern des Folgeproduktes, sondern gehören der charakteristischen K-Strahlung seiner äußeren Elektronenhülle an. Das würde verlangen, daß, wenn der Radiothorkern ein α-Teilchen abgespalten hat, die Umordnung des Restkerns strahlungslos erfolgt, aber aus irgend einem Grunde die K-Strahlung in der Elektronenhülle angeregt wird. Durch Absorption der beiden K_α-Linien im L- und M-Niveau des eigenen Atoms müßten die vorstehend angegebenen β-Strahlgruppen 3 bis 6 entstehen. Auffallend hierbei ist, daß die Intensität der von der K_{α_2}-Linie herrührenden β-Gruppen größer ist als die von der K_{α_1}-Linie ausgelösten, obwohl die K_{α_1}-Linie als Emissionslinie zweimal so intensiv auftritt als die langwelligere K_{α_2}-Linie*. Gerade dieses Überwiegen der K_{α_2}-Linie gegenüber der K_{α_1}-Linie ist aber verschiedentlich für die Absorption der K_α-Linien im eigenen Elektronensystem festgestellt worden, so z. B. von D. Black für Thorium B**. Dieses Intensitätsverhältnis stimmt also mit demjenigen überein, das in den Fällen beobachtet wird, für die es sicher außer Zweifel steht, daß es sich um die K_α-Linien handelt; so daß man hierin eine Bestätigung dafür sehen könnte, daß die beiden hier in Frage stehenden Linien wirklich die beiden K_α-Linien des Thoriums X darstellen.

Die Schwierigkeit in dieser Deutung liegt in der Frage, wie die Anregung der K-Strahlung zustande kommen kann. Da der Zerfall unter Abspaltung eines α-Teilchens vor sich geht, müßte das α-Teilchen beim Durchgang durch die Elektronenhülle ein K-Elektron herauswerfen. Aus der Stärke der verwendeten Präparate und der Intensität der beobachteten β-Strahlgruppen läßt sich schließen, daß größenordnungsmäßig fast jedes austretende α-Teilchen ein K-Elektron herauswerfen muß. Eine genauere Schätzung ermöglicht die in Fig. 2 wiedergegebene Photometerkurve***, die einer Aufnahme von Radiothor entspricht, bei der 36 % der Gleichgewichtsmenge von Thorium B vorhanden waren.

Die mit A, B, C, D bezeichneten Maxima entsprechen den β-Strahlgruppen 3 bis 6 des Radiothors, das Maximum bei E stellt die stärkste β-Gruppe des Thorium B dar. Der relativ starke Untergrund rührt zum

---

* M. Siegbahn, Spektroskopie der Röntgenstrahlen 1924, S. 97.

** C. D. Black, l. c.

*** Ich möchte auch an dieser Stelle Herr Dr. Müller für die in seinem Laboratorium in der Physikalischen-Technischen Reichsanstalt durchgeführte Photometrierung bestens danken.

größten Teil von den γ-Strahlen des Thorium B her, die mit zunehmender Entfernung vom Spalt (Richtung $A \rightarrow E$) immer stärker abgeschirmt werden. Dasselbe Radiothorpräparat unmittelbar nach seiner Herstellung aufgenommen, zeigte einen sehr viel geringeren kontinuierlichen Untergrund. Nach Messungen von Gurney* entspricht nun die Intensität dieser Linie E einer Zahl von 25 Elektronen pro 100 zerfallende Atome, und da hier nur 36 % der Gleichgewichtsmenge vorhanden sind, entspricht die Stärke von Gruppe E neun Elektronen pro 100 zerfallenden Atomen im Gleichgewicht. Die Photometerkurve zeigt nun, daß die Summe der Intensitäten der Gruppen A bis D sicher mehr als doppelt so groß ist wie die der Gruppe E allein. Das heißt also, die durch „innere" Absorption der beiden K_α-Linien erzeugten vier Gruppen sind mindestens doppelt so stark wie die Gruppe E, ihre Intensität würde also etwa

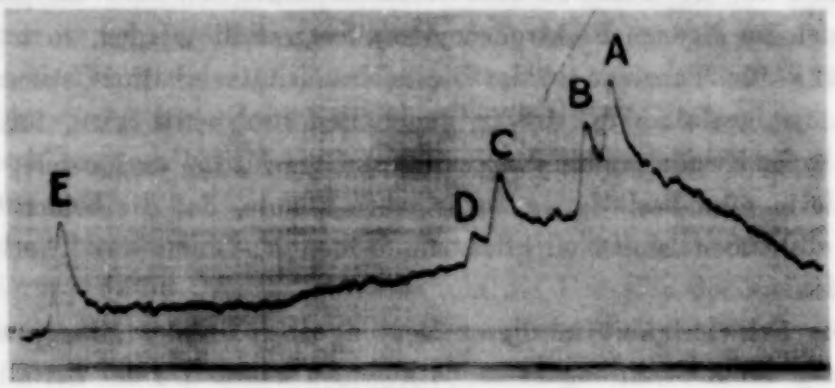


Fig. 2.

18 Elektronen auf 100 zerfallende Radiothoratome entsprechen. Nun ist hierbei noch unberücksichtigt, daß die Gruppen A bis D in einem anderen Geschwindigkeitsgebiet liegen ($H\varrho$ im Mittel etwa 900) als die Gruppe E ($H\varrho = 1400$), also photographisch stärker wirksam sind. Nimmt man an, daß für so dünne Schichten, wie sie die photographische Schicht darstellt (Größenordnung etwa 10 μ Silberbromid), die Schwärzung in dem in Frage kommenden Geschwindigkeitsgebiet umgekehrt proportional der Energie der β-Strahlen ist, so besitzen die Gruppen A bis D eine etwa 2,5 mal so große photographische Wirksamkeit wie die Gruppe E. Bei gleicher Zahl wirksamer Elektronen müßte also in den Gruppen A bis D die 2,5 fache Schwärzungsintensität erzeugt werden. Daraus folgt, daß den Gruppen A bis D insgesamt 7,2 Elektronen auf 100 zerfallende Radiothoratome entsprechen sollten. Da nun bei schweren Atomen die

* R. W. Gurney, Proc. Roy. Soc. (A) **112**, 380, 1926.

Absorption der K-Strahlung im eigenen Atom höchstens 10 bis 15 % beträgt*, führt die angegebene Intensität der Gruppen A bis D zu der Schlußfolgerung, daß die Intensität der emittierten K_α-Linien größenordnungsmäßig einer nahezu 100 %igen Anregung der K-Strahlung entspricht. Das bedeutet aber, daß jedenfalls ein hoher Prozentsatz der von Radiothor emittierten α-Teilchen ein K-Elektron in der äußeren Elektronenhülle herauswerfen müßte. Man könnte daran denken, durch Reichweitemessungen zu entscheiden, ob und welcher Anteil der α-Strahlen des Radiothors die der K-Anregungsenergie entsprechende Energieverminderung erlitten hat. Aber diese Energieverminderung beträgt nur 0,8 ‰, würde also nur eine Reichweiteverkürzung von 1,2 % bedingen und ihr Nachweis erscheint damit auf diesem Wege wohl aussichtslos.

Es ist sehr schwer, sich ein Bild darüber zu machen, warum gerade die α-Strahlen des Radiothors einen solchen Anregungsprozeß im K-Niveau erzeugen sollen. Die α-Strahlen des Radiothors sind in keiner Weise irgendwie ausgezeichnet. Gehrtsen** hat angenommen, daß α-Strahlen dann die charakteristische K-Strahlung erregen können, wenn die von ihnen auf das K-Elektron (unter Berücksichtigung der vor dem Stoß schon vorhandenen Bahngeschwindigkeit dieses Elektrons) übertragene Energie größer ist als die K-Ablösungsarbeit. Würde diese Überlegung hier Gültigkeit haben, so müßte aber z. B. das Thorium X mit seiner größeren α-Strahlenenergie um so eher eine Anregung der charakteristischen K-Strahlung zeigen. Direkte Versuche mit Thorium X haben aber keinerlei Andeutung für das Vorhandensein irgend einer β-Strahlung ergeben. Es bleibt also vorläufig ganz ungeklärt, in welcher Weise diese K-Strahlung beim Zerfall angeregt werden könnte. Jedenfalls müßte, wenn diese beiden Linien wirklich die K_α-Linien darstellen, eine sehr enge Kopplung zwischen Kern und Elektronenhülle bestehen. Natürlich bleibt noch die Deutungsmöglichkeit, daß diese beiden Linien Kern-γ-Linien sind und daß die genaue Koinzidenz mit der Wellenlänge der beiden K_α-Linien eine zufällige ist. Befriedigend ist diese Erklärung indes auch nicht.

Zusammenfassung.

1. Es wurde das β-Strahlspektrum des Radiothors getrennt von seinen Zerfallsprodukten aufgenommen und sechs Gruppen nachgewiesen, zwei äußerst schwache langsame und vier intensive schnellere.

---

* L. Meitner, ZS. f. Phys. **34**, 817, 1925.

** C. Gehrtsen, ebenda **36**, 540, 1926.

2. Diese vier Gruppen stammen aus den L- und M-Niveaus und werden von zwei γ-Linien ausgelöst, deren Energien genau mit den Energien der beiden K_α-Linien des Folgeproduktes übereinstimmen.

3. Die Ausphotometrierung der vier Gruppen zugleich mit der stärksten Gruppe von Thorium B ergibt, daß ein relativ sehr hoher Prozentsatz der zerfallenden Radiothoratome eine der beiden γ-Linien emittiert. Wenn diese also die beiden K_α-Linien des Folgeproduktes darstellen, so bedeutet dies, daß nahezu jedes α-Teilchen des Radiothors beim Durchgang durch die Elektronenhülle die K-Strahlung des Folgeproduktes anregt.

4. Es werden die Schwierigkeiten diskutiert, die der Deutung der beiden Linien als K_α-Linien entgegenstehen.

Das γ-Strahlenspektrum des Radiothors in Emission.

Von **Lise Meitner** in Berlin-Dahlem.

(Eingegangen am 27. September 1928.)

Es wird das γ-Strahlenspektrum einerseits von Radiothor, andererseits von Thorium X nach der Drehkristallmethode aufgenommen, um gewisse Widersprüche, die die nach verschiedenen Methoden für Radiothor erhaltenen Resultate aufwiesen, aufzuklären.

In der voranstehenden Arbeit wurde gezeigt, daß die Ausmessung des β-Strahlenspektrums des Radiothors auf zwei γ-Linien von den Wellenlängen 140 und 145 X-E. führt. J. Thibaud* hat das γ-Strahlenspektrum nach der Drehkristallmethode untersucht und zwei Linien von 168 und 145 X-E. gefunden, wobei nach seinen Aufnahmen die langwelligere Linie von 168 X-E. etwas intensiver ist. Eine Trennung der kurzwelligeren Linien in zwei Linien von 140 und 145 X-E. war nach der Drehkristallmethode nicht möglich. Es besteht hier also ein Widerspruch in den Resultaten der Drehkristallmethode und der Methode, bei der die γ-Linien aus den „natürlichen" β-Strahlenspektren hergeleitet werden. Wenn die Resultate beider Methoden einwandfrei sind, so würden sie besagen, daß die Linie von 168 X-E., die in der Emission anscheinend die stärkere ist, relativ sehr viel schwächer im eigenen Atom absorbiert wird als die kurzwelligeren Linien von 145 und 140 X-E. Es schien daher nicht unwichtig, die Versuche nach der Drehkristallmethode zu wiederholen. Die Anordnung war im Prinzip dieselbe, die auch Thibaud verwendet hat. Die Strahlen wurden nach der Braggschen Bedingung (lineare Strahlenquelle und photographische Platte in gleicher Entfernung von der Drehachse des Kristalls) fokussiert.

Als Kristall diente eine gut polierte Steinsalzplatte von 0,7 mm Dicke, 2 cm Höhe und 12 cm Länge, die auf eine dünne Glasplatte aufgeklebt war. Die Glasplatte wurde von einem Träger aus Aluminium gehalten, der auf einem Goniometertischchen montiert war. Die Länge des Kristalls war so groß gewählt, um bei den notwendigerweise sehr kleinen Ablenkungswinkeln die wegen der geringen Intensität nötige große Spaltbreite ausnutzen zu können. Die geringe Dicke verhindert, daß für die Reflexion der γ-Strahlen, die ja tief eindringen können, die Lage der reflektierenden Ebene, deren Achse mit der Drehachse des den Kristall tragenden Goniometers zusammenfallen muß, undefiniert wird.

* J. Thibaud, Ann. de phys. (10) **5**, 73, 1926.

Um den Kristall vor Feuchtigkeit zu schützen, wurde er mit einer ganz dünnen Schicht Zaponlack überzogen. Außerdem wurden die Versuche in einem fensterlosen Kellerraum ausgeführt, dessen Luft durch ständiges Heizen gut getrocknet war. Das erwies sich bei den langen Expositionsdauern von etwa 14 Tagen als notwendig.

Da die Linie von 168 X-E., deren Existenz nachzuprüfen war, sehr nahe den K_α-Linien von Blei liegt, wurde die ganze Anordnung so gewählt, daß keine etwa durch die γ-Strahlen erregten Bleistrahlen auf den Kristall treffen und von dort auf die photographische Platte reflektiert werden konnten.

Daher wurde als Material für den Spalt nicht Blei, sondern Wolfram verwendet*.

Die den Spalt bildenden planparallelen Wolframstäbe hatten eine Länge von 18 cm, eine Höhe von 1,2 cm und eine Dicke von 4,7 mm. Sie waren in einer Messingfassung derart montiert, daß ihr Abstand bei paralleler Verschiebung zwischen 0 und 2 mm variabel war. Der ganze Spalt war auf einem Goniometertischchen montiert.

Die photographische Kammer bestand aus einem Bleikasten von 1 cm dickem Blei mit den Maßen $10 \times 13 \times 16\,\text{cm}^3$, der auf der dem Kristall zugewendeten Seite eine $4 \times 9\,\text{cm}^2$ große Öffnung trug und an dieser Vorderseite außen und innen mit dickem Aluminium belegt war. An dem hinteren Ende des Kastens konnte in einen entsprechenden Schlitz die photographische Platte eingeschoben werden. Dieser Bleikasten erwies sich als vollkommen ausreichender Schutz für die photographische Platte gegen Streu- und Sekundärstrahlung. Das Einschalten weiterer Bleischirme zwischen Kristall und Bleikasten gab nur Anlaß zu sekundären Streustrahlen und wurde daher vermieden. Die verwendeten photographischen Platten waren meistens Hauff-Röntgenplatten mit Verstärkerschirm; vereinzelt wurden aber auch Aufnahmen mit Agfa-Röntgenfilmen und Verstärkerschirm gemacht. Als Strahlenquelle diente ein radioaktives Präparat, das in ein ganz flaches, fast prismatisches Gläschen eingefüllt und unmittelbar vor dem Spalt so montiert wurde, daß die Schmalseite dem Spalt anlag und ihn gerade ausfüllte und die etwa 1 cm breite Seitenfläche parallel dem Spalt stand. Das Präparat stand in einem aus drei Einzelteilen bestehenden Schutzkasten allseitig eingeschlossen. Der Kasten

---

* Ich bin der Osram-Gesellschaft m. b. H. und vor allem Herrn Professor Pirani zu besonderem Dank verpflichtet, daß die Osram-Gesellschaft die mühevolle Arbeit übernommen hat, zwei sehr gut planparallel geschliffene Wolframstäbe herzustellen und sie mir geschenkweise überlassen hat.

trug außen eine 2 cm dicke Bleischicht und war innen mit 2 cm Messing ausgekleidet, so daß sicher keine etwa in der äußeren Bleihülle erregten Sekundärstrahlen durch den Spalt hindurchgehen konnten. Da die Spaltlänge 18 cm beträgt, ergibt sich die Frage, welcher Punkt des Spaltes als Ausgangspunkt des Strahlenbündels zu betrachten ist. Es erwies sich für die Schärfe der Linien als das vorteilhafteste, den Abstand Kristall—Platte gleich dem Abstand Kristall—zugewendetes Spaltende zu wählen, in Übereinstimmnng mit Erfahrungen, die mir Prof. P. Scherrer freundlicherweise brieflich mitteilte. Der Abstand Kristall–Platte betrug 42,25 cm. Die Justierung der Apparatur erfolgte auf optischem Wege.

Da die zur Verfügung stehenden Präparate relativ nur geringe Intensität hatten, mußte mit großer Spaltbreite (0,8 bis 1 mm) gearbeitet werden. Um die Linien trotzdem mit einiger Genauigkeit ausmessen zu können, wurden die Aufnahmen zum Teil so gemacht, daß Ablenkungen beiderseits vom Durchstoßungspunkt erhalten wurden.

Für die Aufnahmen mit Radiothor wurden Präparate von 16 bis 25 mg Radiumäquivalent verwendet. Die Expositionszeiten betrugen 8 bis 10 Tage. Sollten Ablenkungen nach beiden Seiten erhalten werden, so war dazu natürlich im ganzen die doppelte Expositionsdauer nötig. Alle Aufnahmen ergaben zwei Linien, eine bei etwa $\lambda = 144$ X-E., eine stärkere bei etwa 167 X-E., in voller Übereinstimmung mit den Thibaudschen Resultaten. Die meisten Aufnahmen ließen aber deutlich erkennen, daß die Linie bei 167 X-E. eine Doppellinie ist, deren kurzwelligere Komponente die intensivere ist. Durch beiderseitige Ablenkung konnten die Doppellinien gut getrennt zu 161 und 167 X-E. ausgemessen werden, wobei die Genauigkeit etwa 2 % betragen dürfte. Von der Linie bei $\lambda = 144$ X-E. konnte nicht entschieden werden, ob sie einfach oder doppelt ist, da diese Linie nicht nur etwas weniger intensiv, sondern auch stärker verwaschen auftrat. Nach den in der voranstehenden Arbeit aus dem natürlichen β-Strahlenspektrum des Radiothors erhaltenen Resultaten sollte diese Linie eine Doppellinie von 140 und 145 X-E. Wellenlänge sein. Außer den genannten Linien konnten noch einige schwache kurzwelligere nachgewiesen werden, von denen zwei von 79 und 60 X-E. mit γ-Linien von Th C'', wie sie D. Black* aus dem β-Strahlenspektrum abgeleitet hat, übereinstimmen. Da das Radiothor im Gleichgewicht mit seinen Zerfallsprodukten steht, sind ja auch die von diesen Zerfallsprodukten emittierten γ-Linien vorhanden.

* D. Black, l. c.

Es war nun zu entscheiden, ob tatsächlich die in Emission stark auftretende Doppellinie von rund 167 X-E. so wenig im eigenen Atom absorbiert wird, daß ihre Photoelektronen im natürlichen β-Strahlenspektrum nicht gefunden werden, oder ob diese Linie vielleicht gar nicht dem Radiothor angehört. Es war nämlich auffallend, daß die gefundenen Wellenlängen sehr nahe mit den Wellenlängen der beiden K_α-Linien von Wismut übereinstimmen, die die Werte 161,3 und 166,3 X-E. besitzen. Nun ist ja bei den Drehkristallmessungen das Radiothor stets im Gleichgewicht mit seinen Zerfallsprodukten, und es ist bekannt, daß das Bleiisotop Thorium B nach seinem Zerfall in das Wismutisotop Th C 2 γ-Linien emittiert, von denen besonders die langwelligere außerordentlich stark im K-Niveau des Th C absorbiert wird, also eine intensive Anregung der Wismut-K-Strahlung bedingen muß.

Bei meinen Untersuchungen der γ-Strahlen aus dem β-Strahlenspektrum des Radiothors waren dagegen selbstverständlich Radiothorpräparate verwendet worden, die ursprünglich ganz frei von ihren Zerfallsprodukten waren. Man mußte daher feststellen, ob Thorium B, nach der Drehkristallmethode untersucht, auch die beiden Linien von 161 und 167 X-E. in der zu erwartenden Intensität aufwies. Da Thorium B nur eine Halbwertszeit von 10,6 Stunden besitzt, so war bei den uns zur Verfügung stehenden Präparaten, wenn mit demselben Abstand wie bei Radiothor gearbeitet werden sollte, ein Versuch von vornherein aussichtslos. In der voranstehenden Arbeit über das Absorptionsspektrum des Radiothors ist aber bewiesen worden, daß dessen unmittelbares Folgeprodukt, das Thorium X, keinerlei nachweisbare γ-Strahlen emittiert. Man konnte daher statt des so kurzlebigen Thorium B Thorium X-Präparate im Gleichgewicht mit Thorium B verwenden. Da das Thorium X mit seiner Halbwertszeit von 3,64 Tagen eine fast zehnmal so große Lebensdauer besitzt wie das Thorium B, so gibt ein Th X-Präparat im Gleichgewicht mit Th B bis zu seinem völligen Zerfall die zehnfache Strahlungsintensität, die die gleiche Th B-Menge für sich allein ergeben würde.

Es wurden zwei Aufnahmen mit Th X-Präparaten* nach der Drehkristallmethode gemacht mit jedesmaliger Expositionszeit von 10 Tagen. Beide Aufnahmen ließen an derselben Stelle wie beim Radiothor die Linie

---

* Ich möchte der Auer-Gesellschaft und besonders Herrn Dr. Wolf auch an dieser Stelle meinen besonderen Dank dafür aussprechen, daß sie mir zwei Th X-Präparate von etwa 20 mg Strahlungsintensität (verglichen mit der γ-Strahlung des Radiums) zur Verfügung gestellt haben.

von 167 X-E. erkennen; auf der Aufnahme mit dem stärkeren Präparat war die Linie deutlich doppelt. Beiderseitige Ablenkungen zur genaueren Ausmessung konnten nicht vorgenommen werden, da dazu viel stärkere Präparate nötig wären. Es scheint hiernach kein Zweifel, daß die fragliche Doppellinie dem Thorium B angehört und die durch dessen γ-Strahlen angeregten K_α-Linien des Folgeprodukts (Wismutisotops) darstellt.

Damit ist der Widerspruch zwischen den Thibaudschen Resultaten der Emissionsmessungen und den in der vorstehenden Arbeit nach Absorptionsmessungen erhaltenen Ergebnissen beseitigt. Das Radiothor zeigt auch in Emission nur die aus seinem natürlichen β-Strahlenspektrum hergeleiteten γ-Linien.

Es wäre natürlich gerade im Hinblick auf die Unsicherheit der Deutung dieser γ-Linien wichtig, auch nach der Drehkristallmethode entscheiden zu können, ob es sich tatsächlich um eine Doppellinie handelt. Um die dazu nötige höhere Meßgenauigkeit zu erreichen, wird derzeit eine wesentlich verbesserte Apparatur für Drehkristallaufnahmen aufgebaut, und die Versuche sollen dann auch mit stärkeren Präparaten wiederholt werden.

Zusammenfassung.

Aus Drehkristallaufnahmen der γ-Strahlen von Radiothor hatte Thibaud dem Radiothor außer der schon bekannten Linie von etwa 145 X-E. eine zweite von 168 X-E. zugeschrieben. Diese Linie konnte nach der Methode der Herleitung der γ-Strahlen aus dem natürlichen β-Strahlenspektrum nicht beobachtet werden. Die Wiederholung der Drehkristallaufnahmen einerseits mit Radiothor im Gleichgewicht mit Thorium X und seinen Zerfallsprodukten, andererseits mit Thorium X + Zerfallsprodukten allein, ergab, daß die Linie von 168 X-E. in Wirklichkeit eine Doppellinie ist, die dem Thorium B angehört und die durch dessen γ-Strahlen angeregten K_α-Linien des Folgeprodukts darstellt.

Über die Befreiung des Elektrons aus der Metalloberfläche durch langsame positive Ionen.

Von **Otto Klemperer** in Kiel.

(Eingegangen am 23. November 1928.)

Die Wahrscheinlichkeit, mit welcher ein Elektron aus der Oberfläche eines Metall durch ein positives Ion befreit wird, wird hier aus bekannten Daten über Entladungsvorgänge auf zwei grundsätzlich verschiedenen Wegen berechnet: 1. aus bekannten Stromspannungsmessungen der Townsendentladung, 2. aus dem Minimumfunkenpotential und dem Ionisierungsaufwand des Elektrons im Gase.

§ 1. Vorliegende direkte Messungen. Die direkte quantitative Bestimmung der Elektronenzahl, welche ein langsames positives Ion beim Auftreffen auf Metalloberflächen frei macht, begegnet wegen der sehr geringen Ergiebigkeit dieses Vorganges erheblichen Schwierigkeiten. Die vorliegenden direkten Messungen * haben keine übereinstimmenden Resultate ergeben, sie reichen auch nicht bis zu den hier interessierenden Ionengeschwindigkeiten von etwa 1 Volt herab, sondern können diese nur durch Extrapolation ermitteln.

§ 2. Berechnung der Befreiungswahrscheinlichkeit aus Stromspannungsmessungen der Townsendentladung. Eine indirekte Methode, welche die gesuchte Zahl der vom Ion befreiten Elektronen liefert, verwertet die Stromspannungsmessungen der Townsendentladung. Nach Townsend ** kann sowohl das positive wie das negative Ion durch Stoß im Gase neue Ionen erzeugen, die vom stoßenden Teilchen pro Zentimeter Weglänge erzeugte Ionenzahl, welche Ionisierungszahl genannt wird, ist nur vom Gasdruck und der elektrischen Feldstärke abhängig. Aus den Ionisierungszahlen kann Townsend die wichtigeren Vorgänge in der Gasentladung, besonders das Durchbruchspotential berechnen. Townsend *** bemerkt nebenbei, daß eine zweite Theorie, nämlich Ionisierung im Gase nur durch Elektronen und Befreiung dieser Elektronen aus der Kathode beim Aufprall der positiven Ionen zu denselben mathematischen Formeln wie seine erste Theorie führt. Wir kennen heute nun

---

* N. Campbell, Phil. Mag. **29**, 783, 1915; W. L. Cheney, Phys. Rev. **10**, 335, 1917; H. Bärwald, Ann. d. Phys. **60**, 1, 1919; E. Badareu, Phys. ZS. **25**, 137, 1924; A. L. Klein, Phys. Rev. **26**, 800, 1925; F. M. Penning, Proc. Amsterdam **31**, 14, 1928.

** I. S. Townsend in Marx' Handbuch der Radiologie.

*** Derselbe, l. c., S. 291; ferner E. Dubois, Ann. de phys. **20**, 113, 1923.

viele Experimente*, welche eine Entscheidung zugunsten dieser zweiten Theorie herbeigeführt haben, so daß es berechtigt scheint, auf die Townsendschen Ionisierungszahlen zu verzichten und statt ihrer nur die Ionisierungszahl des Elektrons und seine Befreiungswahrscheinlichkeit aus der Kathodenoberfläche durch das positive Ion in Betracht zu ziehen.

Die in der Literatur vorliegenden Entladungsmessungen gehen meistens auf eine Ermittlung der positiven und der negativen Ionisierungszahl aus; wir werden jetzt hier die uns interessierende Befreiungswahrscheinlichkeit mit hinreichender Genauigkeit berechnen** als den Quotienten der positiven und der negativen Ionisierungszahl.

§ 3. Berechnung der Befreiungswahrscheinlichkeit aus Minimumfunkenpotential und Ionisierungsaufwand. Eine meines Wissens neue Methode der Ermittlung der Befreiungswahrscheinlichkeit des Elektrons verwendet die bekannten Daten über den Ionisierungsaufwand und über das Minimumfunkenpotential. Bekanntlich zeigt die Funkenspannung zwischen ebenen Elektroden als Funktion von Druck und Elektrodenabstand ein Minimum. Dieses Minimumfunkenpotential ist eine charakteristische Konstante für das betreffende Gas und Elektrodenmaterial und ist numerisch gleich dem Kathodenfall***.

Bei jeder Entladung müssen wir annehmen, daß die Zahl der durch Elektronenstoß gebildeten positiven Ionen hinreichend groß ist, um bei ihrem Auftreffen auf die Kathode gemäß einer gegebenen Befreiungswahrscheinlichkeit j den Elektronenstrom zu regenerieren.

Für ein Minimumpotential tritt als spezielle Bedingung hinzu, daß die Ausbeute an positiven Ionen bei der Stoßionisation im Gase möglichst groß sein soll bei einer gegebenen, nämlich der dem Elektron vom Felde erteilten Energie. Dies ist so zu verstehen: Wir können bei einer Stoßionisierung im elektrischen Felde zwei Möglichkeiten unterscheiden, erstens einen „verzweigten Stoß", bei welchem das aus dem Gasmolekül herausgeschlagene Sekundärelektron durch das Feld derartig beschleunigt wird, daß es seinerseits wieder ionisieren kann, zweitens den „geraden Stoß", bei welchem sich das herausgeschlagene Sekundärelektron an ein Gasmolekül anlagert und deshalb die Fähigkeit verliert, seinerseits zu ionisieren. Beim Minimumfunkenpotential sind alle Stöße „verzweigte Stöße",

---

* Näheres hierüber bei H. Holst und E. Oosterhuis, Phil. Mag. **46**, 1117, 1923; I. Taylor, ZS. f. Phys. **45**, 620, 1927; W. Müller, ebenda **48**, 624, 1928.

** Siehe Anmerkung *** auf vor. Seite.

*** R. Holm, Phys. ZS. **16**, 20, 1915, sowie **19**, 548, 1918 und **25**, 497, 1924; ferner C. A. Skinner, Phys. Rev. **12**, 143, 1918.

und es werden deshalb bei z Stößen des Primärelektrons 2^z positive Ionen geliefert. Wegen der oben skizzierten allgemeinen Bedingung wird

$$2^z - 1 = \frac{1}{j}. \tag{1}$$

Ferner soll die ganze an den Elektroden liegende Potentialdifferenz V in den z Ionisierungsakten aufgezehrt werden, also

$$V = z \cdot \varepsilon, \tag{2}$$

wo ε den Ionisierungsaufwand, d. h. die zur Bildung eines Ionenpaares verausgabte Energie bedeutet. Aus (1) und (2) ergibt sich

$$\lg\left(\frac{1}{j} + 1\right) = \frac{V}{\varepsilon} \lg 2. \tag{3}$$

Es wurde angenommen, daß beim Minimumfunkenpotential alle Ionisierungsstöße „verzweigte" seien. Sollte diese Annahme nicht streng erfüllt sein, so würde die Formel (3) zu einer Unterschätzung der Größe von j führen.

§ 4. Vergleich der auf den verschiedenen Wegen gewonnenen Resultate. Die Befreiungswahrscheinlichkeit des Elektrons ist abhängig von der Geschwindigkeit des auftreffenden positiven Ions. Bei der Gasentladung ergibt sich die mittlere kinetische Energie des Ions aus dem Produkt von mittlerer freier Weglänge und elektrischer Feldstärke, sie ist also eine Funktion des Quotienten von Feldstärke und Druck. In unserer Tabelle sind für verschiedene Gase einige Befreiungswahrscheinlichkeiten und die ihnen entsprechenden mittleren Ionenenergien angeführt, gemessen in Kilovolt/cm durch cm Hg-Druck. Die Angaben

Zahl der befreiten Elektronen pro 1000 auftreffende Ionen ($1000\,j$) als Funktion der mittleren kinetischen Energie der Ionen: Feldstärke/Druck (u in Kilovolt/cm . cm Hg).

Luft		Kohlensäure		Wasserstoff		Argon		Beobachter
u	$1000\,j$	u	$1000\,j$	u	$1000\,j$	u	$1000\,j$	
8	19,3	10,5	3,5	1,7	22,3	6	23	Townsend und Mitarbeiter
6	12,7	10	2,3	0,87	6,7	5	19	
4	4	9	1,7	0,67	8,3	4	13	
1,75	0,8	8	0,9	—	—	3	8	
—	—	7	0,4	—	—	2	5	
0,6	0,15	—	—	—	—	—	—	Spath
0,5	0,1	—	—	—	—	—	—	
—	—	—	—	5,2	102	—	—	Dubois
—	—	—	—	3,9	76	—	—	
—	—	—	—	2,9	55	—	—	
—	—	—	—	1,6	22	—	—	
—	—	—	—	0,8	2,1	—	—	
5,8	6,6	8,4	0,93	2,4	7,4	3	7	Klemperer

erstrecken sich über einen Bereich, welcher den Ionen-Beschleunigungen von etwa 0,2 bis höchstens etwa 4 Volt pro mittlere freie Weglänge entspricht. Die ersten Zeilen der Tabelle enthalten die Werte, welche nach § 2 aus den von Townsend und seinen Schülern* gemessenen Ionisierungszahlen gewonnen sind. Dubois** hat bereits für Wasserstoff derartige Zahlen, welche er aus Townsendschen Messungen berechnete, zusammengestellt. In derselben Arbeit hat er eigene Messungen von Funkenspannungen zur Berechnung der Befreiungswahrscheinlichkeit benutzt. Wir geben in unserer Tabelle unter seinem Namen die Werte wieder, welche er für unbehandelte Elektroden*** gefunden hat. Bei Bewertung der Übereinstimmung mit den unter Townsend hier aufgeführten Zahlen ist zu beachten, daß in den Duboisschen Rechnungen die Townsendschen Ionisierungszahlen enthalten sind. Die Daten unserer Tabelle für die kleinsten Ionengeschwindigkeiten in Luft sind aus Messungen von W. Spath**** hergeleitet. Die entsprechenden Messungen Townsends sind hier nicht verwertet, weil sie bei den kleinen Ionengeschwindigkeiten wahrscheinlich nicht mehr genau sind †.

In der letzten Zeile der Tabelle stehen die Zahlen, welche nach § 3 aus dem Minimumfunkenpotential berechnet sind. Es wurden bei der Berechnung die niedrigsten (wahrscheinlich die genauesten) Werte des Minimumfunkenpotentials einer Zusammenstellung von Schumann †† benutzt (Luft = 327, CO_2 = 420, H_2 = 273, Ar = 233 Volt). Für den Ionisierungsaufwand wurden die Werte von Lehmann und Osgood ††† verwendet (Luft = 45, CO_2 = 45, H_2 = 37, Ar = 33 Volt).

Die Übereinstimmung mit den aus den Ionisierungszahlen gewonnenen Ergebnissen ist, wie man sieht, sehr gut.

Zum Schluß ist es mir eine angenehme Pflicht, den Herren Professoren H. Geiger und W. Kossel für ihr freundliches Interesse an dieser Arbeit zu danken.

Kiel, Physikalisches Institut der Universität, November 1928.

---

* I. S. Townsend, l. c., S. 247 u. 281.

** E. Dubois, l. c.

*** Ein Elektrodeneinfluß ist bei unseren Zusammenstellungen hier nicht berücksichtigt worden. Vgl. hierzu Townsend, l. c., S. 292, ferner O. Klemperer, Phys. ZS. Januar 1929.

**** Siehe W. O. Schumann, Elekt. Durchbruchsfeldstärke in Gasen. Berlin 1923.

† Ebenda S. 174.

†† Ebenda S. 51.

††† I. F. Lehmann und T. H. Osgood, Proc. Roy. Soc. **115**, 609, 1927; I. F. Lehmann, ebenda **115**, 624, 1927.

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Utrecht.)

Zur Prüfung der Schrödingerschen Theorie. II.

Von **J. L. Snoek jun.** in Utrecht.

(Eingegangen am 15. November 1928.)

Die schon früher* erwähnten Messungen der Absorption an H_α und H_β unter gleichen Umständen werden unter anderen äußeren Bedingungen wiederholt. Auch wird das Verhältnis von H_β zu H_γ unter verschiedenen Bedingungen gemessen. Die gefundenen Werte für das Verhältnis der Gesamtabsorption und für das Doppelverhältnis der Dublettkomponenten stehen mit der Forderung der Theorie in befriedigender Übereinstimmung.

In einer früheren Mitteilung* wird eine experimentelle Methode beschrieben, welche gestattet, längs des Weges der Absorptionsmessung in der Feinstruktur der Balmerserie zu zwei unabhängigen Prüfungen der Schrödingerschen Werte für die Übergangswahrscheinlichkeiten innerhalb des Wasserstoffatoms zu gelangen.

Auch wurden bereits Resultate der Messungen an H_α und H_β mitgeteilt, die mit der Theorie in Einklang standen. Die Messungen wurden nun nach zwei Richtungen hin vervollständigt, um eine möglichst strenge Prüfung der Theorie zu erhalten.

Erstens wurde das Verhältnis von H_α zu H_β bei ungefähr zehnmal höherem Druck bestimmt. Die effektive Rohrlänge war viermal kleiner (durch Anwendung der Hilfsanode) und die Stromstärke ungefähr die gleiche (letztere wurde immer solchen Werten für kl angepaßt, daß eine möglichst genaue Messung erhalten wurde).

Das Ergebnis stimmt im wesentlichen mit den früheren Meßresultaten überein.

Zweitens wurde auch H_γ in die Messungen einbezogen und mit H_β verglichen.

Bei der Vergleichung der zu erwartenden Genauigkeit der Messung mit derjenigen der Messungen an H_α und H_β können vier Ursachen angegeben werden, die die relative Genauigkeit beeinflussen.

Das Verhältnis der Gesamtabsorption ist bei H_β und H_γ weniger extrem als bei H_α und H_β (2,66 statt 5,37), welcher Umstand ihre Vergleichung erleichtert. Der Einfluß der negativen Absorption auf das

* J. L. Snoek und L. S. Ornstein, ZS. f. Phys. **50**, 600. 1928.

Verhältnis $H_\beta : H_\gamma$ ist geringer (4 bis 5 % statt 8 bis 10 %), also auch die Unsicherheit im Betrage der anzubringenden Korrektion. Weiter ist die gemessene Absorption unter denselben Umständen eine geringere, was die Messung erschwert; endlich ist auch die Auflösung der Dublettkomponenten weniger gut (durch Dopplereffekt) und damit die Messung des Doppelverhältnisses unsicherer.

Auch für die Messung an H_β und H_γ haben wir zwei gänzlich verschiedene Drucke angewandt. Im besonderen machte die Messung bei niedrigerem Druck große Schwierigkeiten, weil bei geringer Absorption schon die Eigenintensität des Absorptionsrohres diejenige des Hintergrundes (Emissionsrohr) überwog.

Im folgenden (Tabelle 1) sind die Gesamtergebnisse zusammengestellt, wobei auf Mitteilung der Einzelmessungen, die zu den Mittelwerten unter I, II, III, IV und V führten, verzichtet wurde.

Tabelle 1.

	H_α/H_β			H_β/H_γ	
	I*	II*	III	IV	V
Druck (in mm) . .	0,005	0,005	0,085	0,085	0,012
Stromstärke (mA) .	250	220	250	250	300
Rohrlänge (m) . . .	4	4	1	1	4
Totalverhältnis . . .	5,55	4,95	4,90	2,46	2,42
Theorie	$\frac{B_{23}\,\nu_{23}}{B_{24}\,\nu_{24}} = 5{,}37$			$\frac{B_{24}\,\nu_{24}}{B_{25}\,\nu_{25}} = 2{,}66$	
Abweichung vom theoretischen Wert	+ 3 %	− 9 %	− 10 %	− 9 %	− 10 %
Doppelverhältnis . .	0,91	0,92	$0{,}94^5$	$0{,}87^5$	1,06
Theorie	$\left\{\frac{Jk}{Jl}\right\}_\alpha : \left\{\frac{Jk}{Jl}\right\}_\beta = \frac{0{,}80}{0{,}91} = 0{,}89$			$\left\{\frac{Jk}{Jl}\right\}_\beta : \left\{\frac{Jk}{Jl}\right\}_\gamma = \frac{0{,}91}{0{,}96} = 0{,}95$	
Abweichung vom theoretischen Wert	+ 2 %	+ 3 %	+ 6 %	− 8 %	+ 12 %

Die Genauigkeit der Messung variiert nach den Umständen; jedoch kann der wahrscheinliche Fehler für das Verhältnis der Gesamtabsorption auf 10 bis 20 % geschätzt werden, für das Doppelverhältnis unter Umständen auf etwas weniger.

Es scheint in Hinsicht auf die Schwierigkeiten der photographischen Messung wohl kaum möglich die Genauigkeit höher zu treiben. Zur

* Für diese Messungen vgl. Mitteilung I.

Erreichung der erhaltenen Genauigkeit war es schon nötig, daß die Intensitätskurven auf weniger als 1 % genau bekannt waren.

Die Abweichungen sind von der zu erwartenden Größenordnung. Also darf in Hinsicht auf die relative Größe der Übergangswahrscheinlichkeiten die Schrödingersche Theorie als völlig gesichert gelten.

Über den Absolutwert der Übergangswahrscheinlichkeiten sagen selbstverständlich diese Experimente nichts aus.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und das rege Interesse bei der Ausführung möchte ich Herrn Prof. Ornstein herzlich danken.

Utrecht, den 12. November 1928.

Experimentaluntersuchungen über die Heliumbanden.

Von **Yoshio Fujioka** in Tokio.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 5. November 1928.)

I. Der Unterschied der relativen Intensitäten der Heliumbanden bei der Erregung mit Gleichstrom und kondensierter Entladung wurde untersucht. II. Zwei Banden, die im negativen Glimmlicht der Gleichstromentladung relativ stärker hervortreten, wurden analysiert.

Einleitung.

Das Bandenspektrum des Heliums hat seit seiner Entdeckung durch Curtis und Goldstein den Gegenstand vieler Untersuchungen gebildet. Mulliken* gelang es, das Termschema des Heliummoleküls festzulegen, und kürzlich fanden Weizel und Füchtbauer** Schwingungszustände des Heliummoleküls, von denen man erst geglaubt hatte, daß sie wegen der Instabilität des Moleküls nicht existieren könnten.

Bekanntlich erscheinen die Heliumbanden mit großer Intensität entweder im negativen Glimmlicht einer Gleichstromentladung oder in einer nicht zu engen Röhre unter dem Einfluß einer mäßig kondensierten Entladung. Wegen der Leichtigkeit, die Banden mit großer Intensität mit der kondensierten Entladung zu erhalten, ist diese von den meisten Forschern angewandt.

Merton und Pilley*** fanden im grünen Teile des Spektrums eine Bande, die im negativen Glimmlicht der Gleichstromentladung mit verhältnismäßig großer Intensität zum Vorschein kommt, obgleich sie in der kondensierten Entladung nur schwach ist. Sie stellten fest, daß diese Bande mit einer schwachen Entladung angeregt wird, während das übrige Spektrum einer kräftigeren Entladung zur Anregung bedarf.

Es ist jedoch bisher noch nicht untersucht worden, wie sich die Intensitätsverteilung im ganzen Spektrum ändert, wenn man die Entladungsbedingungen ändert. Im ersten Teile dieser Arbeit wird über eine derartige Untersuchung berichtet. Man findet in der Tat einen deutlichen Unterschied in manchen Teilen des Spektrums. Besonders bemerkenswert ist, daß die höheren Serienglieder verhältnismäßig stärker bei der Gleichstromentladung zum Vorschein kommen.

---

* R. S. Mulliken, Proc. Nat. Acad. Amer. **12**, 158, 1926; Phys. Rev. **28**, 1202, 1926.

** W. Weizel und Chr. Füchtbauer, ZS. f. Phys. **44**, 431, 1921.

*** T. R. Merton und J. G. Pilley, Proc. Roy. Soc. (A) **109**, 268, 1926.

Die von Merton und Pilley entdeckte Bande konnte mit genügender Intensität photographiert werden, so daß eine Analyse möglich war. Eine andere Bande, die sich den Entladungsbedingungen gegenüber genau so verhält, wurde in der Umgebung von λ 495 mμ gefunden. Es stellte sich heraus, daß sie dieselbe Struktur hat, wie die grüne Bande und wahrscheinlich denselben Endzustand. Darüber wird im zweiten Teile dieser Arbeit berichtet.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung und unter der Leitung von Professor Takamine begonnen. Prof. Takamine und Dr. Dieke waren zur gleichen Zeit mit der Analyse der Heliumbanden beschäftigt, so daß der Autor manche wertvolle Anregung und Hilfe von ihnen erhalten konnte, und er möchte seinen verbindlichsten Dank dafür zum Ausdruck bringen.

Teil 1. Intensitätsunterschiede in den Heliumbanden unter verschiedenen Anregungsbedingungen.

§ 1. Experimentelle Anordnung. Für die Untersuchung des Intensitätsunterschiedes in den Heliumbanden, je nachdem sie durch eine Gleichstrom- oder kondensierte Entladung angeregt werden, wurden zwei verschiedene Typen von Entladungsröhren benutzt. Die Röhre für die kondensierte Entladung ist eine „end on"-Röhre von 1,5 cm Durchmesser und ungefähr 100 cm Länge mit zwei Wolframelektroden. Der Heliumdruck war ungefähr 2,5 cm Hg, da bekannt ist, daß bei der kondensierten Entladung dieser Druck der günstigste für die Erzeugung der Banden ist. Für die Erzeugung des Stromes diente ein 20000 Volt-Transformator mit einer Funkenstrecke von einigen Millimetern Länge in Reihe oder zwei oder drei Leidener Flaschen parallel geschaltet. Die andere Röhre hatte zwei einander gegenüberstehende große zylindrische Aluminiumelektroden von 3 cm Durchmesser. Sie wurde mit einem Strome von ungefähr 50 mA betrieben, der von einem 500 Volt-Gleichstromgenerator geliefert wurde. Der Heliumdruck war ungefähr 5 bis 8 mm Hg, bei dem das negative Glimmlicht am stärksten hervortritt.

Um eine intensivere Lichtquelle zu erhalten, wurde eine andere Entladungsröhre konstruiert. Die Kathode ist eine halbzylindrische Aluminiumplatte von 10 cm Länge und 3 cm Durchmesser, deren äußere Oberfläche mit Glas bedeckt ist. Die Anode, ein Aluminiumzylinder von 1 cm Durchmesser, ist ungefähr 5 cm von der Kathode entfernt. Bei einem Heliumdruck von ungefähr 8 mm Hg war der Raum innerhalb der

Kathode mit einem schönen negativen Glimmlicht ausgefüllt, dessen Intensität ziemlich stark war, wenn man in der Richtung der Achse beobachtete. Die Stromstärke war 100 bis 250 mA.

Vor Beginn des Versuches wurde die Röhre einige Stunden lang betrieben und das Helium während dieser Zeit mehrere Male erneuert. Während des Experimentes wurden Verunreinigungen durch mit flüssiger Luft gekühlte Holzkohle absorbiert. Der zerstörende Einfluß der Verunreinigungen kommt besonders stark bei der Gleichstromentladung zum Ausdruck.

Im Laufe der Untersuchung wurden verschiedene Glasprismenspektrographen benutzt. (Ein Spektrograph mit zwei oder drei Glasprismen und 1 m Brennweite, Hilgers Wellenlängenspektrograph, Hilgers Uviolspektrograph usw.) Die beiden Röhren wurden hintereinander aufgestellt, so daß die Gleichstromröhre sich näher als die andere beim Spalt befand. Die Linse zwischen Röhren und Spalt war so eingestellt, daß die Gleichstromröhre scharf auf dem Spalt abgebildet wurde, da sie die schwächere von den beiden Röhren war. Die Spektrogramme der beiden Röhren wurden auf der Platte direkt nebeneinander aufgenommen, um sie leicht miteinander vergleichen zu können.

Man könnte geneigt sein zu glauben, daß der beobachtete Effekt ganz oder teilweise von dem Druckunterschied herrührt, der zwischen den beiden Entladungsröhren herrscht. Um hierüber Aufklärung zu bekommen, wurde die Gleichstromröhre mit der kondensierten Entladung erregt und das so erhaltene Spektrum mit dem Gleichstromspektrum verglichen. Die beiden Spektren zeigten fast dieselben Unterschiede, als wenn das eine Spektrum mit der anderen Röhre aufgenommen wäre. Daraus kann geschlossen werden, daß die relativen Intensitäten vom Drucke innerhalb der angegebenen Grenzen nicht merklich beeinflußt werden. Aus diesem Grunde wurde unbedenklich die oben erwähnte Anordnung mit den beiden getrennten Röhren angewandt, um für das Studium mit verhältnismäßig großer Dispersion intensive Lichtquellen zu erhalten.

§ 2. Resultate. Wir können die erhaltenen Resultate in zwei Gruppen einteilen, nämlich: 1. Beeinflussung der relativen Intensitäten innerhalb einer Bande; 2. Beeinflussung der relativen Intensitäten der Bandensysteme.

1. Beeinflussung der Intensität der Bandenlinien. Die Intensitätsverteilung innerhalb einer Bande zeigt deutliche Unterschiede, wenn man die Gleichstrom- und kondensierte Entladung miteinander vergleicht. Die Fig. 1 zeigt die Bande λ 465 mμ (0 → 0-Bande des

Systems $2s - 3p$) und λ 454 ($2p - 4s$). In beiden Fällen liegt das Intensitätsmaximum bei der kondensierten Entladung bei höheren Rotationsquantenzahlen. Diese Tatsache zeigt offenbar, daß die effektive

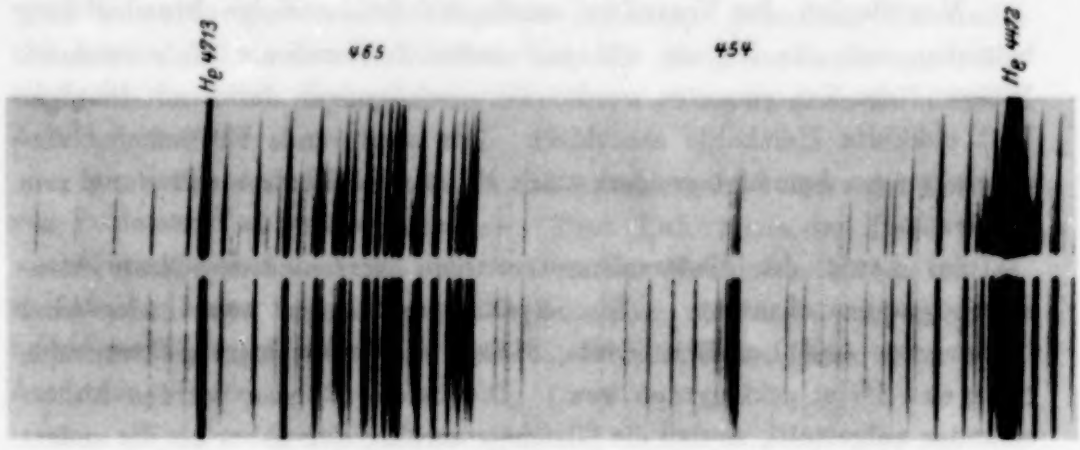


Fig. 1.
a = Kondensierte Entladung. b = Gleichstromentladung.

Temperatur in der Röhre mit der kondensierten Entladung höher ist. Das Intensitätsmaximum liegt bei den folgenden Linien (Tab. 1):

Tabelle 1.

Bande*		Kond. Entladung	Gleichstrom
465 ($2s - 3p$)	P-Zweig	P (5 ± 1)	P (4 ± 1)
	R-Zweig	R (5 ± 1)	R (4 ± 1)
640 ($2p - 3s$)	P-Zweig	P (7 ± 1)	P (5 ± 1)
	R-Zweig	R (8 ± 1)	R (6 ± 1)
454 ($2p - 4s$)	P-Zweig	P (7 ± 1)	R (6 ± 1)
	R-Zweig	R (8 ± 1)	R (7 ± 1)
513 ($2S - 3P$)	P-Zweig	P (11 ± 2)	P (9 ± 2)
	Q-Zweig	Q (9 ± 1)	Q (7 ± 2)
	R-Zweig	R (9 ± 1)	R (7 ± 1)

Die Resultate sind zu spärlich und ungenau, um daraus die Temperatur zu berechnen.

2. Beeinflussung der relativen Intensitäten der Bandensysteme. Es ist bemerkenswert, daß die relativen Intensitäten der Banden λ 465 ($2s - 3p$) und 454 ($2p - 4s$) stark von der Entladungsform abhängen (Fig. 1). 454 ist in der Gleichstromentladung relativ viel stärker, obwohl natürlich die absolute Intensität von 465 in beiden

* Die Bezeichnung ist dieselbe wie bei Dieke, Takamine und Suga, ZS. f. Phys. **49**, 637, 1928. Die Linien werden durch die Quantenzahl ihres Endzustandes bezeichnet. Bei der Serienbezeichnung der Banden bedeuten kleine Buchstaben Orthohelium und große Buchstaben Parhelium.

Fällen viel stärker ist. Die Vermutung, daß alle Banden der scharfen Nebenserie in der Gleichstromentladung relativ zu den Banden der Hauptserie verstärkt werden, bewahrheitet sich dagegen nicht, was durch einen Vergleich der Intensitäten von λ 640 ($2p - 3s$) in den beiden Entladungsformen festgestellt werden kann.

Wenn die Belichtungszeiten so geregelt werden, daß die Schwärzung der Bande λ 465 in beiden Fällen dieselbe ist, so finden wir keinen merkbaren Unterschied in den Intensitäten der Bande 640. Man findet also eine Veränderung der relativen Intensitäten der Banden einer Serie, und zwar nimmt die Intensität der höheren Serienglieder in der Gleichstromentladung langsamer ab als in der kondensierten Entladung.

Einige Banden zeigen in der kondensierten Entladung größere Intensität, wenn die Intensitäten der Bande 465 gleichgesetzt werden. Solche Banden sind z. B. λ 505 [$2s(n = 1) - 2p(n = 0)$] und 513 ($2S - 3P$) (n ist die Schwingungsquantenzahl). Die nächsten Glieder dieser Serien sind jedoch stärker in der Gleichstromentladung.

In der folgenden Tabelle 2 sind die Intensitätsveränderungen der beobachtbaren Banden angegeben. Die Belichtungszeiten sind immer so gewählt, daß die Intensitäten der Bande λ 465 in beiden Entladungen dieselben sind. + bedeutet, daß die betreffende Bande in der Gleichstromentladung stärker, 0, daß sie gleich und —, daß sie schwächer ist.

Tabelle 2. Orthohelium.

0 → 0	$2s - 3p$	465	Standard		$2p - 4z$	445	0
	$2s - 4p$	368	+	0 → 1	$2s - 3p$	505	—
	$2s - 5p$	335	+		$2s - 4p$	392	+
	$2s - 6p$	320	+		$2s - 5p$	356	+
	$2p - 3s$	640	0	1 → 1	$2s - 3p$	467	—
	$2p - 4s$	454	+		$2s - 4p$	369	*
	$2p - 5s$	403	+		$2s - 5p$	337	*
	$2p - 3d$	573	0		$2p - 3s$	640	*
	$2p - 3x$	588	0		$2p - 4s$	455	*
	$2p - 3y$	589	0		$2p - 3d$	575	*
	$2p - 3z$	595	0				

Parhelium.

0 → 0	$2S - 3P$	513	—		$2P - 3X$	624	—
	$2S - 4P$	400	+		$2P - 3Y$	625	—
	$2S - 5P$	363	+		$2P - 3Z$	631	0
	$2S - 6P$	346	+	0 → 1	$2S - 3P$	565	0
	$2P - 3S$	659	—		$2S - 4P$	432	+

* Unsicher.

Zwischen den relativen Intensitäten der entsprechenden Par- und Orthobanden in den beiden Entladungsformen ist kaum ein Unterschied zu bemerken. Jedoch erscheint beim Vergleich von λ 513 ($2S - 3P$) und λ 465 ($2s - 3p$) die Bande 513 etwas in der kondensierten Entladung verstärkt.

Um die Veränderung der Intensitäten der verschiedenen Oszillationsbanden eines Systems zu studieren, steht nicht viel Material zur Verfügung, da die Oszillationsbanden meist schwach sind und zudem die $1 \to 1$-Banden den $0 \to 0$-Banden überlagert sind. Nur im System $2s - 3p$ liegen die Verhältnisse günstig genug, und das Resultat ist, daß die Banden λ 505 ($0 \to 1$) und 467 ($1 \to 1$) in der kondensierten Entladung relativ zur Bande 465 ($0 \to 0$) verstärkt sind.

Im Bandenspektrum des Heliums gibt es noch verschiedene Gebiete, die bisher nicht analysiert wurden. Unter diesen tritt die Bande bei λ 416* besonders hervor. Sie ist in der Gleichstromentladung beträchtlich verstärkt. Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, fanden Merton und Pilley**, daß die Bande λ 535 in der Gleichstromentladung viel stärker zum Vorschein kommt als in der kondensierten Entladung. Im Laufe der vorliegenden Untersuchung wurde eine Bande bei λ 495 gefunden, die sich Veränderungen der Entladungsbedingungen gegenüber genau so verhält wie die Merton und Pilleysche Bande, und die, wie im nächsten Teile genauer ausgeführt werden wird, dieselbe Struktur hat.

Bei der Untersuchung, unter welchen Bedingungen die grüne Bande verstärkt wird, kamen Merton und Pilley** zu den folgenden Ergebnissen: Das Linienspektrum des Heliumatoms wird mit der schwächsten Energie erregt, und das gewöhnliche Bandenspektrum mit der stärksten, während die grüne Bande bei einer Erregung mit mittlerer Energie am stärksten zum Vorschein kommt. Die Verhältnisse scheinen aber nicht so einfach zu liegen, denn die Funkenlinie 4687,75 erscheint in der Gleichstromentladung mit großer Intensität, während sie in der kondensierten Entladung nur verhältnismäßig schwach ist.

Teil 2. Analyse der Banden 535 und 495.

Die oben beschriebene Entladungsröhre war intensiv genug, um die von Merton und Pilley entdeckte Bande mit einem großen Glasspektro-

* Von Leo gemessen (Ann. d. Phys. **81**, 757, 1926). Die dort gegebene Klassifikation ist jedoch nach der Analyse von Dieke, Takamine und Suga nicht zutreffend.

** l. c.

graphen aufzunehmen, dessen Dispersion für die Analyse der Bande genügend war. Diese Bande erscheint aber auch in der kondensierten Entladung, doch ist in diesem Falle die Intensität verhältnismäßig schwach, besonders mit einer langen Funkenstrecke. Aber da die absolute Intensität der kondensierten Entladung sehr stark ist, kann man die grüne Bande in einer langen Röhre mit einer kurzen Funkenstrecke unter Umständen intensiver erhalten als in der Gleichstromröhre. In der Tat wurden die besten Platten, die ausgemessen wurden, mit der Wechselstromröhre aufgenommen.

Der benutzte Spektrograph hatte zwei Flintglasprismen, jedes von 10 cm Basislänge. Die Kollimator- und Kameralinse waren Teleskopobjektive von 1,8 bzw. 2,8 m Brennweite, und die Dispersion des Spektrographen war ungefähr 8,0 Å.-E./mm bei 5300. Da keine thermostatische Kontrolle möglich war, konnten die Belichtungszeiten nicht über drei Stunden ausgedehnt werden.

Tabelle 3. Bande λ 495.

m	P-Zweig			R-Zweig		
	λ	I	ν	λ	I	ν
0	—	—	—	4953,32	0,5	20 182,9
2	4963,36	1	20 142,0	45,93	2	213,0
4	69,62	2	116,7	38,37	4	244,0
6	75,26	2	093,9	29,89	3	278,8
8	79,88	2	075,2	—	—	— *
10	84,20	1	057,8	12,22	1	351,7
12	87,81	0,5	043,3	02,85	0,5	390,6
14	90,65	0	031,9	—	—	—

Bande λ 535.

m	P-Zweig			R-Zweig		
	λ	I	ν	λ	I	ν
0	—	—	—	5346,63	0,5	18 698,2
2	5358,44	1	18 656,9	38,29	1,5	728,2
4	65,55	2	632,2	29,01	2	760,0
6	71,94	3	610,0	19,32	2	794,2
8	77,71	2	590,1	08,29	0	833,3 ***
10	80,25	1,5	576,0 **	5298,29	1	868,7
12	86,41	1	560,1	87,27	0,5	908,1
14	89,65	0,5	548,9	—	—	—

* Durch die starke Heliumlinie 4922 verdeckt.
** Gestört.
*** Gestört und sehr schwach.

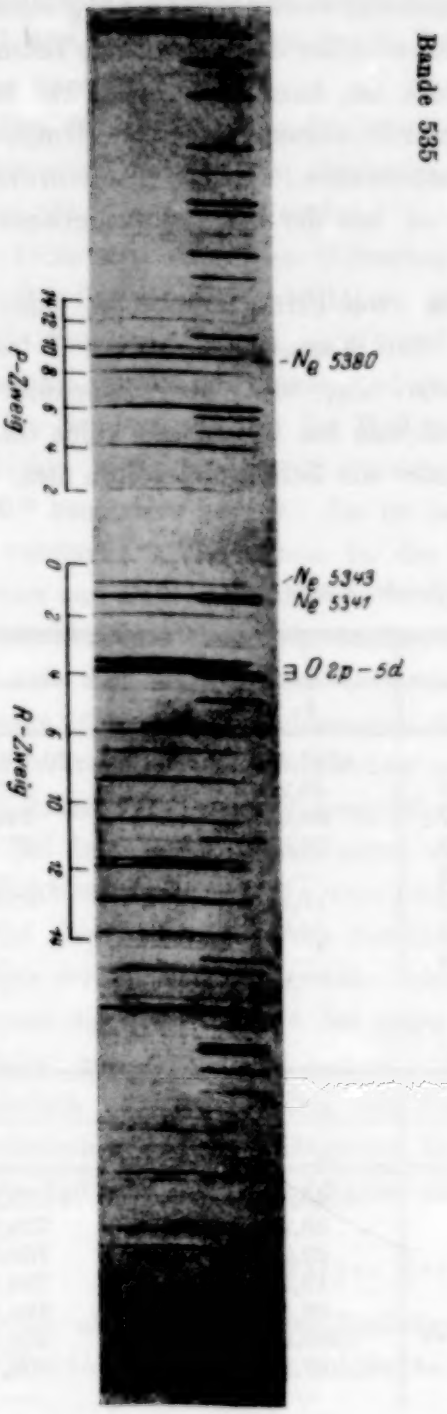

Bande 535
P-Zweig
R-Zweig
N_e 5380
N_e 5343
N_e 5341
$\exists$ O 2p – 5d

Fig. 2.

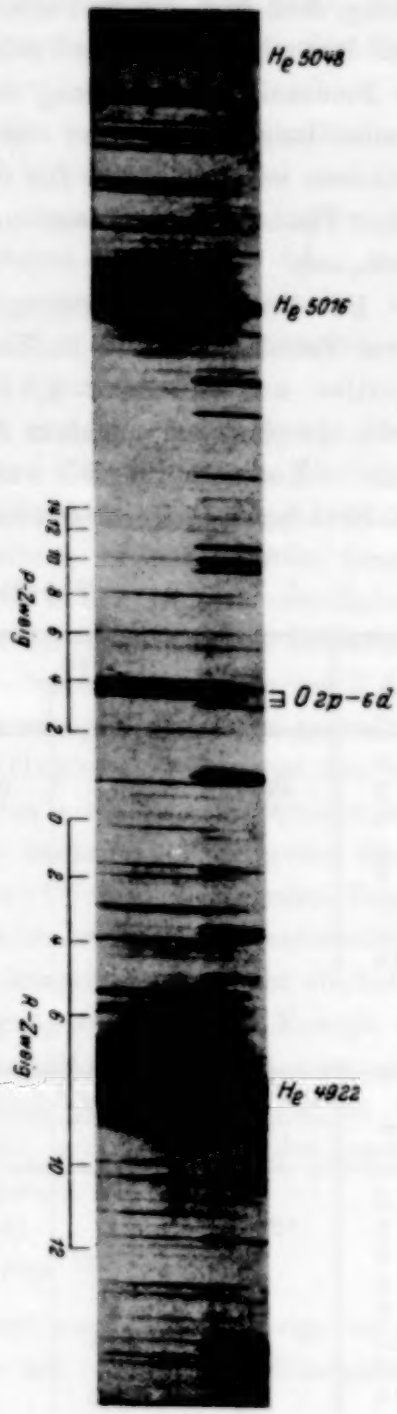

H_e 5048
H_e 5016
P-Zweig
R-Zweig
$\exists$ O 2p – 6d
H_e 4922

Fig. 3.

Bei der Messung dienten Sauerstofflinien, die als Verunreinigung auftraten, und einige von Curtis gemessenen Heliumlinien als Standards. Die Form der Dispersionskurve wurde mit Hilfe des Eisenvergleichspektrums bestimmt. Der wahrscheinliche Fehler der Messungen ist ungefähr $0{,}25\,\mathrm{cm}^{-1}$.

Die Merton und Pilleysche Bande erstreckt sich von λ 5296 Å.-E. bis λ 5387 Å.-E., und die im vorigen Abschnitt erwähnte neue Bande λ 495 von λ 4900 bis 4990 Å.-E. In beiden Liniengruppen springt sofort ein sehr einfacher Zweig in die Augen, der seiner Struktur nach ein P-Zweig sein muß, und es ist nicht schwierig, die zugehörigen R-Zweige zu finden. Dagegen scheinen diese Banden keine Q-Zweige zu besitzen.

Die Messungsergebnisse der beiden Banden sind in der folgenden Tabelle 3 aufgeführt.

Die Bezeichnung ist so gewählt, daß

$$R(m) = F'(m+1) - F''(m),$$
$$P(m) = F'(m-1) - F''(m),$$

wobei in grober Annäherung $F(m) = \text{const} + Bm(m+1)$ und $B = h/8\pi^2 I$; hieraus folgen die bekannten Kombinationsbeziehungen

$$R(m-1) - P(m+1) = F''(m+1) - F''(m-1),$$
$$R(m) - P(m) = F'(m+1) - F'(m-1).$$

Die Differenzen $R(m-1) - P(m+1)$ stimmen, wie die folgende Tabelle 4 zeigt, innerhalb der Grenzen der Messungsfehler überein.

Tabelle 4. $R(m-1) - P(m+1)$.

m . . .	1	3	5	7	9	11	13
Bande 495	41,2	96,0	149,9	204,0	—	308,6	359,1
„ 535	40,8	96,3	150,1	203,6	—	308,4	358,7

Hieraus folgt, daß die beiden Banden einen gemeinsamen Term haben müssen. Da die Bande 535 Störungen zeigt, die in der Bande 495 nicht auftreten, und gewöhnlich der Anfangszustand durch Störungen beeinflußt wird, ist es wahrscheinlich, daß der gemeinsame Zustand der Endzustand ist, und die Numerierung der Linien ist so gewählt, daß sie mit dieser Annahme übereinstimmt.

Die oben gegebenen Termdifferenzen des Endzustandes stimmen mit keinem der schon bekannten Terme überein. Die Termdifferenzen der Anfangszustände sind in der folgenden Tabelle 5 aufgeführt. Die letzte Zeile enthält die Differenzen $4p_a(m+1) - 4p_a(m-1)$, die aus der

Tabelle 5.

m	2	4	6	8	10	12
Bande 495	71,0	127,3	184,9	—	293,9	347,3
„ 535	71,3	127,7	184,1	243,1	293,8	348,0
$4p_a(m+1) - 4p_a(m-1)$.	71,2	127,9	184,1	238,1 244,6	296,9 290,4	348,3 —

Bande λ 368 berechnet sind. Die Übereinstimmung der Werte mit den entsprechenden der Bande λ 535 ist, von ein paar Ausnahmen abgesehen, befriedigend. Es scheint jedoch zweifelhaft, ob man daraus schließen darf, daß $4p_a$ der Anfangszustand der Bande λ 535 ist. Die Übereinstimmung könnte sehr wohl auf Zufall beruhen. Doch ist bemerkenswert, daß in beiden Fällen der Zustand $m = 9$ gestört ist. Doch ist der Betrag der Störung in den beiden Banden nicht genau derselbe, und das bietet die Hauptschwierigkeit gegen die Zuordnung von $4p$ als Anfangszustand von λ 535 und macht eine solche Zuordnung unmöglich, wenn kein Fehler bei der Einordnung der Linien gemacht ist.

Unter der Annahme, daß $4p_a$ der Anfangszustand von λ 535 ist, kann man auch die Banden berechnen, die $3p$ und $5p$ als Anfangszustand haben. Jedoch liegt die eine Bande weit im Ultraroten und die andere in einer Gegend, die sehr reich in anderen starken Linien ist, so daß die Anwesenheit dieser beiden Banden nicht festgestellt werden kann.

Wenn man annimmt, daß die Rotationsenergie angenähert durch $B(m-\varepsilon)^2 - m^4$ dargestellt werden kann, erhält man für die Konstanten der Banden die folgenden Werte:

		B	β	ε
Bande 495.	Anfangszustand . .	7,20	$6{,}8 \cdot 10^{-4}$	0,076
	Endzustand . . .	6,90	8,3	0,011
Bande 535.	Anfangszustand . .	6,98	2,33	0,074
	Endzustand . . .	6,87	5,5	0,011

Die Nullinien der beiden Banden sind:

Bande 495 20171,6
„ 535 18684,4

Über den Zusammenhang der beiden Banden läßt sich noch nichts sagen. Die Störungen und die Werte der Konstanten machen es jedoch so gut wie sicher, daß sie nicht Schwingungsbanden desselben Systems sind.

Beide Banden enthalten noch mehr Linien, und ein Teil von diesen läßt sich in einen Zweig einordnen, der das Aussehen eines P-Zweiges hat.

Diese Linien sind in der folgenden Tabelle 6 gegeben. Der zugehörige *R*-Zweig konnte nicht aufgefunden werden, und auch der Zusammenhang mit den vorher beschriebenen Zweigen ist noch nicht klar.

Tabelle 6.

4936,37	1	20 252,2	5229,88	1	18 863,1
12,25	3	228,1	5305,57	2	842,9
47,24	2	207,7	11,96	3	820,7
51,66	1	189,6	16,50	1	804,2
55,50	0,5	174,0	19,44	0,5	793,8
58,65	0	161,2	24,55	0	775,7

The Institute of Physical and Chemical Research, August 1928.

Messungen der spezifischen Wärme von Wolfram zwischen 90 und 2600° abs.

Von **C. Zwikker** in Eindhoven.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 3. November 1928.)

Es wurden neue Messungen angestellt zur Ermittlung der spezifischen Wärme von Wolfram über einem großen Temperaturbereich. Bei hoher Temperatur nimmt C_p linear mit der Temperatur zu, C_v nimmt verzögert zu und bleibt unter dem Wert von 8 cal/g Atom.

Mit der hierunter zu beschreibenden Untersuchung beabsichtigten wir in erster Linie, die numerischen Werte besser festzulegen. Die ver-

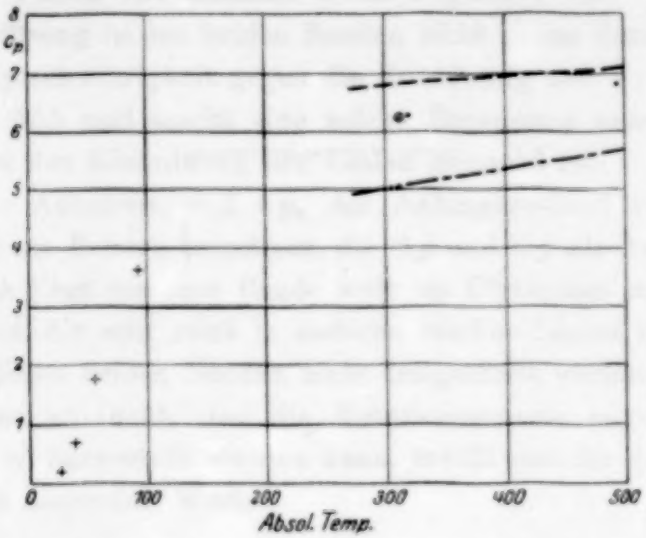


Fig. 1.

⊙ A. W. Grodspeed und E. F. Smith. — — — A. Magnus und H. Danz.
● E. Defacqz und M. Guichard. — · — · — F. M. Jaeger und E. Rosenbohm.
+ F. Lange.

schiedenen in der Literatur* mitgeteilten Meßergebnisse zeigen untereinander große Unterschiede. Die Fig. 1 und 2, in denen der größte

---

* A. W. Grodspeed und E. F. Smith, ZS. f. anorg. Chem. **8**, 207, 1895; E. Defacqz und M. Guichard, Ann. chim. phys. **24**, 139, 1901; P. Nordmeyer und A. L. Bernoulli, Verh. d. D. Phys. Ges. **9**, 175, 1907; M. Pirani, ebenda **14**, 1037, 1912; O. M. Corbino, Phys. ZS. **13**, 375, 1912; A. G. Worthing, Phys. Rev. **12**, 199, 1918; P. F. Gaehr, ebenda S. 396; K. K. Smith und P. W. Bigler, ebenda **19**, 268, 1922; F. Lange, ZS. f. phys. Chem. **110**, 343, 1924; L. I. Boekstahler, Phys. Rev. **25**, 677, 1925; A. Magnus und H. Danz, Ann. d. Phys. **81**, 407, 1926; F. M. Jaeger und E. Rosenbohm, Versl. Kon. Akad. Amsterdam **36**, 763, 960, 1927; W. Geiss und J. A. M. v. Liempt, ZS. f. anorg. u. allgem. Chem. **171**, 317, 1928.

Teil dieser älteren Messungen verarbeitet ist, mögen diese geringe Übereinstimmung illustrieren. An zweiter Stelle erschien es mir interessant, den genauen Verlauf der spezifischen Wärme bei höheren Temperaturen, über den schon mehrfach theoretische Aussagen gemacht worden sind, kennenzulernen.

Die von mir benutzte Methode für die Messungen zwischen 90 und 300° abs. ist die Eucken-Nernstsche*, bei der ein Stückchen des Metalls erst auf die Temperatur des flüssigen Sauerstoffs abgekühlt wird, wonach, während das Metall im Hochvakuum aufgehängt ist, mittels

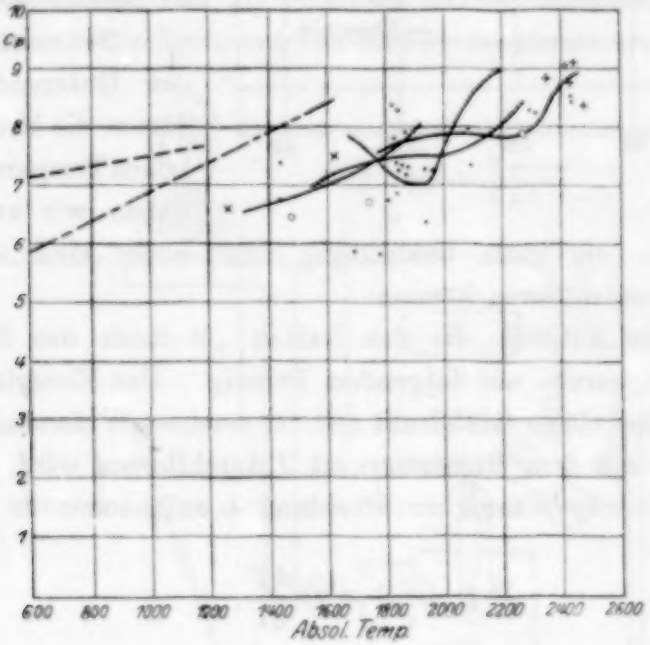


Fig. 2.

× M. Pirani 1912. + K. K. Smith und P. W. Bigler 1922.
⊙ A. G. Worthing 1918. — — — A. Magnus und H. Danz 1926.
● P. F. Gaehr 1918. — · — · — F. M. Jaeger und E. Rosenbohm 1927.

eines Heizelements aus Platindraht eine bekannte Energiemenge zugeführt wird. Die hierdurch hervorgerufene Temperaturerhöhung hängt von der Wärmekapazität des Versuchsmetalls ab und gestattet diese zu berechnen.

Nach dieser Methode sind folgende Werte für die Atomwärme des Wolframs gefunden:

Erste Serie:

T . . .	92	93	94	96	108	113	130	140	238	240	248	290° K
C_p . . .	3,48	3,11	3,44	3,78	4,00	4,09	5,07	4,61	5,65	5,48	4,14	5,88 cal/g-Atom

Zweite Serie:

T . . .	92	93	108	111	150	156	195	205	280	282° K
C_p . . .	3,75	3,62	4,10	4,07	4,79	4,74	5,24	5,39	5,84	5,60 cal/g-Atom

* A. Eucken, Phys. ZS. **10**, 586, 1909; W. Nernst, Ann. d. Phys. **36**, 395, 1911.

Diese Punkte sind in Fig. 3 aufgetragen. Es ergibt sich, daß sie in gutem Einklang mit der Theorie von Debye stehen, wenn man der darin auftretenden charakteristischen Temperatur in Verfolg von Lange (l. c.) den Wert 310 gibt. Die mit diesem Werte berechnete theoretische Kurve ist ebenfalls in Fig. 3 eingezeichnet. Nur in der Nähe von $T = 300^0$ K liegen die Meßpunkte im Mittel zu hoch.

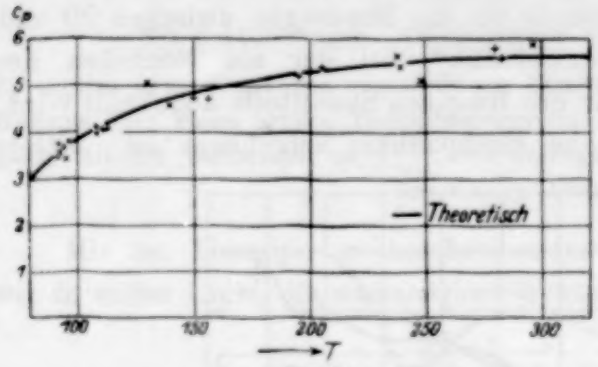


Fig. 3.

Der wichtigste Teil der Untersuchung ist indessen die Messung bei sehr hohen Temperaturen. Hierfür haben wir zwei Methoden ausgearbeitet, die ganz unabhängig voneinander sind und sich also gegenseitig kontrollieren können.

Die erste Methode, die den Namen „Methode des Zusatzstromes" tragen möge, beruht auf folgendem Prinzip. Das Energiegleichgewicht fordert, daß bei einem Glühdraht mit Ohmschem Widerstand R, der von einem Strom mit dem Momentanwert J durchflossen wird, gilt:

Joulesche Wärme = Strahlung + aufgenommene Energie

oder

$$J^2 R = S + C \frac{dT}{dt},$$

C bezeichnet die totale Wärmekapazität des Fadens.

Wenn nun J konstant ist, erhält man aus dieser Gleichung, weil R und S Funktionen der Temperatur T sind, durch Integration:

$$t_1 - t_0 = C \int_T^{T+\Delta T} \frac{dT}{J^2 R - S}.$$

Man kennt für Wolfram R und S mit genügender Genauigkeit als Funktionen von T*. Man hat also nur die beiden Temperaturen T und $T + \Delta T$ und die Zeitdifferenz $t_1 - t_0$, in der die Temperatur von T auf $T + \Delta T$ anwächst, zu bestimmen, und man kann die Größe C auf graphischem Wege ermitteln. Die Messung wurde so ausgeführt, daß einem Wolframdraht, der längere Zeit auf konstanter Stromstärke geglüht hatte,

* C. Zwikker, Versl. Kon. Akad. Amsterdam **34**, 468, 1925; H. A. Jones, Phys. Rev. **28**, 202, 1926.

zur Zeit t_0 ein Zusatzstrom erteilt wurde, und beobachtet wurde, in welchem Augenblick die Temperatur einen zuvor festgelegten Wert $T + \Delta T$ erreicht hatte. Beziehungsweise wurde zur Zeit t_0 der Strom um einen gewissen Betrag vermindert und abgewartet, bis die Temperatur einen gewissen Wert $T - \Delta T$ erreichte.

Die Versuchsanordnung ist aus Fig. 4 ersichtlich.

Die Lampe L_1 ist die Meßlampe, die von der Batterie B_1 gespeist wird; die Stromstärke wird abgelesen auf A_1. Zur Zeit t_0 wird der Schalter S_1 geschlossen und L_1 von dem auf A_2 abzulesenden Zusatzstrom durchflossen. Die Spannung der Lampe L_1 nimmt erst sprunghaft,

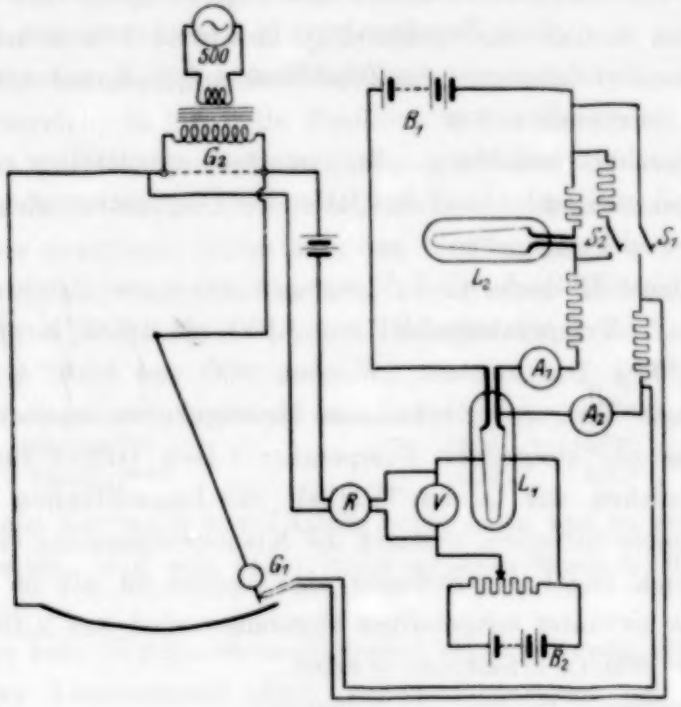


Fig. 4

danach kontinuierlich zu. Die hierbei hervorgerufene Verminderung des primären Stromes wird dadurch kompensiert, daß zugleich mit dem Schalter S_1 ein Schalter S_2 eingedrückt wird, der einen über der Lampe L_2 stehenden Nebenschluß schließt. Der Widerstand des primären Stromzweiges wird hierdurch zur Zeit t_0 sprunghaft und danach wegen des Abkühlens des Glühdrahtes der Lampe L_2 kontinuierlich erniedrigt. Die beiden Lampen L_1 und L_2 sind ungefähr kongruent; demzufolge steigt L_1 ebenso schnell in der Temperatur, wie L_2 fällt. Durch angemessene Wahl des Nebenschlusses kann man erreichen, daß der primäre Strom vollkommen konstant bleibt.

Zur Zeit t_0 tritt gleichfalls in dem sich im Stromzweige von S_1 befindenden Widerstand eine Spannung auf, die den dünnen Draht G_1 durchschlägt und das links gezeichnete Pendel in Bewegung setzt. Zur Zeit t_1, wenn die Lampe L_1 eine gewisse Spannungserhöhung erreicht hat, schließt das Relais R einen Strom, demzufolge der Glühdraht G_2, der bisher die Pole eines Ruhmkorffschen Induktoriums kurzgeschlossen hielt, durchschmilzt. Die Hochspannung des Induktoriums kommt jetzt zwischen das Pendel und den kreisförmigen Nickelstreifen zu liegen. Die Stelle des ersten Durchschlags zwischen Pendel und Nickelstreifen wird auf einem Papierstreifen registriert, der mit einer K J-Stärkelösung getränkt ist. Das Ruhmkorffsche Induktorium wurde mit 500 periodischem Wechselstrom gespeist, so daß die Durchschläge in Zwischenräumen von $^1/_{500}$ Sekunde aufeinanderfolgten und die Zeitdifferenz $t_1 - t_0$ mit entsprechender Genauigkeit festzustellen war.

Eine Umschaltvorrichtung, die gestattete, unmittelbar nacheinander Messungen bei steigender und bei fallender Temperatur auszuführen, ist in der Figur nicht angegeben.

Nach dieser Methode sind Messungen an einem Draht von 863 μ Durchmesser im Temperaturgebiet von 1400 bis 2200° K und an einem Draht von 300 μ Durchmesser zwischen 600 und 1400° K ausgeführt. Die bei fallender Temperatur erhaltenen Meßergebnisse waren systematisch höher als die bei steigender Temperatur. Den Grund für diese Unstimmigkeit suchen wir in der Trägheit der Ionendiffusion in den verwendeten Sammlerbatterien, wodurch die Klemmenspannung des Sammlers bei schnell sich ändernden Strömen eine andere ist als im stationären Betrieb. Die hierunter mitgeteilten Ergebnisse sind das Mittel zwischen den auf beide Weisen erhaltenen Werten.

Die gemessenen Punkte sind folgende:

Draht von 863 μ Durchmesser:

T . . .	1415	1520	1615	1710	1805	1890	1975	2055	2135	2220° K
C_p . . .	7,1	7,3	7,2	$7,5^5$	7,7	7,6	7,5	7,5	$7,7^5$	7,9 cal/g-Atom

Draht von 300 μ Durchmesser:

T . . .	640	750	840	900	920	980	1000	1050	1060	1225° K
C_p . . .	$6,5^7$	$6,5^1$	$6,6^8$	$6,3^0$	$7,0^4$	6,5	$6,9^7$	6,8	$6,6^3$	$6,9^5$ cal/g-Atom

Wir gehen jetzt zur Beschreibung der zweiten, ebenso nur für hohe Temperaturen anwendbaren Methode über, die auf der Schwankung der thermischen Elektronenemission beruht.

Ein Glühfaden, der von einem Wechselstrom mit der Frequenz ν gespeist wird, hat eine Temperatur, die nicht ganz konstant ist, sondern

um einen Mittelwert sinusförmig schwankt. Die Amplitude dieser Schwankung ist

$$\Theta = \frac{2\,V\eta}{C_p \,.\, d \,.\, \nu},$$

worin

V = Atomvolumen,
η = Totalstrahlung pro cm² Drahtoberfläche,
C_p = Atomwärme bei konstantem Druck.
d = Drahtdurchmesser.
ν = Frequenz des Heizstromes.

Alle Größen, die temperaturabhängig sind, zeigen eine Schwankung. Wir haben die Schwankungen der thermischen Elektronenemission zur Messung von Θ und also von C_p benutzt, was dadurch möglich wurde, daß die Elektronenemission des Wolframs eingehend erforscht ist*. Der Temperaturbereich, in dem die Emission weder zu klein, noch zu groß ist, um eine genaue Messung zu liefern, ist aber ziemlich beschränkt, nämlich von 2200 bis 2600° K. Man kann den Anwendungsbereich der Methode aber erweitern, indem man den Wolframfaden mit einer dünnen Schicht (eventuell monomolekular) einer Substanz bedeckt, die bei viel niedrigeren Temperaturen die gleiche Emission hat. Es kommen hierfür in Betracht:

Thorium**	emittierend	zwischen	1600	und	1800° K,
Barium***	„	„	1200	„	1400° „
Cäsium****	„	„	600	„	800° „

Nur beim Gebrauch von Cäsium begegneten uns so viele technische Schwierigkeiten, daß wir dabei nicht zu zuverlässigen Resultaten gekommen sind.

Da uns kein Wechselstromgenerator zur Verfügung stand, der auch bei niedriger Frequenzzahl einen reinen Sinusstrom mit absolut konstanter Frequenz und Amplitude erzeugte, waren wir gezwungen, selbst eine Maschine zu bauen, die an anderer Stelle† beschrieben wird, und die allen diesen Anforderungen genügte.

In Fig. 5 ist die Versuchsanordnung wiedergegeben.

Links oben ist die eigentliche Meßlampe gezeichnet, die einen gestreckten Wolframfaden enthält, der mittels eines Umschalters entweder

---

* C. Davisson und L. H. Germer, Phys. Rev. **20**, 300, 1922; C. Zwikker, Versl. Kon. Akad. Amsterdam **35**, 339, 1926.

** I. Langmuir, Phys. Rev. **22**, 357, 1923.

*** W. Wien u. W. Harms, Handb. d. Experimentalphysik Bd. XIII [2], S. 312.

**** Ebenda S. 186.

† Physica **8**, 1928. Im Erscheinen.

von Gleichstrom oder von Wechselstrom gespeist werden kann. Die Gleichstromheizung ist notwendig zur Ermittlung der Charakteristiken der Lampe. Der Gleichstrom wird mit dem Kompensationsapparat über dem Normalwiderstand N gemessen. Die Elektronenemission wird auf einer zylindrischen Anode aus Nickel oder Zirkon (Zirkon bindet Gasreste) aufgefangen, die bis auf zwei kleine Löcher zum Hindurchlassen des Glühfadens vollkommen dicht ist. Die aus der Anode herausragenden Teile des Glühdrahtes sind von Wolframwendeln umgeben, die in bezug auf den Glühdraht ein negatives Potential haben und also die

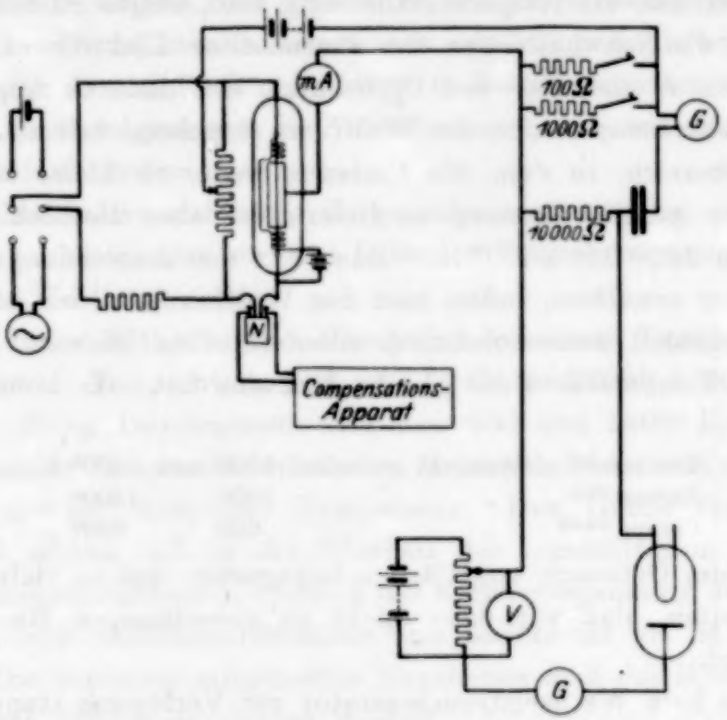


Fig. 5.

Elektronenemission dieser Teile abschirmen. Die Elektronen werden mittels eines im Nebenschluß zu dem Glühdraht liegenden Potentiometers zum Glühdraht zurückgeführt. Mit diesem Potentiometer kann man die Schwankung in der Elektronenemission, die vom Schottky-Effekt herrührt*, möglichst gering machen.

Rechts oben bezeichnet G ein Torsionsfadengalvanometer von Kipp und Zonen, welches mit einem großen Widerstand (10000 Ohm) und einer Kapazität (2 μF) in Serie geschaltet ist. Galvanometer + Widerstand

* Unter Schottky-Effekt versteht man die (kleine) Änderung der Sättigungsemission bei einer Änderung der Anodenspannung. Letztere schwankt etwas, weil der Glühfaden auf Wechselspannung glüht.

können zu Widerständen von 100 und 1000 Ohm in Nebenschluß gelegt werden. Der Gleichstromanteil der Elektronenemission geht nicht durch das Galvanometer, der Wechselstromanteil verteilt sich nach dem Kirchhoffschen Satz.

Die Amplitude der auf dem Widerstand vom 10000 Ohm auftretenden Wechselspannung wird mittels der rechts unten gezeichneten Vorrichtung zur Messung des Scheitelwertes ermittelt, wie es in der Hochfrequenztechnik üblich. Man erteilt der Anode der dort gezeichneten Diode eine so große negative Vorspannung, daß kein Emissionsstrom durch die Diode geht. Bekanntlich ist die kleinste Vorspannung, die den Strom gerade noch unterdrückt, gleich dem Scheitelwert der zu messenden Wechselspannung.

Wir würden das Torsionsfadengalvanometer selbst für die Messung der Schwankung des Emissionsstromes benutzt haben, wenn nicht die Eichung von der Frequenz abhängig gewesen wäre. Das Galvanometer diente jetzt nur dazu, die Konstanz der Schwankung und die Reinheit des Sinus (letzteres mittels eines drehenden Spiegels) zu prüfen.

Es sei schließlich noch erwähnt, daß es zur Eliminierung der ersten Oberschwingung notwendig war, die Schwankungsamplitude der Emission nach oben und nach unten zu messen und zwischen den beiden so gefundenen Amplituden zu mitteln. Eine hierzu dienende Umschaltvorrichtung ist wegen der besseren Übersicht nicht in der Figur angegeben worden.

Die Ergebnisse der nach dieser Methode ausgeführten Messungen sind folgende:

a) Wolframemission. Drahtdurchmesser 40 μ.

Erste Serie:

T	2210	2265	2306	2398° K
Frequenz . .	49,8	—	—	—
Cp	8,0	8,0	$8{,}1^5$	8,2 cal/g-Atom

Zweite Serie:

T	2210	2265	2306	2398	2470	2521° K
Frequenz . .	50,0	—	—	—	—	—
Cp	$8{,}1^5$	$8{,}1^3$	$8{,}2^0$	$8{,}2^8$	$8{,}3^7$	$8{,}3^5$ cal/g-Atom

b) Thoriumemission. Drahtdurchmesser 119 μ.

Erste Serie:

T	1610	1700	1805° K
Frequenz . .	7,30	7,82	8,45
Cp	$7{,}4^0$	$7{,}4^7$	$7{,}4^7$ cal/g-Atom

Zweite Serie:

T	1640	1669	1754	1873° K
Frequenz . .	7,52	7,10	13,6	12,8
Cp	$7{,}4^5$	$7{,}3^9$	$7{,}5^0$	$7{,}6^2$ cal/g-Atom

c) Bariumemission. Drahtdurchmesser 51,7 μ.

Erste Serie:

T	1150	1217	1250	1269	1287	1305	1333° K
Frequenz . .	$9{,}7^5$	10,2	10,4	10,4	11,3	$11{,}5^5$	13,9
C_p	$7{,}0^0$	7,1	7,2	7,0	$6{,}8^0$	$7{,}0^3$	$7{,}2^0$ cal/g-Atom

Zweite Serie:

T	1259	1288	1305° K
Frequenz . .	12,0	$11{,}5^5$	$10{,}9^5$
C_p	$7{,}0^7$	$6{,}9^1$	$7{,}0^5$ cal/g-Atom.

In Fig. 6 ist das mittlere Resultat sämtlicher Messungen durch die mit C_p bezeichnete Kurve angegeben. Von theoretisch höherem Interesse ist die Kenntnis der Größe C_v, die aus C_p nach der thermodynamischen Formel

$$C_p - C_v = \frac{9\alpha^2 V T}{\varkappa}$$

berechnet wird, wo

α = linearer thermischer Ausdehnungskoeffizient,
V = Atomvolumen,
T = absolute Temperatur,
$\varkappa$ = Kompressibilität.

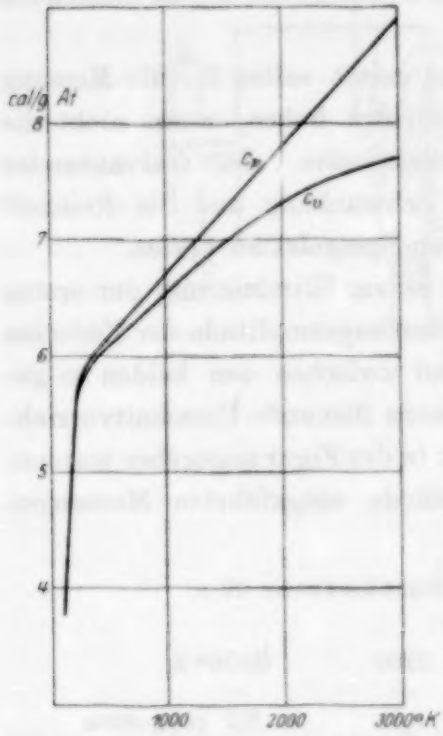


Fig. 6.

Die Schwierigkeit bei der Umrechnung von C_p auf C_v besteht darin, daß $\varkappa$ bei höheren Temperaturen nicht bekannt ist. Bei Zimmertemperatur ist $\varkappa$ von T. W. Richards und E. P. Bartlett* und von P. W. Bridgman** gemessen. Als Mittelwert aus diesen Beobachtungen können wir annehmen

$$\varkappa = 3{,}0 \cdot 10^{-7}\ \text{cm}^2/\text{kg}.$$

Zur Berechnung der Werte von $\varkappa$ für höhere Temperaturen knüpfe ich an Messungen von W. Geiss*** an, der Elastizitäts- und Gleitmodul E und G von Wolfram als Funktion der Temperatur bestimmte und dabei fand, daß beide proportional sind der Größe

$$\left(\frac{T_{\text{Schmelzp.}} - T}{T_{\text{Schmelzp.}}}\right)^{0{,}263}.$$

* Journ. Amer. Chem. Soc. **37**, 470, 1915.
** Proc. Amer. Acad. **58**, 165, 1923.
*** Ann. d. Phys. **77**, 106, 1925.

Der Beziehung

$$\varkappa = \frac{9}{E} - \frac{3}{G}$$

zufolge ist dann $\varkappa$ proportional

$$\left(\frac{T_{\text{Schmelzp.}}}{T_{\text{Schmelzp.}} - T}\right)^{0{,}263}.$$

Mit den auf diese Weise erhaltenen Werten für $\varkappa$ kann ich folgende Tabelle aufstellen:

T ° K	C_p cal/g-Atom	$C_p - C_v$ cal/g-Atom	C_v cal/g-Atom
100	3,77	0,00	3,77
200	5,32	0,02	5,30
300	5,90	0,03⁵	5,87
600	6,23	0,08¹	6,15
900	6,57	0,13	6,44
1200	6,90	0,19¹	6,71
1500	7,23	0,27²	6,96
1800	7,56	0,38²	7,18
2100	7,89	0,52⁷	7,36
2400	8,22	0,71⁷	7,50
2700	8,56	0,94¹	7,62
3000	8,89	1,19	7,70

Das Ergebnis kann also kurz wie folgt zusammengefaßt werden: Für Temperaturen unter 300° K befolgen C_p und C_v das Debyesche Gesetz mit dem Werte 310 für die charakteristische Temperatur. Für Temperaturen über 300° wächst C_p linear mit T an; auch C_v wächst bis weit über den klassisch-theoretischen Wert $3R = 6$ cal/g-Atom an. Der Anstieg von C_v ist aber verzögert, C_v scheint sich asymptotisch für $T \to \infty$ dem Werte 8 cal/g-Atom zu nähern.

Eindhoven, Natuurk. Labor. d N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Oktober 1928.

Zerlegung des Faradayeffekts in zwei Erscheinungen verschiedenen Ursprungs. Diamagnetische und paramagnetische Rotationspolarisation. Magnetisierungsgesetz fester Kristalle.

Von **Jean Becquerel** und **W. J. de Haas** in Leiden.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 16. August 1928.)

Frühere Untersuchungen haben gezeigt, daß gewisse Mineralien von seltenen Erden ein sehr großes Drehvermögen paramagnetischen Ursprungs haben. Wir haben das Gesetz der Änderung des Drehvermögens als Funktion des magnetischen Feldes gesucht. Man konnte voraussehen, daß bei genügend niedrigen Temperaturen die Drehung aufhören würde, dem Felde proportional zu sein. Bei den Temperaturen, die mit flüssigem Helium erreichbar sind, ist dies in der Tat beim Tysonit beobachtet worden. Wir haben das folgende Gesetz gefunden:

$$\varrho = \varrho_\infty \operatorname{Tg} \frac{\Sigma_\infty H}{RT}.$$

Σ_∞ liegt dem Bohrschen Magneton so nahe, daß wir glauben, die Zahl muß genau gleich dem Bohrschen Magneton sein. Die Sättigungsdrehung ϱ_∞ ist eine Funktion der Wellenlänge (Rotationsdispersion) und auch der Temperatur (Intensitätsänderung der Absorption mit der Temperatur). Dieses Gesetz ist der vollständige Beweis für die Existenz des paramagnetischen Polarisationsdrehvermögens. Die Form des Gesetzes bestätigt die Theorien von Lenz und Ehrenfest über die Magnetisierung eines Kristalls in einer Hauptrichtung.

1. Einführung. — Frühere Untersuchungen. Vor ungefähr zwanzig Jahren machte der eine von uns* auf folgende Tatsache aufmerksam: Das magnetische Drehungsvermögen gewisser seltene Erden (Erbium, Neodym, Praseodym) enthaltender Mineralien steigt beträchtlich mit sinkender Temperatur und wächst ungefähr umgekehrt proportional der absoluten Temperatur. Ein deutliches Parallelgehen mit dem Curieschen Gesetz für die paramagnetische Suszeptibilität veranlaßte den Verfasser, das Vorhandensein eines wesentlich mit dem Paramagnetismus verknüpften Drehungsvermögens anzunehmen, das sich in den paramagnetischen Körpern dem diamagnetischen Drehungsvermögen überlagert, das seinerseits mit dem Zeemaneffekt verknüpft und ebenso allgemein wie dieser ist.

Wir bringen heute den entscheidenden Beweis für die Existenz der paramagnetischen Rotationspolarisation. Aber vor der Beschreibung

* Jean Becquerel, Le Radium **5**, 16, 17, 1908; Rapports présentés au 1er Congrès international du froid **2**, 43, 44, 1908; derselbe und H. Kamerlingh Onnes, Comm. Leiden Nr. 103; Le Radium **5**, 238, 1908.

unserer Untersuchungen ist es von Interesse, die Geschichte der Frage zu bringen; denn der Gedanke eines Zusammenhanges zwischen Faradayeffekt und magnetischen Eigenschaften der Körper ist schon alt: Von einigen Physikern angenommen, von anderen geleugnet, hat diese Hypothese mancherlei Diskussionen hervorgerufen.

Vier Jahre nach der Entdeckung von Faraday fand Edmond Becquerel*, daß in Wasser gelöste Eisensalze das magnetische Drehungsvermögen der Flüssigkeit erheblich herabsetzen. Verdet** sah sich veranlaßt, den Eisensalzen ein Drehungsvermögen zuzuschreiben, das gerade entgegengesetzt dem war, das sich in allen Versuchen von Faraday gezeigt hatte. Um die beiden Richtungen zu unterscheiden, bezeichnete Verdet sie als positiv*** (Wasser. Glas usw.) und negativ.

Es lag nahe, anzunehmen, daß die von den Eisensalzen gelieferte negative Richtung in den magnetischen Eigenschaften dieser Salze ihren Grund hat; daß auf irgend eine allgemeine Art die diamagnetischen Substanzen eine positive und die magnetischen Körper eine negative Drehung hervorrufen. Jedoch hat das Titantetrachlorid ein negatives Drehungsvermögen, obgleich es diamagnetisch ist: Verdet glaubte, daß diese Tatsache jeden Zusammenhang zwischen magnetischen Eigenschaften und Drehungssinn widerlege.

Henri Becquerel**** richtete sein Augenmerk auf die magnetischen Substanzen. Er erkannte, daß „die magnetische Drehung der Stoffe mit ihrem Brechungsindex verknüpft ist und mit einer anderen Funktion, die von der spezifischen Magnetisierung der Stoffe abhängt". Er bestätigte zum ersten Male das Vorhandensein eines Zusammenhangs zwischen dem magnetischen Drehungsvermögen und den magnetischen Eigenschaften der Körper. Unglücklicherweise waren zu jener Zeit (1876) die Kenntnisse über den Ursprung der magnetischen Erscheinungen ungefähr gleich Null, und man konnte daher die Ursachen des Faradayeffekts nicht finden. Henri Becquerel schrieb die Drehung in negativem Sinne dem Entstehen eines inneren magnetischen Feldes zu, das dem äußeren entgegen-

---

* Edmond Becquerel, Ann. chim. phys. (3) **28**, 334, 1850.

** Verdet, ebenda (3) **52**, 144, 1858.

*** Der Drehungssinn wird als positiv bezeichnet, wenn sich die Polarisationsebene im Sinne des Stromes, der das magnetische Feld erzeugt, dreht.

**** Henri Becquerel, Ann. chim. phys. (5) **12**, 42, 1877. Wir müssen daran erinnern, daß Henri Becquerel im Jahre 1897 (C. R. **125**, 679, 1897) einen theoretischen Ausdruck für die magnetische Drehung gegeben hat; er ist identisch mit dem später aus der Larmorpräzession abgeleiteten und bezieht sich auf die diamagnetische Drehung.

gesetzt gerichtet sein sollte; diese Hypothese wurde dann von verschiedenen Physikern wieder aufgenommen: Der Gedanke war recht naheliegend, aber unsere Untersuchungen schieben in Übereinstimmung mit den modernen Theorien des Magnetismus die Frage auf ein anderes Gleis.

Wir müssen jetzt an eine wichtige Erscheinung erinnern, die 1884 von Kundt* entdeckt wurde: Die ferromagnetischen Metalle besitzen, wenn sie dünn genug sind, um genügend Licht durchzulassen (einige tausendstel Millimeter), ein enormes magnetisches Drehungsvermögen. Die Drehung ist dem äußeren Felde nicht proportional; sie strebt asymptotisch einem Grenzwert zu. Nach du Bois** ist das Drehungsvermögen proportional der Magnetisierung, und zwar positiv.

Hauptsächlich um den Kundtschen Effekt zu erklären, hat Drude die sogenannte „Theorie der Molekularströme" aufgestellt***: Er nimmt in den paramagnetischen Stoffen Elementarströme an, die sich ganz oder teilweise im magnetischen Felde richten. In den diamagnetischen Stoffen sollen solche Ströme von vornherein nicht existieren, sondern durch Induktion unter der Einwirkung des äußeren Feldes entstehen. Diese Theorie liefert im einfachsten Falle ein der Magnetisierung proportionales Drehungsvermögen und führt auf den beiden Seiten einer Absorptionsbande zu Veränderungen des Drehungsvermögens in entgegengesetzten Richtungen, sowohl für die diamagnetischen wie für die paramagnetischen Stoffe.

In seinem „Lehrbuch der Optik" setzt Drude auch eine zweite Theorie auseinander, die er die „Hypothese des Halleffekts" nennt; sie ist nichts anderes als die früher von W. Voigt**** gegebene: Die magnetische Rotationspolarisation wird eine Folge des Zeemaneffekts und der Dispersion; auf den beiden Seiten einer Absorptionsbande müssen die Änderungen des Drehungsvermögens im gleichen Sinne verlaufen, entgegen der Aussage der anderen Theorie.

W. Voigt verzichtet darauf, in der Magnetisierung den Ursprung des Faradayeffekts zu suchen und bekämpft die Theorie der „Molekularströme". Er deutet an, daß unter dem Einfluß des äußeren Feldes innere Kräfte† entstehen könnten, die bei den magnetischen Stoffen im

* A. Kundt, Wied. Ann. **23**, 228, 1884; **27**, 191, 1886.
** H. du Bois, ebenda **31**, 941, 1887.
*** P. Drude, Lehrbuch der Optik S. 406, 1906.
**** W. Voigt, Wied. Ann. **67**, 345, 1899; Ann. d. Phys. **6**, 784, 1901; **8**, 872, 1902.
† Magneto- und Elektrooptik S. 21, 1908.

wesentlichen proportional der Magnetisierung sein könnten und für die dünnen Schichten der ferromagnetischen Metalle den Eindruck erwecken, als ob die Magnetisierung einen direkten Einfluß auf das magnetische Drehungsvermögen hätte. Er kehrt zu dem Gedanken eines dem äußeren Felde entgegengesetzten Feldes zurück. Der trotz der Feldumkehr positive Sinn des Kundteffekts wäre darauf zurückzuführen, daß die Absorption durch „freie Elektronen" hervorgerufen wird.

Seit der Veröffentlichung der Voigtschen Arbeit (1908) hat die Mehrzahl der Physiker die „Hypothese des Halleffekts" angenommen, wenigstens für die nichtleitenden Stoffe. Diese Theorie beruht auf Versuchen von Macaluso und Corbino und verschiedenen anderen Forschern über das magnetische Drehungsvermögen der Dämpfe in der Umgebung von Linien, die einen Zeemaneffekt zeigen. Der eine von uns hat diese Versuche auch auf die festen Stoffe ausgedehnt; er untersuchte das magnetische Drehungsvermögen der Kristalle der seltenen Erden in der Nähe derjenigen Absorptionsbanden, in denen die beiden entgegengesetzt zirkular polarisierten Schwingungen gleich stark absorbiert werden; es wurde sogar eine quantitative Bestätigung der Theorie erbracht*.

Aber im Verlauf dieser Untersuchungen über die Kristalle der seltenen Erden wurde eine wichtige Erscheinung beobachtet. Für zahlreiche Banden werden die entgegengesetzt zirkular polarisierten Schwingungen unter der Wirkung eines Magnetfeldes verschieden stark absorbiert; zwischen den zirkular polarisierten Komponenten existiert eine Intensitätsasymmetrie. Dieser neue Effekt wurde sofort mit dem Paramagnetismus in Zusammenhang gebracht**; die folgenden Zeilen wurden 1906 geschrieben: „Ich denke, daß dies einen tiefen Einblick in den Molekularmagnetismus bedeutet. Denn zerlegen wir die Projektion der Bewegung jedes Elektrons auf eine zur Achse senkrechte Ebene in zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Schwingungen. Wenn wir annehmen, daß die Bahnen der Elektronen oder gewisse Elektronengruppen sich im Felde richten können, und daß die Summe der Zirkularbewegungen in einem Sinne merklich von der Summe der entgegengesetzten Bewegungen verschieden wird, so wird die eine Komponente auf Kosten der anderen stärker werden, und man beobachtet eine Asymmetrie der Intensitäten.

---

* Jean Becquerel, Le Radium **5**, 15, 1908; W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik § 133, S. 232.

** Jean Becquerel, C. R. **143**, 1134, 24. Dezember 1906.

... Andererseits wird die Gesamtheit der Elektronen äquivalent einem längs der Kraftlinien gerichteten Magneten sein. Der Xenotimkristall ist übrigens magnetisch, und ein Würfel richtet sich so, daß die Achse dem Felde parallel wird.

Mittels einer Viertel-Wellenplatte und dahinter geschaltetem Babinetschen Kompensator bemerkt man, daß die zirkulare Doppelbrechung, d. h. die magnetische Rotationspolarisation auf beiden Seiten der Bande verschieden gerichtet ist ... Das Drehungsvermögen ändert sich trotz seiner schwachen Intensität sehr stark in der Nähe der Bande. Diese Tatsachen lassen sich leicht dadurch erklären, daß wegen der beträchtlichen Ungleichheit der beiden Komponenten die anomale Dispersion für die eine zirkulare Schwingung sehr viel größer als für die andere ist.

Man kann sich fragen, ob die Anomalien der magnetischen Stoffe und die Größe der Drehungsdispersion einiger unter ihnen sich nicht aus der gleichen Ursache erklären ließen. Speziell könnte die Deformation einer geradlinigen Schwingung beim Durchgang durch eine dünne Eisenschicht die Folge eines ähnlichen Effekts sein."

So wurden gewisse Asymmetrien der Intensität und die daraus entstehende magnetische Rotationspolarisation seit langem einem paramagnetischen Orientierungseffekt zugeschrieben*. Die Voigtsche Theorie gilt für die diamagnetische Rotation, aber sie erklärt nicht die paramagnetische; oder genauer, sie verlangt für diese eine Ergänzung durch die Einführung des Orientierungseffekts, der eine Ungleichheit in der Absorption der entgegengesetzt gerichteten zirkularen Schwingungen mit sich bringt: Dies ist der Sinn des einen Satzes im obigen Zitat; das hat auch kürzlich R. Ladenburg** gesagt, der, von den gleichen Gedanken ausgehend — ohne die von uns zitierte Arbeit zu kennen —, sie in die Sprache der Mathematik übersetzt hat. Ladenburg ist dabei sehr viel

---

* Unter den neueren Arbeiten über die paramagnetische Drehung seien die folgenden erwähnt: G. J. Elias, Über die Salze seltener Erden, Ann. d. Phys. **35**, 298, 1911; R. W. Roberts, J. H. Smith und S. S. Richardson, Über Eisen- und Kobaltsalze in Lösung, Phil. Mag, **44**, 917, 1922; **49**, 397, 1925; S. Dorfmann, Über die magnetische Rotationsdispersion des flüssigen Sauerstoffs und über die Lösungen von Salzen der seltenen Erden, ZS. f. Phys. **17**, 98, 1923.

** R. Ladenburg, ZS. f. Phys. **34**, 898, 1925; **43**, 168, 1927. Wir gehen an dieser Stelle nicht auf die Ladenburgsche Arbeit ein, weil wir in einer weiteren Arbeit doch auf sie zurückkommen müssen. Wir werden demnächst zeigen, daß unsere Versuche das Ladenburgsche Gesetz für die Rotationsdispersion quantitativ auf ein Promille genau bestätigen. Die Ausdrücke „diamagnetische" und „paramagnetische Drehung" sind von Herrn Ladenburg eingeführt worden.

weiter gegangen, indem er eine mathematische Theorie der paramagnetischen Rotationsdispersion gegeben hat.

Die auf paramagnetischen Ursachen beruhende Asymmetrie der Intensitäten zeigt sich mit um so größerer Klarheit, je tiefer die Temperatur ist*: wir haben beobachtet, daß bei 4,2° abs. und in einem Felde, das nicht sehr stark zu sein braucht (10000 Gauß), gewisse Banden des Xenotims nur noch die eine der beiden zirkularen Schwingungen absorbieren**.

Sieht man von den lokalen Störungen durch die Absorptionsbanden des sichtbaren Spektrums ab, so muß das große Drehungsvermögen der seltene Erden enthaltenden Kristalle und sein Anwachsen mit fallender Temperatur von starken Banden im Ultraviolett herrühren. Bei den älteren Versuchen, die alle bei Zimmertemperatur oder höheren Temperaturen ausgeführt wurden, hatte man immer nur relativ schwache paramagnetische Drehungsvermögen angetroffen; je nachdem überwog der paramagnetische oder der diamagnetische Effekt. Man versteht demnach, daß einige Physiker eine Beziehung zwischen der Richtung des Drehungsvermögens und den magnetischen Eigenschaften überhaupt abgelehnt haben. Wir müssen jedoch darauf hinweisen, daß Henri Becquerel von dem Vorhandensein einer solchen Beziehung überzeugt war, denn er bemerkte, daß eine Substanz mit negativem Drehungsvermögen (z. B. $TiCl_4$) immer ein paramagnetisches Element enthält. Übrigens war es diese Regel, die den einen von uns auf die Verwendung tiefer Temperaturen gebracht hat, um bei den magnetooptischen Erscheinungen die paramagnetischen von den diamagnetischen zu trennen.

Wir wollen immerhin bemerken, daß die paramagnetische Drehung nicht notwendig negativ sein muß***; aber bei den durchsichtigen Substanzen ist es der bisher immer auf der Seite wachsender Wellenlängen von den aktiven Banden aus, deren Einfluß vorwiegt, beobachtete Richtungssinn.

---

* Jean Becquerel, Le Radium **5**, 9, 1908; derselbe und H. Kamerlingh Onnes, Comm. Leiden Nr. 103 (§ 10), 1908; Jean Becquerel, Le Radium **6**, 330, 1909.

** Jean Becquerel, H. Kamerlingh Onnes und W. J. de Haas, Comm. Leiden Nr. 177, 1925.

*** Vgl. hierzu R. Ladenburg, ZS. f. Phys. **34**, 903, Anm., 1925; **46**, 172 und 176, 1928. Nach R. Ladenburg und W. Pauli jr. ist der Drehungssinn mit der Änderung der Sommerfeldschen inneren Quantenzahl j verknüpft; die Drehung ist negativ oder positiv, je nachdem $\Delta j = \pm 1$ oder 0 ist.

2. Experimentelle Anordnung — Kryostat. Wir beabsichtigen nicht, die spektroskopische Anordnung zu beschreiben, da es genau dieselbe war, die seit 1906 zuerst im Laboratorium für Physik des Museums und dann in Leiden 1908 und seit 1924 benutzt wird. Wir wollen nur angeben, daß wir ein ebenes Rowlandsches Gitter mit 568 Strichen pro Millimeter von 8 cm Breite benutzten, mit Autokollimation mittels einer Linse von 1,30 m Brennweite. Beobachtet oder photographiert wurden die Spektren erster oder zweiter Ordnung. Als Lichtquelle diente eine Bogenlampe.

Der Kryostat besteht aus drei Vakuumglasgefäßen. In dem innersten Gefäß siedet das flüssige Helium, im zweiten flüssiger Wasserstoff und im dritten, das die beiden anderen Gefäße umschließt, flüssiger Stickstoff. Die Gefäße sind mit großer Kunstfertigkeit geblasen. Das innere Rohr des Heliumgefäßes hat eine lichte Weite von 5 mm, das äußere Rohr des Stickstoffgefäßes einen Durchmesser von 15 mm. Der Lichtstrahl passiert 12 Glaswände und 5 Flüssigkeitsschichten. Der Druck des siedenden Heliums wird genau auf konstanter Höhe gehalten und mittels eines Kathetometers an einem Quecksilbermanometer abgelesen. Die Regulierung des Dampfdrucks geschieht mittels eines Regulierhahnes, der im Kreise der verdampfenden Flüssigkeit liegt.

Durch die Kappe des Kryostaten ist luftdicht eine Kupferstange geführt, die sich drehen und auf und ab bewegen läßt. Diese Stange trägt am unteren Ende einen Glasstab, und dieser wieder den Kristallhalter. Mit dieser Vorrichtung ist es möglich, einen beliebigen Kristall in das Lichtbündel zu bringen und mittels einer Skale nach Willkür zu orientieren.

3. Ziel der Versuche. — Meßmethode. Das Ziel der Versuche war, für einige Wellenlängen und einige sehr tiefe Temperaturen die Veränderung des magnetischen Drehungsvermögens in Abhängigkeit von der Feldstärke zu bestimmen. Unter den (einachsigen) Kristallen gibt es einen, der sich besonders gut für diese Untersuchungen eignet: der Tysonit [(La, Ce, Nd + Pr) F_3]. Für seine Wahl sprechen die folgenden Gründe:

1. Unter den bisher untersuchten Kristallen besitzt der Tysonit das größte magnetische Drehungsvermögen.

2. Dieser Kristall ist schön durchsichtig und kann in dickeren Platten benutzt werden als die übrigen. Mit dem uns zur Verfügung stehenden 1,866 mm dicken Plättchen behält das Spektrum trotz der 12 Glaswände des Kryostaten eine gute Helligkeit.

3. Die fast alle zu Gruppen vereinigten und zum größten Teile — mit Ausnahme der Bande $\lambda = 5776$ — wenig aktiven Absorptionsbanden des sichtbaren Spektrums sind durch breite Zwischenräume getrennt, in denen ihr Einfluß vernachlässigt werden kann: Wählt man die Wellenlängen in diesen Gebieten, so beobachtet man ausschließlich ohne jede lokale Störung das Hauptphänomen.

Da die unter 1. wiedergegebenen früheren Untersuchungen gezeigt hatten, daß das Drehungsvermögen paramagnetischen Ursprungs sein muß, so konnte man bei genügend tiefen Temperaturen eine Abweichung von der Proportionalität zum Felde erwarten, also von dem Gesetz, das seit der Entdeckung von Faraday immer gefunden worden ist.

Es war sogar vorauszusehen, daß die Drehung eine Funktion von H/T sein mußte. Es wäre überflüssig, auf die Bedeutung hinzuweisen, die vom Standpunkt der Theorie des Magnetismus die Bestimmung dieser Funktion hat.

Natürlich verwendet man für diese Untersuchungen am besten eine recht genaue Methode, aber vor allem ist es unbedingt notwendig, ein sehr rasches Verfahren zu wählen, selbst wenn die Genauigkeit darunter etwas leiden sollte. Da übrigens das magnetische Drehungsvermögen des Tysonits bei sehr tiefen Temperaturen ungeheuer ist, wäre eine Bestimmung auf 1^0 genau für Rotationen zwischen 1500 und 5000^0 nicht nur unnötig, sondern auch illusorisch, weil die Feldstärke sich nicht so genau bestimmen läßt. Man muß schnell arbeiten; denn damit die relativen Messungen bei ein und derselben Temperatur gut vergleichbar ausfallen, müssen sie alle unter möglichst konstanten Bedingungen im Laufe einer Versuchsreihe gemacht werden. Wir haben als einfachste Methode die des kannelierten Spektrums gewählt.

Das von der Bogenlampe ausgesandte Licht wird längs der Achse des Elektromagneten geschickt; die Pole haben Durchbohrungen von 1 mm Durchmesser, durch die ein genügend paralleles Lichtbündel hindurchtritt. Das Kristallplättchen, das als völlig normal zur Achse geschnitten angesehen werden kann, wird mit der größten Sorgfalt vermittelst eines Babinetschen Kompensators* so einjustiert, daß seine Achse dem einfallenden Bündel parallel ist. Nachdem man Kompensator und Analysator, die zur Justierung benutzt wurden, entfernt hat,

* Das Verfahren ist in der Arbeit (ZS. f. Phys. **32**, 342, § 2, 1928) beschrieben worden. Daß das Plättchen genau senkrecht zur Achse geschnitten ist, ergibt sich aus einer statistischen Beurteilung der Messungen der Phasendifferenzen zwischen den hindurchgehenden Schwingungen bei schrägem Einfall.

polarisiert man das einfallende Licht so, daß der elektrische Vektor senkrecht steht, und setzt dann vor den Spalt des Spektroskops ein Kalkspatrhomboeder, das einen doppelbrechenden Analysator bildet: man erhält so zwei aneinanderstoßende Spektren, wobei ohne Feld das den horizontalen Schwingungen entsprechende Spektrum verschwindet*.

Das Licht eines seitlich aufgestellten Eisenbogens läßt sich mittels eines Spiegels ohne Belag nach Belieben auf den Spalt des Spektroskops werfen, um bei Bedarf das Eisenspektrum dem Kristallspektrum zu überlagern, wenn man die Wellenlängen festlegen will.

Sowie der geringste Strom durch die Spulen des Elektromagneten fließt, tritt magnetische Drehung auf, und man sieht in den beiden übereinanderliegenden Spektren zahlreiche schwarze Streifen sich von Violett nach Rot verschieben. Man wählt im Eisenspektrum oder im Absorptionsspektrum des Kristalls selbst** die Strahlung, für die man die Messungen ausführen will, und verfolgt die Durchgänge der Streifen durch die betrachtete Linie. Man liest so die Drehungen $n\pi$ im Spektrum der horizontalen Schwingungen und $\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ im Spektrum der vertikalen Schwingungen ab.

Bei jedem Durchgang liest man die Stromstärke ab, die das Feld gibt, nachdem zuvor der Verlauf von H als Funktion der Stromstärke untersucht worden war.

Zur Bestimmung des Feldes in Abhängigkeit von der Stromstärke haben wir Abstandsmessungen auf der photographischen Platte der Komponenten der Linie 5221 des Xenotims (bei der Temperatur der flüssigen Luft) benutzt; diese Linie ist schmal und sehr empfindlich, denn sie liefert das 8,5 fache der normalen Zeemanaufspaltung***. Die Einzelbeobachtungen können einen Fehler von der Größenordnung $5\,^0/_{00}$ in einem

---

* Bei sehr tiefen Temperaturen tritt niemals völlige Auslöschung ein, da der remanente Magnetismus der Polschuhe genügt, um eine Drehung um mehrere Grade hervorzurufen.

** In diesem Falle wählt man eine feine, isolierte Linie, die inaktiv ist oder so wenig aktiv, daß sie keine merkliche Störung verursacht. Es ist zu bemerken, daß in dem einen Spektrum die schwarze Kannelierung die Kristallinie völlig verdeckt; sie bleibt aber in dem darüberliegenden Spektrum sichtbar (das dann seine größte Intensität hat), wodurch die Beobachtung möglich ist.

*** Es zeigte sich, daß die Aufspaltung dem Felde proportional ist. Für die absoluten Messungen wurde die Eichung im Jahre 1909 in Zürich ausgeführt; die Aufspaltung wurde von einem von uns auf der Platte bestimmt, in einem Felde, dessen Intensität von Pierre Weiss gemessen worden war (7,71 Å für 34 900 Gauß).

Felde von 30 000 Gauß haben, und einen um so größeren, je schwächer das Feld wird; aber die Fehler werden zum großen Teile durch das Ziehen der Kurve ausgeglichen.

Diese Methode schien uns den übrigen vorzuziehen zu sein, weil sie das Feld zwischen den Öffnungen der Polschuhe angibt, genau an der Stelle, wo man es kennen muß.

Das größte angelegte Feld (entsprechend 150 Amp.) wurde bei einem Polabstand von 16 mm zu 26,73 Kilogauß bestimmt.

Die Versuche wurden bei den folgenden Temperaturen für die folgenden Wellenlängen ausgeführt:

$T = 4{,}21^0$	$\lambda = 4258{,}9$ (Linie des Tysonits) $\lambda = 5328{,}5$ (Mitte eines Eisendubletts) $\lambda = 6249{,}5$ (Linie des Tysonits)	Plättchen von 1,866 mm
$T = 1{,}71_4^0$	$\lambda = 4258{,}9$ $\lambda = 5328{,}5$	mit zwei Plättchen $e_1 = 1{,}866$ mm, $e_2 = 0{,}675$ mm
$T = 1{,}41_2$ und $1{,}39_4^0$	$\lambda = 5328{,}5$	Plättchen von 1,866 mm

Die hier angegebenen Temperaturen unterhalb 2° weichen ein wenig von den allgemein durch Extrapolation der Dampfdruckformel angenommenen ab; den Grund hierfür werden wir später sehen.

Die gemessenen Drehungen (im negativen Sinne) wurden um die Drehung durch den Kryostaten selbst (im positiven Sinne) korrigiert, die nicht vernachlässigt werden darf (5,0° für 5890 Å; 12,5° für 4000 Å).

4. Annäherung an die Sättigung. — Gesetz der paramagnetischen Drehung als Funktion von H/T. — Das Magneton. Zunächst haben wir die Kurven der Drehungen gegen die Feldstärken aufgetragen.

Bei 4,21° wird es deutlich, daß die Drehung nicht mehr dem Felde proportional ist*. Bei den Temperaturen 1,7 und 1,4° verstärkt sich die Abweichung von der Proportionalität beträchtlich.

Beschäftigen wir uns zunächst mit den Ergebnissen der Messungen bei 1,7°, die für zwei Wellenlängen und mit zwei Plättchen verschiedener Dicke ausgeführt wurden. Nachdem die Kurven $\varrho = f(H)$ so gezogen worden waren, daß sie die Messungsergebnisse so treu wie möglich und ohne vorgefaßte Meinung (d. h. ohne Benutzung eines theoretischen

* Diese Abweichung von der Proportionalität, die bei 4,2° nicht groß ist, war uns bei den ersten Versuchen entgangen (Comm. Leiden Nr. 177), weil wir uns auf drei Bestimmungen beschränkt hatten und die einzeln gemessenen drei Werte für das Feld nicht mit derselben Genauigkeit bekannt waren wie die aus zahlreichen Messungen ermittelten, für die der Verlauf des Feldes als Funktion der Stromstärke als Kurve gezeichnet werden kann.

Gesetzes) wiedergaben, haben wir festgestellt, daß alle Kurven einander proportionale Ordinaten haben, und daß die mit den beiden Plättchen für die gleiche Wellenlänge gefundenen Drehungen der Dicke dieser Plättchen proportional sind.

a und *b* z. B. seien die experimentellen Kurven für die Wellenlängen 5328,5 und 4258,9 mit dem 1,866 mm dicken Plättchen: wir nehmen alle Messungen für die violette Strahlung und bilden ihre Verhältnisse zu den Koordinaten der Kurve *a*, die denselben Feldern entsprechen; dann nehmen wir für alle die den mit der grünen Strahlung gemachten Messungen entsprechenden Felder das Verhältnis der Punkte der Kurve *b* und der für die grüne Strahlung gemessenen Werte; das allgemeine Mittel aller Quotienten gibt mit sehr guter Genauigkeit das Verhältnis der Drehungen für Violett und Grün, ein Verhältnis, das vom Felde unabhängig ist (von 32 gemessenen Werten weichen 16 um weniger als $2\,^0/_{00}$ vom allgemeinen Mittel ab, und die beiden größten Abweichungen betragen nur $+\,7\,^0/_{00}$ und $-\,5\,^0/_{00}$).

Für die beiden benutzten Plättchen fand sich der Quotient der Drehungen für gleiche Wellenlänge auf ein Promille genau gleich dem Verhältnis ihrer mit dem Komparator gemessenen Dicken.

So schält sich als erstes Ergebnis der Messungen heraus, daß die Abhängigkeit des magnetischen Drehungsvermögens vom Felde unabhängig von der Wellenlänge ist.

Nun handelt es sich darum, die Form dieser Abhängigkeit zu finden. Zu diesem Zwecke haben wir, nachdem wir, wie gesagt, die Quotienten der Drehungen für die beiden Plättchen und für die beiden benutzten Strahlungen bestimmt haben, alle Messungen auf eine einzige Kurve *C* reduziert, die, da sie alle bei der betrachteten Temperatur (1,7°) gemachten Messungen umfaßt, sehr sicher gezogen werden konnte.

Die einzigen bisher vorliegenden Messungen, die eine Annäherung an die Sättigung zeigen, waren die von Woltjer und Kamerlingh Onnes* am Gadoliniumsulfat. Da diese Forscher aus ihren Untersuchungen geschlossen hatten, daß das Magnetisierungsgesetz das Langevinsche ist, haben wir zunächst versucht, die Kurve *C* mit einer Langevinschen zur Deckung zu bringen. Es haben sich aber systematische Abweichungen gezeigt, die ohne groß zu sein, doch die mögliche Fehlergrenze überschreiten. Außerdem ist es verständlich, daß das Gesetz von dem Langevinschen verschieden ist, weil die Bedingungen ganz andere sind

* H. R. Woltjer und H. Kamerlingh Onnes, Comm. Leiden Nr. 167, 1923.

als die, für die die Langevinsche Theorie aufgestellt wurde. Es ist auch zu bemerken, daß sich die Versuche von Woltjer und Kamerlingh Onnes auf ein Kristallpulver beziehen und nicht auf einen gerichteten Kristall.

Für die Magnetisierung längs einer Hauptrichtung eines Kristalls fand Lenz* und dann in einer vollständigeren Theorie Ehrenfest** als Forderung der Theorie einen hyperbolischen Tangens. Wir haben einen solchen versucht, und diesmal mit vollem Erfolg. Die Kurve C wird so gut wie nur irgend möglich durch die Formel

$$\varphi = A \operatorname{Tg} C H$$

dargestellt; der Wert für C, der die Kurve, so wie sie nach den Messungen gezeichnet wurde, am getreuesten wiedergibt, ist

$$C = 3{,}923 \,.\, 10^{-5}.$$

Die Abweichungen der mit diesem Werte berechneten Kurve von der Kurve C finden sich von der Größenordnung eines Bleistiftstriches auf einer Zeichnung von 80×80 cm.

Es ist klar, daß die erste Ursache der magnetischen Drehung ein Magnetisierungseffekt ist, und man sieht, daß sie einem einfachen Gesetz folgt***. Die Tangente im Nullpunkt fällt über eine ziemlich lange Strecke mit der Kurve zusammen, hier gilt also das Curiesche Gesetz. Nennenswerte molekulare Felder braucht man hier nicht anzunehmen, ebensowenig ein entmagnetisierendes Feld, da die Drehung der Plättchendicke proportional ist.

Nimmt man an, daß die Drehung dem sie hervorrufenden Magnetisierungseffekt proportional ist (was nicht bewiesen ist****, jedoch nicht zweifelhaft erscheint), so ist der Gedanke begründet, daß CH die Langevinsche Variable a ist, wie in den Theorien von Lenz und Ehrenfest. Dann hat man also

$$C = \frac{\Sigma_\infty}{RT},$$

---

* W. Lenz, Phys. ZS. **21**, 613, 1920.

** P. Ehrenfest, Akad. Amsterdam, 18. Dez. 1920; Comm. Leiden, Suppl. Nr. 44b.

*** Im ersten Augenblick überrascht es, mit einem Kristall, der drei paramagnetische Ionen enthält, ein so einfaches Gesetz zu finden; aber wir werden in einer späteren Bemerkung zeigen, daß die paramagnetische Drehung nur von einem dieser drei Ionen stammt.

**** Die Proportionalität ist auf alle Fälle für höhere Temperaturen erwiesen, da dann sowohl die Drehung als auch die Magnetisierung dem Felde proportional ist.

wo R die Gaskonstante bedeutet und Σ_∞ den Sättigungswert der Magnetisierung pro Grammolekül, bezogen auf den Träger des magnetischen Moments, das die Erscheinung bestimmt. Ist die Temperatur bekannt, so hat man also auch Σ_∞.

Für diese Untersuchungen wurde der Druck bis auf 9 mm vermindert. Bisher sind die Temperaturen des flüssigen Heliums in Abhängigkeit vom Dampfdruck nicht sehr genau bekannt. Teilweise sind sie aus direkten Bestimmungen abgeleitet, und zwar drei Gasthermometerbestimmungen, teils aus einer Dampfdruckformel von Verschaffelt. An der Aufstellung der Temperaturskale wird zurzeit gearbeitet; jedenfalls liegt die Temperatur bei 9 mm Druck zwischen 1,66 und 1,76° abs.

$$\text{Mit } 1{,}66^0 \text{ findet man } \Sigma_\infty = 0{,}968\,\mu_{\text{Bohr}},$$
$$\text{„ } 1{,}76^0 \text{ „ „ } \Sigma_\infty = 1{,}026\,\mu_{\text{Bohr}}$$

Möglicherweise ist es Zufall, daß der Wert des Bohrschen Magnetons zwischen den beiden Σ_∞-Werten liegt, die den Temperaturschätzungen entsprechen; wahrscheinlicher kann man annehmen, daß Σ_∞ genau gleich dem Magneton ist. Wir wollen nicht vergessen, daß man für diesen gerichteten Kristall die Richtungsquantelung bezüglich der gemeinsamen Achsen- und Feldrichtung ins Auge fassen muß. Halten wir die Beziehung $\Sigma_\infty = \mu_{\text{Bohr}}$ für richtig, so wird durch unsere Versuche die Temperatur bestimmt, und zwar zu 1,714°, mit dem Fehler, den die Bestimmung des Feldes in absoluten Einheiten und der Wert des Magnetons mit sich bringt. Wenn man bei 4,21° ebenso vorgehen könnte, wie wir es hier gemacht haben, d. h. wenn es möglich wäre, die gefundenen Kurven für die Drehung bei der wohlbekannten Temperatur des unter normalem Druck siedenden Heliums mit einem hyperbolischen Tangens zu identifizieren, so gäbe es keinen Zweifel über den Wert von Σ_∞; unglücklicherweise ist das magnetische Moment zu klein und die Krümmung bei 4,21° zu schwach, um die Identifikation der Kurve mit genügender Genauigkeit durchführen zu können.

Immerhin weisen die experimentellen Kurven — wenn man sie nicht in Abhängigkeit von H, sondern von $\frac{H}{T}$ aufträgt — der Messungen bei 4,21° und der oben beschriebenen Messungen, wenn man für diese die Temperatur 1,714° ansetzt, eine bemerkenswerte Proportionalität der Ordinaten auf: Der oben betrachtete hyperbolische Tangens stellt also nicht nur die bei unter dem Druck von 9 mm siedenden Heliums gemachten Messungen, sondern bis auf einen Faktor auch die Versuchsergebnisse bei 4,21° für die drei benutzten Wellenlängen dar. Setzt man jedoch

als Temperatur des unter vermindertem Druck siedenden Heliums 1,66 oder 1,76°, so ändert sich die Proportionalität zwischen den Ordinaten der Kurven nicht wesentlich, weil die Werte für $\frac{H}{4{,}21}$ zu klein bleiben,

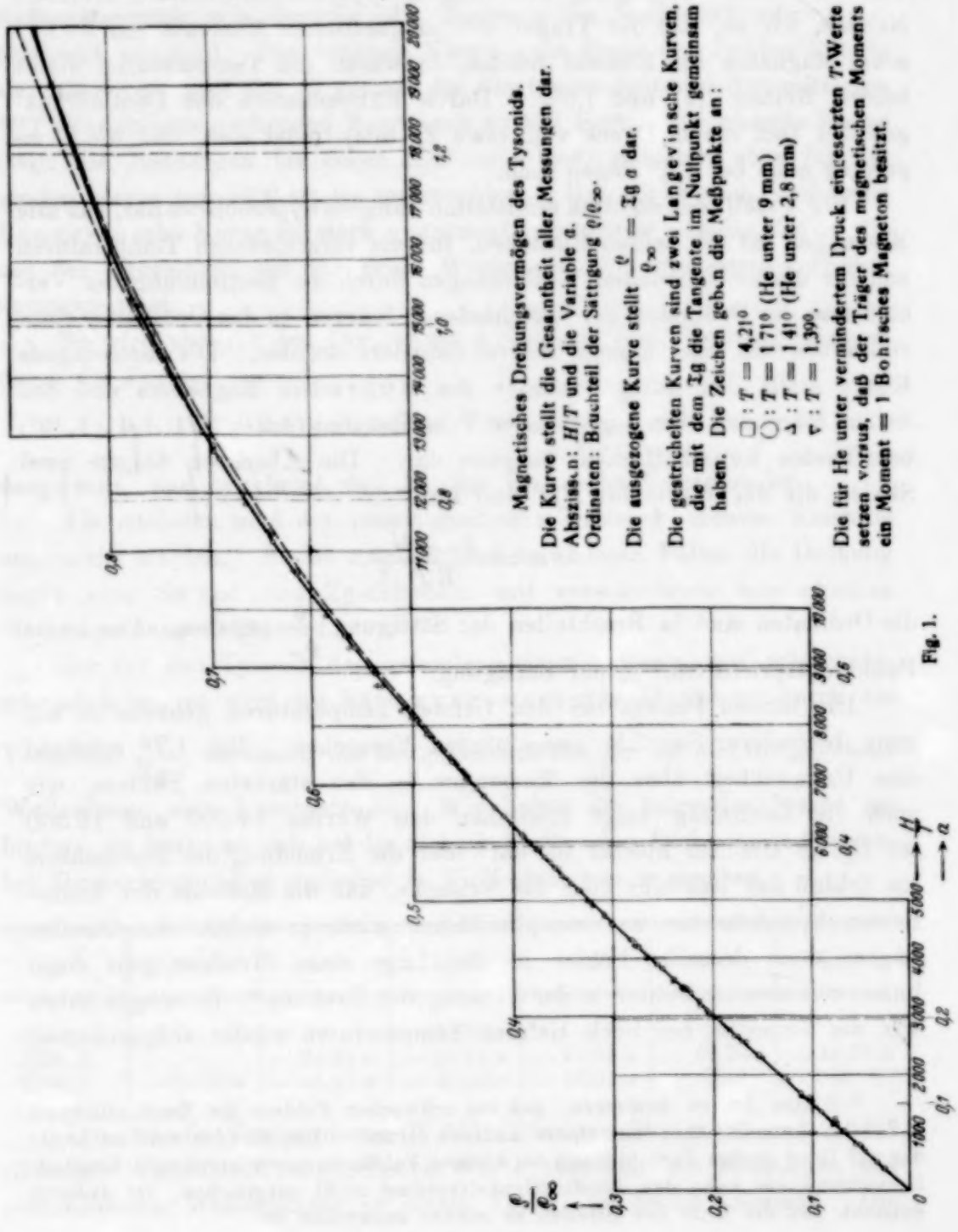


Fig. 1.

als daß der hyperbolische Tangens sehr von seiner Tangente im Nullpunkt abwiche.

Schließlich haben zwei Meßreihen, bei denen der Druck mittels zweier parallel geschalteter Siemensscher Pumpen vermindert wurde, wiederum eine Bestätigung des Tangens-hyperbolicus-Gesetzes erbracht. Nehmen wir an, daß der Träger des magnetischen Moments ein Bohrsches Magneton als Moment besitzt, so waren die Temperaturen dieser beiden Reihen 1,41 und 1,39°. Durch Extrapolation des Dampfdruckgesetzes (bei einem Druck von etwa 2,8 mm) findet man, daß die Temperatur nahe bei 1,4° liegen muß.

Fig. 1 stellt den dadurch ermittelten Tangens hyperbolicus dar, daß alle Messungen für die beiden Plättchen, für die verschiedenen Temperaturen und für die verschiedenen Wellenlängen durch die Bestimmung der Verhältnisse der Ordinaten der verschiedenen Kurven zu den Ordinaten einer von ihnen auf eine einzige Kurve reduziert wurden. Die ausgezogene Kurve stellt den unter Annahme des Bohrschen Magnetons und den daraus folgenden oben angegebenen Temperaturen (4,21; 1,71; 1,41; 1,39°) berechneten hyperbolischen Tangens dar. Die Abszissen tragen zwei Skalen, die der Werte für H/T und für

$$a = \frac{\mu_{\text{Bohr}} H}{R T};$$

die Ordinaten sind in Bruchteilen der Sättigung $\frac{\varrho}{\varrho_\infty}$ gegeben. Der letzte Punkt entspricht 85,7 % der Sättigung.

Die letzten Punkte bei den tiefsten Temperaturen gehören zu mit ganz besonderer Sorgfalt ausgeführten Versuchen. Bei 1,7° entstand eine Ungewißheit über die Messungen in den stärksten Feldern, wie auch die Zeichnung zeigt (zwischen den Werten 14300 und 15300 für H/T); Ursache hierfür ist entweder die Ermüdung des Beobachters am Schluß der Meßreihe oder die Tatsache, daß die Methode der kannelierten Spektren um so unempfindlicher wird, je dichter die Streifen liegen; denn derselbe Fehler in der Lage eines Streifens gibt einen immer wachsenden Fehler in der Messung der Drehung*. Deswegen haben wir die Versuche bei noch tieferen Temperaturen wieder aufgenommen.

* Hierzu ist zu bemerken, daß bei schwachen Feldern die Empfindlichkeit ebenfalls abnimmt, aber aus einem anderen Grunde: Die Streifen sind zu breit; der auf ihrer großen Verschiebung bei kleinen Feldänderungen beruhende Empfindlichkeitszuwachs kann den Empfindlichkeitsverlust nicht ausgleichen, der dadurch entsteht, daß die Mitte der Streifen so schwer anzugeben ist.

um in Gebiete stärkerer Krümmung zu gelangen; und unser Hauptaugenmerk war auf die Bestimmung der letzten Punkte (Mittel mehrerer Beobachtungen) gerichtet: diese letzten Punkte können als sehr sicher angesehen werden.

Die beiden gestrichelten sind Langevinsche Kurven mit derselben Anfangstangente wie der $\mathfrak{Tg}$ (die Tangente im Nullpunkt scheint gut bestimmt zu sein). Die unterste Kurve geht durch den letzten Punkt: sie paßt nicht, weil sie im ganzen für die Gesamtheit der den mittleren H/T-Werten entsprechenden Messungen zu tief liegt. Die oberste Kurve stellt die Messungen bis gegen $H/T = 10000$ gut dar, aber für die großen Werte von H/T ist sie unbrauchbar. Man sieht auch, daß keine Langevinsche Kurve so stark gekrümmt sein würde wie die Kurve, die aus der Gesamtheit der für große Werte von H/T gemessenen Punkte konstruiert ist.

So wird also für den Tysonit die paramagnetische Drehung sehr gut durch die Formel

$$\varrho = (\varrho_\infty)_{\lambda,\, T}\, \mathfrak{Tg}\, a; \quad a = \frac{\Sigma_\infty H}{RT}$$

dargestellt, und es scheint, daß Σ_∞ das Bohrsche Magneton ist.

Als nächstes muß die paramagnetische Drehung anderer Kristalle untersucht werden. Es ist möglich, daß in anderen Fällen die Drehung durch eine Summe von $\mathfrak{Tg}$-Gliedern mit verschiedenen magnetischen Momenten dargestellt wird.

Ist für den Tysonit das gefundene Gesetz genau, was sehr wahrscheinlich ist, so wird der Sättigungswert der Drehung durch das Verhältnis $\frac{\varrho}{\mathfrak{Tg}\, a}$ bestimmt, das bei gegebener Temperatur und für gegebene Wellenlänge eine Konstante ist. Wir haben die folgenden Werte gefunden; sie beziehen sich auf die dickere Platte (eine Dicke von 1,866 mm bei Zimmertemperatur) und sind in Vielfachen von π gegeben.

λ \ T	77,55° abs.	20,41°	4,21°	1,71°	1,41°	1,39°
6249 Å	—	—	$-14{,}66\pi$	—	—	—
5328,5	—	$-24{,}61\pi$	$-21{,}81\pi$	$-19{,}61\pi$	$-18{,}74\pi$	$-18{,}73\pi$
4258,9	$-51{,}60\pi$	$-45{,}21\pi$	$-40{,}02\pi$	$-36{,}01\pi$	—	—

Die für die Temperaturen 77,55° (flüssiger Stickstoff) und 20,41° (flüssiger Wasserstoff) angegebenen Werte stammen aus Messungen mit verschiedenen Wellenlängen in einem Felde von 26,73 Kilogauß. Die

Drehungen für 5328,5 und 4258,9 Å wurden von der gezogenen Kurve abgelesen und dann durch $\mathfrak{Tg}\, a$ dividiert.

Für konstante Wellenlänge sinkt der Sättigungswert ϱ_∞ der Drehung mit abnehmender Temperatur, und daher wird für einen beliebig vorgegebenen Wert von H/T die Drehung ϱ mit abnehmender Temperatur kleiner, aber für einen gegebenen H-Wert steigt sie bis 1,39°.

Die Abnahme von ϱ_∞ mit sinkender Temperatur erklärt sich leicht: die paramagnetische Drehung hat die Richtung der Träger des magnetischen Moments zur Ursache; aber diese paramagnetische Erscheinung zeigt sich optisch vermittelst der Lichtabsorption: es müssen, damit sich überhaupt ein Drehungsvermögen zeigt, eine oder mehrere aktive Banden vorhanden sein, d. h. Banden, die die entgegengesetzt gerichteten zirkularen Schwingungen verschieden stark absorbieren. Die Veränderlichkeit von ϱ_∞ zeigt an, daß die aktiven Banden nicht temperaturunabhängig sind — wie sich übrigens für alle Banden des sichtbaren Spektrums ergibt —; diese Banden können eine Verschiebung im Spektrum erleiden, die aber nicht groß und nur von schwachem Einfluß sein kann. In der Hauptsache muß ihre Intensität wechseln, und die Abnahme von ϱ_∞ ist der Beweis für schwächer werdende Absorption. Übrigens ist eine Extrapolation unmöglich, und es läßt sich nicht voraussehen, ob die Intensität der Banden einer endlichen Grenze zustrebt oder ins Unendliche abnimmt oder durch ein Minimum geht, wenn die Temperatur gegen Null geht.

Die Veränderlichkeit von ϱ_∞ erklärt, warum die Drehung in schwachen Feldern oder bei weniger tiefen Temperaturen nicht genau dem Curieschen Gesetz folgt. Wir hatten zuerst die Kurven $1/\varrho$ als Funktion von T für konstantes H aufgetragen, und man konnte glauben, daß die Abweichung von der Geradlinigkeit, die bei sehr tiefen Temperaturen stärker wird, einer kryomagnetischen Anomalie zuzuschreiben wäre. Die Erklärung ist aber eine ganz andere: die Abweichung von der Geradlinigkeit stammt erstens von der Annäherung an die Sättigung und zweitens von der Abnahme der Absorption. Solange H/T nicht zu groß ist, ist das Curiesche Gesetz für die Magnetisierung erfüllt, die die erste Ursache des optischen Effekts ist (der $\mathfrak{Tg}$ kann durch seine Tangente im Nullpunkt ersetzt werden); aber das paramagnetische Drehungsvermögen wird durch die hinzukommende Absorption ein viel komplizierterer Effekt.

Fräulein Rietveld sagen wir unseren besten Dank für ihre Hilfe bei den Ablesungen und Versuchen.

Über die Anfangsleitfähigkeit von Gips und Steinsalz.

Von **N. A. Salessky** in Kasan.

Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 17. Oktober 1928.)

Es wurde die Leitfähigkeit von Gips und Steinsalz in Intervallen von 0,01 bis 0,06 sec nach Anlegen der Spannung untersucht und die Unmöglichkeit der Extrapolation nach dem Koordinatenanfang gezeigt. Das Ohmsche Gesetz war bei beiden Substanzen für richtig befunden. Auch wurde die Richtigkeit des Superpositionsprinzips im Gebiet der Anfangsströme und das Fehlen einer Beeinflussung der Leitfähigkeit durch vorherigen Stromdurchgang bestätigt. Die Temperaturabhängigkeit von Gips ist wahrscheinlich durch die übliche Exponentialfunktion darstellbar, die des Steinsalzes aber hängt von den Zeitwerten ab, bei denen die Messungen ausgeführt wurden.

§ 1. Die Untersuchung der Anfangsströme in Dielektrika zeigte einige Eigentümlichkeiten der Anfangsleitung der letzteren. So z. B. wurden in Glas* und Quarz** keine Anzeichen eines Zustrebens des Anfangsstromes zu einem Grenzwert gefunden, der die wahre Leitfähigkeit des Kristalls charakterisieren würde. Außerdem werden im Gebiet der Anfangsströme in Quarz eine Reihe von Erscheinungen beobachtet, welche bei Untersuchung der Restströme unbemerkt bleiben**. Diese Tatsachen veranlaßten uns, die Anfangsleitfähigkeit auch anderer Substanzen zu untersuchen. Als Untersuchungsobjekte wurden von uns Gips und Steinsalz gewählt, und zwar aus folgenden Gründen: Außer einem großen Unterschied im kristallographischen Bau stellt eine dieser Substanzen (NaCl) ein gut erforschtes Objekt dar, während bezüglich der anderen mehr oder weniger sichere und übereinstimmende Beobachtungen nicht vorhanden sind. Falls die Annahme richtig ist, daß unter üblichen Beobachtungsbedingungen der den Kristall passierende Strom von einer Gegenspannung begleitet wird, die dem Wert nach der äußeren angelegten Spannung fast gleich ist, so erscheint es naheliegend, daß die von früheren Forschern beobachteten Anomalien von Gips im Gebiet der Anfangsströme, wo die Gegenspannung natürlich geringer ist, nicht in Erscheinung zu treten brauchen. Diese Erwägungen erwiesen sich als vollkommen richtig.

Wir wollen hier kurz auf die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung hinweisen: die Anfangsströme in Gips und Steinsalz sind denselben Gesetzmäßigkeiten untergeordnet, die für die Restströme in der Mehrzahl der Dielektrika für richtig befunden waren, mit Ausnahme

---

* F. Tank, Ann. d. Phys. **48**, 307, 1915.

** A. D. Goldhammer, ZS. f. Phys. **47**, 671, 1928.

natürlich des Fehlens eines Zustrebens des Anfangsstromes zu einem Grenzwert bei Verminderung der Zeitspanne zwischen dem Anbringen der Spannung an den Kristall und der Messung. Diesbezügliche Versuchsergebnisse lassen vermuten, daß es sich hier um eine Erscheinung handelt, die allen dielektrischen Erscheinungen eigen ist*.

Die Temperaturabhängigkeit der Steinsalzleitfähigkeit ist ein Faktum für sich. Die Frage, ob diese Erscheinung vom Charakter der Zeitabhängigkeit des Stromes* abhängt oder im Mechanismus selbst der Leitfähigkeit begründet ist, wollen wir offen lassen.

§ 2. Versuchsanordnung. Die Versuchsanordnung, in welcher die Messungen ausgeführt wurden, entspricht im allgemeinen der von A. D. Goldhammer** bei Untersuchung der Quarzleitfähigkeit angewendeten und von ihm schon eingehend beschriebenen; deshalb wollen wir hier nur auf einige Einzelheiten hinweisen. Die Messungen wurden mit einem Wulfschen Saitenelektrometer ausgeführt, dessen Empfindlichkeit durch Ändern der Spannung des Fadens von 120 bis 5 Skalenteile auf 1 Volt geändert werden konnte. Die Potentialdifferenz auf den Schneiden betrug am Anfang 240 Volt, nachher 400 Volt. Die Kapazität des Systems der Leitungsdrähte zusammen mit dem Saitenelektrometer, Kristall u. a. war gleich 110 cm. Als Stromquelle bedienten wir uns einer Akkumulatorenbatterie bis 700 Volt. Das Anlegen der Spannung an den Kristall und die An- und Abschaltung des Kristalls vom Elektrometer wurde mit Hilfe spezieller Kommutatoren ausgeführt, deren Beschreibung, wie auch die Messungsmethoden der Zeitintervalle in der Arbeit von A. D. Goldhammer** zu finden sind.

Der Hauptteil der Untersuchungen wurde mit sieben Gipsplatten ausgeführt, von denen fünf (Nr. 1, 2, 5, 6, 7) lokaler Herkunft (Tatarenrepublik)*** waren, und zwei (Nr. 8 b und 9) aus Schwefelgruben auf Sizilien**** stammten. Alle sieben Gipsplatten waren in der Spaltrichtung geschnitten. Zwei Steinsalzkristalle, parallel der Würfelfläche geschnitten, waren gleichfalls von der Firma B. Halle erhalten. Alle Kristalle hatten polierte Oberflächen und waren vollkommen durchsichtig.

Als Elektroden dienten mit Syndetikon angeleimte Stanniolblätter. Die Methode erwies sich für die Anfertigung der Elektroden als die bequemste.

---

* A. D. Goldhammer, ZS. f. Phys. **52**, 708, 1928.

** Derselbe, ebenda **47**, 671, 1928.

*** Vom Mineralog. Kabinett d. Kasanschen Univ. liebenswürdigerweise zur Verfügung gestellt.

**** Durch die Firma B. Halle Nachfl. erhalten.

Dimensionen der Kristalle.

Tabelle 1. Gips.

	1	2	5	6	7	8b	9
Dicke in mm	0,21	0,61	0,19	0,90	0,64	0,47	0,50
Fläche der Sammelelektrode in cm^2	0,90	2,65	0,80	2,72	2,88	2,50	3,00

Tabelle 2. Steinsalz.

	1	2
Dicke in mm	0,90	0,90
Fläche der Sammelelektrode in cm^2	2,40	2,00

Die Untersuchung der Zeitabhängigkeit des Stromes für Gips, wie auch die Mehrzahl der anderen Versuche mit Gips, wurde bei einer Temperatur von 65° C ausgeführt. Diese Temperatur war als die minimalste gewählt, bei welcher für die erforderliche Genauigkeit genügende Ausschläge des Elektrometers erhalten wurden. Aus demselben Grunde wurde für die Versuche mit Steinsalz die Temperatur — 80° C gewählt.

Da der Kommutator*, der die An- und Abschaltung des Kristalls besorgte, nur gut übereinstimmende Mittelwerte ergab, stellt jede weiter angeführte Beobachtung das Mittel von zehn Messungen dar.

Was die Reproduzierbarkeit der Resultate anbelangt, so müssen wir hervorheben, daß allgemein eine recht gute Übereinstimmung erhalten wird. Zwei Beispiele der Reproduzierbarkeit — eines für Gips und das andere für Steinsalz — seien hier angeführt.

I. 26. 3. 28. Der Strom durch Gips Nr. 6 von 600 Volt bei 65° C entspricht 21,4 Skalenteilen; drei Stunden später unter denselben Bedingungen — 22,6 Skalenteile. Die Differenz übersteigt nicht 6 %.

II. 3. 7. 28. Der Strom durch Steinsalz Nr. 2 von 500 Volt bei 70° C entspricht 24,4 Skalenteilen; am 4. 6. unter denselben Bedingungen — 22,9, was eine Differenz von 6 % ergibt.

Öfters beobachteten wir eine Beeinflussung des Stromwertes durch mechanische Beschädigungen des Gipses und durch ungenügende Isolation des Schutzringes, die bei Gips recht schwer zu erhalten ist.

§ 3. Der Stromwert wurde gewöhnlich nach einer kurzen Zeitspanne (von $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ bis $60 \cdot 10^{-3}$ sec) nach Anbringen des Potentials

* A. D. Goldhammer, l. c.

an den Kristall gemessen. Für Gips erhielten wir auch Stromkurven, die während mehrerer Sekunden, und einige, die während der Dauer einiger Minuten registriert wurden. Bei der Untersuchung der Stromabnahme nach Sekunden und Minuten nach Anlegen des Potentials an den Kristall konnten wir feststellen, daß qualitativ der Charakter der Zeitabhängigkeit an das Verhalten anderer Dielektrika (z. B. parallel der optischen Achse geschnittener Quarze, Glimmer u. a. m.) erinnert, wobei vielleicht eine noch größere Stromabnahme zu verzeichnen ist. Als Illustration dieser Zeitabhängigkeit führen wir eine Kurve an, die während der Dauer von ungefähr 11 sec registriert wurde und sich auf Gips Nr. 6 bezieht (Fig. 1)*.

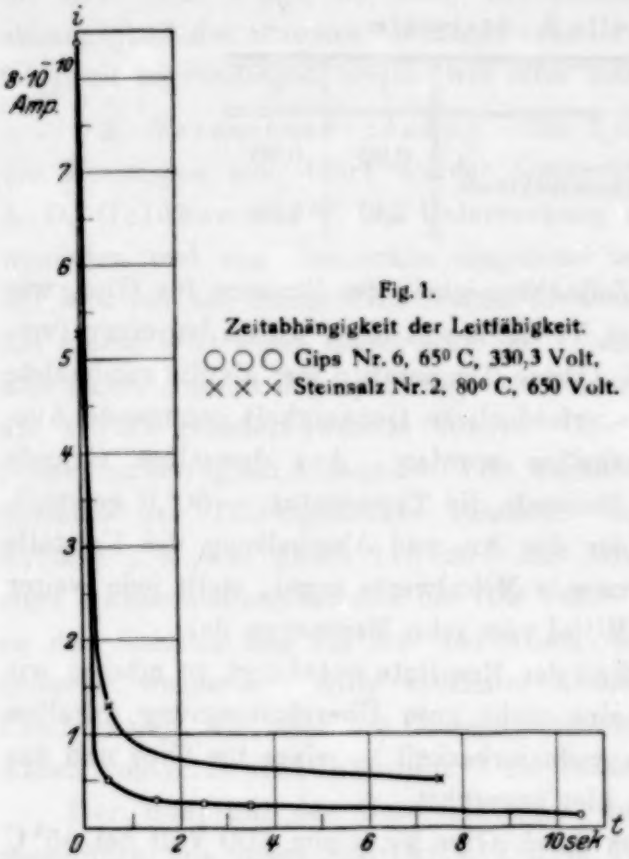


Fig. 1.
Zeitabhängigkeit der Leitfähigkeit.
○○○ Gips Nr. 6, 65° C, 330,3 Volt.
××× Steinsalz Nr. 2, 80° C, 650 Volt.

Die Änderung der Stromstärke in Steinsalz im Zeitintervall von 0,02 bis 7,5 sec veranschaulicht die Kurve ××× der Fig. 1. Der relative Wert der Stromabnahme ist in diesem Zeitintervall für Steinsalz geringer als für Gips.

Was die Stromkurven für kleine Zeitintervalle ($2{,}5 \cdot 10^{-3} - 60 \cdot 10^{-3}$ sec) anbetrifft, so muß hervorgehoben werden, daß ihr Verlauf annähernd und nur durch zwei bis drei Punkte bestimmt ist, da wir uns nicht das Ziel setzten, genau den Charakter der zeitlichen Abhängigkeit zu bestimmen; deshalb gestatten unsere Werte die Nachprüfung nicht, ob die Stromkurven der von Curie für eine Reihe von Dielektrika festgestellten Beziehung

$$i = at^{-n}, \quad \text{wo } 0 < n < 1,$$

entsprechen.

* Hier ist der Stromwert auf 1 mm Dicke und 1 cm² Flächeninhalt des Kristalls bezogen. In weiterem, wenn die Stromstärke in Amp. ausgedrückt ist, bezieht sie sich gleichfalls auf 1 mm Dicke und 1 cm² Flächeninhalt des Kristalls.

Diese Kurven zeigen gleichfalls eine bedeutende Stromabnahme mit der Zeit. In Fig. 2 sind solche Kurven angeführt, die sich auf drei Gipsexemplare beziehen. Diese Kurven sind bei einem Potential von 650 Volt erhalten. Die Größe der Stromabnahme schwankt im Zeitintervall von 0,01 bis 0,06 sec für verschiedene Exemplare von 2,5- bis 4 mal. In Fig. 3 sind drei Stromzeitkurven für Gips Nr. 8 b bei verschiedenen an den Kristall angelegten Potentialen dargestellt. Die Größe der Stromabnahme ist, wie leicht zu ersehen, für alle Kurven die gleiche (etwa 3).

Wir werden im weiteren sehen (siehe S. 702), daß alle Kurven der Zeitabhängigkeit des Stromes bei verschiedenen an den Kristall angelegten Spannungen durch Gleichungen von ein und demselben Typus wieder-

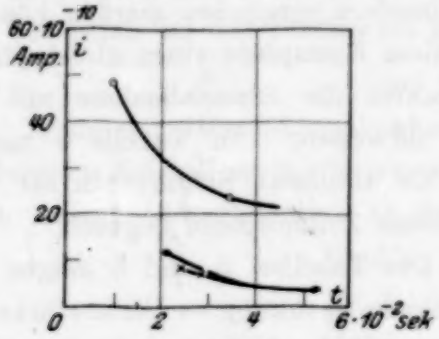


Fig. 2.

Zeitabhängigkeit der Leitfähigkeit von Gips.

● ● ● Gips Nr. 7,
× × × Gips Nr. 6, 650 Volt, 65° C.
○ ○ ○ Gips Nr. 9.

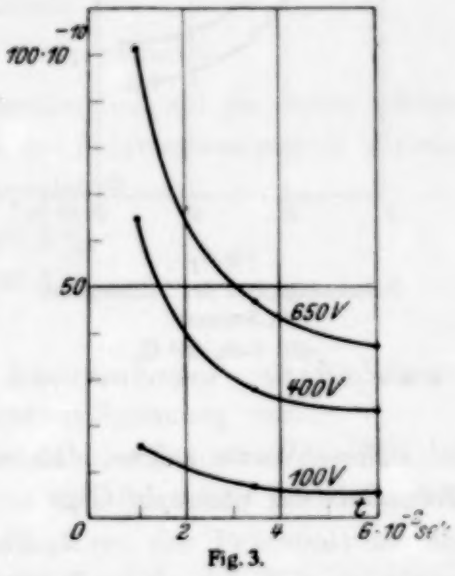


Fig. 3.

gegeben werden können. Aus dem Verlauf der Kurven ist zu ersehen, daß eine einigermaßen sichere Extrapolation des Stromwertes bis zum Zeitpunkt $t = 0$ ausgeschlossen ist. Der Charakter des Stromes in Gips in der Nähe des Koordinatenanfangs erinnert stark an das Verhalten von Glas* und Quarz** unter gleichartigen Bedingungen.

Die Zeitabhängigkeit des Stromes für Steinsalz wurde hauptsächlich nur nach geringen Zeitintervallen ($2{,}5 \cdot 10^{-3}$ bis $60 \cdot 10^{-3}$ sec) nach Anlegen des Potentials an den Kristall bestimmt. Wir führen hier zwei Kurven (Fig. 4) an, die die Zeitabhängigkeit des Stromes charakterisieren und sich auf zwei von uns untersuchte Exemplare beziehen. Der Strom-

* F. Tank, l. c.
** A. D. Goldhammer, l. c.

wert in Steinsalz steigt in der Nähe des Koordinatenanfangs mit der Zeit ebenso stark an, wie in Gips. Deshalb haben wir auch hinsichtlich des Steinsalzes gar keine Möglichkeit, von einem wahren Anfangsstrom zu reden. Im Zeitintervall von 0,01 bis 0,05 sec fällt der Stromwert für das erste Exemplar auf den 2,8. und für das zweite 2,9. Teil.

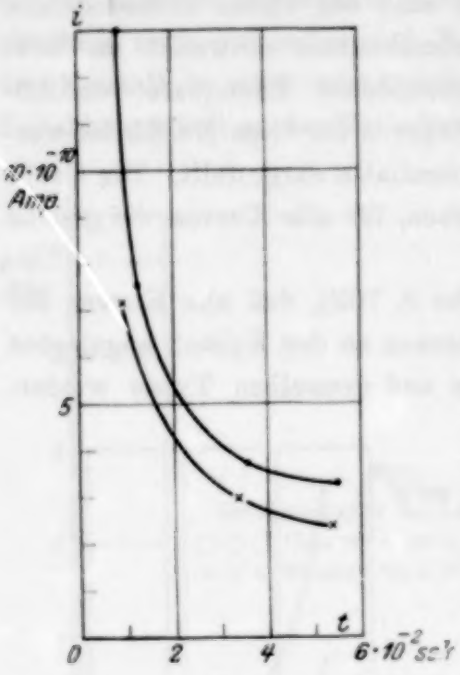


Fig. 4.
Zeitabhängigkeit der Leitfähigkeit in Steinsalz.
650 Volt, 80° C.
● ● ● NaCl Nr. 2, × × × NaCl Nr. 1.

Was die absoluten Stomwerte für verschiedene Exemplare von Gips und Steinsalz anbetrifft, so muß hervorgehoben werden, daß sie untereinander nur insofern verglichen werden können, als diese Exemplare einen gleichartigen Charakter der Stromabnahme mit der Zeit aufweisen. In Tabelle 3 und 4 sind die absoluten Stromwerte für verschiedene Zeitmomente gegeben.

Die Tabellen 5 und 6 zeigen die Beziehung Spannung — Stromstärke für Gips und Steinsalz für verschiedene Zeitmomente. Die Beziehungen sind auf 1 cm^3 bezogen und in Ohm ausgedrückt.

Diese Werte zeigen, daß nach 2 Minuten dauerndem Anlegen des Potentials der Strom in Gips

Nr. 8b . . . . $^1/_{605}$
Nr. 9 . . . . $^1/_{475}$

Tabelle 3. Gips. 650 Volt, 65° C.

t =	0,01 sec	0,05 sec	2 min
Nr. 6	—	$4{,}0 \cdot 10^{-10}$ Amp.	—
„ 7	—	4,0	$0{,}2 \cdot 10^{-10}$ Amp.
„ 8b	$101{,}0 \cdot 10^{-10}$ Amp.	39,0	0,2
„ 9	47,5	20,3	0,1

Tabelle 4. Steinsalz. 650 Volt, 80° C.

t =	0,01 sec	0,05 sec	10 min
Nr. 1	$6{,}7 \cdot 10^{-10}$ Amp.	$2{,}4 \cdot 10^{-10}$ Amp.	$0{,}2 \cdot 10^{-10}$ Amp.
„ 2	10,0	3,4	—

Tabelle 5. Gips. 650 Volt, 65° C.

$t =$	0,01 sec	0,05 sec	2 min
Nr. 6	—	$162.5 \cdot 10^{11}$	—
„ 7	—	162,5	$3,2 \cdot 10^{14}$
„ 8b	$6,4 \cdot 10^{11}$	16,7	3,2
„ 9	13,7	32,0	6,5

Tabelle 6. Steinsalz. 650 Volt, 80° C.

$t =$	0,01 sec	0,05 sec	10 min
Nr. 1	$9,7 \cdot 10^{12}$	$27,0 \cdot 10^{12}$	$2,7 \cdot 10^{14}$
„ 2	6,5	19,4	—

des Anfangsstromes ausmacht. Nach 10 Minuten dauerndem Anlegen des Potentials ist der Stromwert in Steinsalz

Nr. 1 . . . . $^1/_{33,5}$ seines Anfangswertes.

Wenn wir diese Stromabnahme ausschließlich auf die Polarisationsbildung im Kristall zurückführen, so muß der Polarisationswert 2 Minuten nach Anlegen des Potentials an den Gipskristall

Nr. 8b . . . . 99,8 %,
Nr. 9 . . . . 99,8 %

der angelegten Spannung betragen.

Der Polarisationswert im Steinsalz Nr. 1 muß aber nach 10 Minuten langem Stromdurchgang 97 % der angelegten Spannung sein.

§ 4. Da die Stromstärke im Kristall eine Funktion der Zeit ist, wurde die Abhängigkeit des Stromes von der Spannung nach verschiedenen bestimmten Zeitintervallen nach Anlegen des Potentials an den Kristall gemessen. Die diese Abhängigkeit darstellenden Kurven weisen ein gleichartiges Verhalten für alle verschiedenen untersuchten Gips- und Steinsalzexemplare auf. Die sich auf ein beliebiges Exemplar beziehenden experimentellen Punkte legen sich nämlich mit genügender Genauigkeit auf eine Gerade. Für Gips Nr. 8b führen wir in Fig. 5 die erörterte Abhängigkeit für drei Zeitmomente an: $t = 9,9 \cdot 10^{-3}$ sec, $t = 34,4 \cdot 10^{-3}$ sec und $t = 60 \cdot 10^{-3}$ sec. Das Verhalten von Gips Nr. 7 und 9 und Steinsalz Nr. 1 und 2 ist in Fig. 6 dargestellt, in welcher jede Gerade sich auf einen bestimmten, in der Figur verzeichneten Zeitpunkt bezieht. Diese Resultate führen zu der Schlußfolgerung, daß für geringe Zeitintervalle (von der Ordnung $2,5 \cdot 10^{-3}$ bis $60 \cdot 10^{-3}$ sec) die Stromstärke in Gips und Steinsalz in jedem gegebenen Moment dem Ohmschen Gesetz entspricht. Es war von Interesse, dies Resultat auch für größere t (z. B.

0,5 sec) nachzuprüfen, jedoch konnte bei der Schwierigkeit einer guten Isolierung des Schutzringes bei Gips dies nur mit einem Exemplar, das einen verhältnismäßig starken Strom ergab, ausgeführt werden. Es wurde gleichfalls eine Gerade (Fig. 6, III) erhalten, die infolge des geringen Anstiegs in einem 3,3mal vergrößerten Maßstab aufgetragen ist. Mit Steinsalz sind solche Versuche nicht angestellt worden.

Alle diese Resultate erlauben, mit großer Wahrscheinlichkeit die

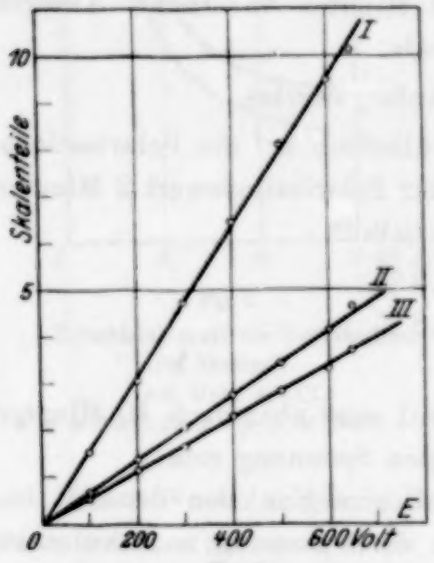


Fig. 5.

Stromspannungskurven bei Gips. Nr. 86.
I $t = 9{,}9 \cdot 10^{-3}$ sec.
II $t = 34{,}4 \cdot 10^{-3}$ sec.
III $t = 60{,}1 \cdot 10^{-3}$ sec.

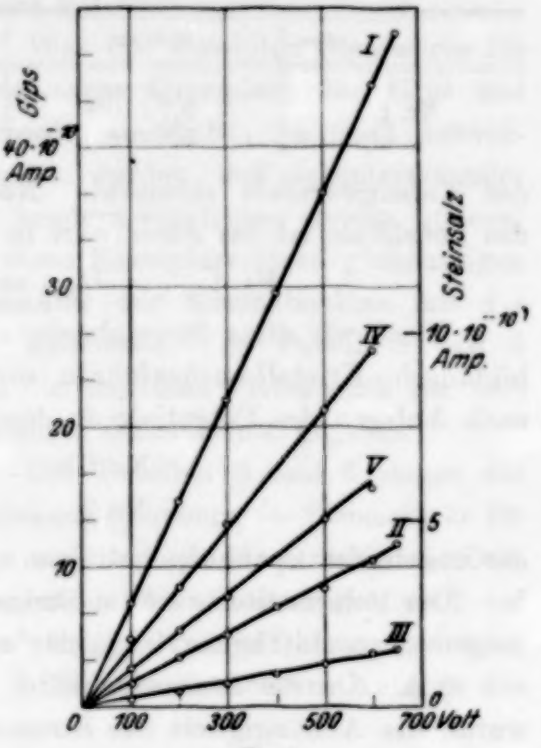


Fig. 6.

I Gips Nr. 9, $t = 9{,}9 \cdot 10^{-3}$ sec,
II Gips Nr. 7, $t = 21{,}4 \cdot 10^{-3}$ sec,
III Gips Nr. 7, $t = 0{,}5$ sec,
IV NaCl Nr. 2, $t = 11{,}0 \cdot 10^{-3}$ sec,
V NaCl Nr. 1, $t = 11{,}0 \cdot 10^{-3}$ sec.

Schlußfolgerung zu ziehen, daß die Abhängigkeit des Anfangsstromes von der Spannung für jeden beliebigen Zeitpunkt eine lineare Funktion darstellt. Folglich werden die Stromkurven für beliebige Spannungen in dem von uns untersuchten Gebiet durch ein und dieselbe Gleichung wiedergegeben, nämlich:

$$i = Ef(t),$$

wo i die Stromstärke im Kristall, E die an den Kristall angelegte Spannung und $f(t)$ eine für das gegebene Exemplar charakteristische Funktion bedeutet. Dies Resultat ist in der Hinsicht von Interesse, als die an-

geführte Formel zuerst von Curie* für eine Reihe von Dielektrika vorgeschlagen und gerade für Gips von ihm als ungültig befunden wurde. Eine analoge Formel gilt auch für Steinsalz.

§ 5. Für die weiteren Versuche — Prüfung der Gültigkeit des Superpositionsprinzips — war es von Wichtigkeit, den Einfluß des vorherigen Stromdurchganges durch den Kristall auf die Leitfähigkeit festzustellen. Dabei wurde eine Beeinflussung der Leitfähigkeit durch kurzdauernden Stromdurchgang gesucht, ähnlich der von A. D. Goldhammer** für Quarz nachgewiesenen, nicht aber durch jene langdauernden Stromdurchgänge, die, wie A. Joffé*** gezeigt hat, die Reinigung des Kristalls und anderes nach sich ziehen. Es wurde festgestellt, daß der Stromdurchgang keine dauernde Änderung der Leitfähigkeit in Gips hervorruft. Es wird nur eine unbedeutende Leitfähigkeitsherabsetzung (15 bis 20 %, in einigen Fällen 10 bis 12 %) beobachtet, die schon in 1 bis 2 Minuten völlig verschwindet und folglich naturgemäß in der gewöhnlichen Polarisation des Kristalls ihre Erklärung findet. Die nachstehende Tabelle 7

Tabelle 7.

Der Einfluß des Stromdurchganges auf die Leitfähigkeit von Gips Nr. 9. 65° C, $t = 0{,}01$ sec.

t	Elektrometerladung
0 min 2 sec	$104 \cdot 10^{-2}$ Volt
0 „ 30 „	116
1 „ 0 „	116
2 „ 0 „	118

Tabelle 8.

Der Einfluß des Stromdurchganges auf die Leitfähigkeit von Steinsalz Nr. 1. 80° C, $t = 18{,}2 \cdot 10^{-3}$ sec, $E = 500$ Volt, Anfangsstrom $= 15{,}9 \cdot 10^{-2}$ Volt, Stromdurchgang während 10 Minuten.

t	Elektrometerladung
0 min 4 sec	$14{,}5 \cdot 10^{-2}$ Volt
0 „ 30 „	15,0
1 „ 0 „	15,2
2 „ 0 „	15,5

erläutert diesen Effekt durch Zahlen, die sich auf Gips Nr. 9 beziehen. Während 2 Minuten war an den Kristall ein Potential $E = 329{,}3$ Volt angelegt, sodann wurde die Spannung ausgeschaltet, der Kristall auf 1 bis 2 sec geerdet und die Leitfähigkeit gemessen (in der Tabelle ist für den Nullzeitpunkt der Moment der Ausschaltung der Spannung angenommen).

Der vor dem Versuch gemessene Anfangsstrom war gleich $119{,}8 \cdot 10^{-2}$ Volt. Die übrigen Gipskristalle verhielten sich gleichartig.

Ein gleiches Verhalten zeigte auch Steinsalz (Tabelle 8).

* I. Curie, Ann. chim. phys. **18**, 203, 1889.

** l. c.

*** A. F. Joffé, Berichte des polytechn. Inst. in Petrograd **24**, 62, 1915.

Bei der Untersuchung der Temperaturabhängigkeit konnten wir nachweisen, daß bei raschem Übergang von hohen Temperaturen zu niedrigen die Leitfähigkeit des Steinsalzes (für Zeitmomente von der Ordnung 0,01 bis 0,02 sec) etwas höhere Werte als die vor der Erwärmung gemessenen aufweist. Deshalb war es von Interesse, die gemeinsame Wirkung von Stromdurchgang und Erwärmung aufzuklären. Auch in diesem Falle war kein einigermaßen bedeutender Einfluß der Leitfähigkeit zu verzeichnen. So stellte z. B. der Anfangsstrom für Steinsalz von $E = 500$ Volt bei 35° C $15{,}9 \cdot 10^{-2}$ Volt der Elektrometerladung dar, während er nach 10 Minuten dauerndem Stromdurchgang bei 80° C und nachfolgender Abkühlung nur $16{,}3 \cdot 10^{-2}$ Volt erreichte.

Wenn wir an einen Kristall, durch welchen einige Zeit (2 Minuten für Gips und 5 Minuten für Steinsalz) ein Strom von E Volt geschickt wurde, noch E Volt anbringen oder umgekehrt das angelegte Potential entfernen und nach einer kurzen Zeitspanne (von der Ordnung $2{,}4 \cdot 10^{-3}$ sec) nach ergänzendem Anlegen oder Ausschalten des Potentials den Strom messen, so kann sein Wert Aufschluß über die Gültigkeit des Superpositionsprinzips liefern. Die nachstehenden Angaben beweisen mit Sicherheit die vollkommene Gültigkeit dieses Prinzips für Gips (Tabelle 9) und Steinsalz (Tabelle 10). In diesen Tabellen ist der Strom durch den Kristall in 10^{-2} Volt der Elektrometerladung gegeben.

Tabelle 9. Gips Nr. 9. Saitenelektrometer, 65° C.

Anfangsstrom $E = 329{,}3$ Volt	Strom von $2E = 329{,}3 \cdot 2 = 658$ Volt nach 2 min langem Stromdurchgang von $E = 329{,}3$ Volt	Entladungsstrom nach 2 min langem Stromdurchgang von $E = 329{,}3$ Volt
119,8	126,0	124,0

Tabelle 10. Steinsalz. Saitenelektrometer, 80° C.

Nr.	Anfangsstrom $E = 328{,}6$ Volt	Strom von $2E = 328{,}6 \cdot 2 = 657{,}2$ Volt nach 5 min langem Stromdurchgang von $E = 328{,}6$ Volt	Entladungsstrom nach 5 min langem Stromdurchgang von $E = 328{,}6$ Volt
1	9,0	8,9	9,4
2	12,2	12,3	12,6

Diese Zahlen stimmen mit einer Genauigkeit von 5 % überein. Gleiche Resultate wurden auch für andere Gipsexemplare erhalten.

Auch in diesem Falle sind die Abweichungen der einzelnen Zahlen nicht größer als 4,5 %.

§ 6. Temperaturabhängigkeit. Die Temperaturabhängigkeit der Gipsleitfähigkeit wurde für zwei Exemplare — Nr. 6 und 9 — untersucht, wobei diese Untersuchung nur qualitativen Charakter hatte. Die Werte für Gips Nr. 6 beziehen sich auf den Zeitpunkt $t = 0{,}5$ sec und für Nr. 9 auf $t = 0{,}01$ sec. Die Messungsergebnisse sind in den Koordinaten $(\log \sigma, T^{-1})$ in Fig. 7 angeführt. Wenn man in grober Annäherung durch diese experimentellen Punkte die Geraden

$$\log \sigma = A T^{-1} + B$$

zieht, wo σ die Leitfähigkeit, T die absolute Temperatur und A und B Konstanten sind, so wird der Koeffizient A für Gips Nr. 6 $= -0{,}40 \cdot 10^4$ und für Gips Nr. 9 $= -0{,}41 \cdot 10^4$ sein. Diese Angaben stimmen schlecht

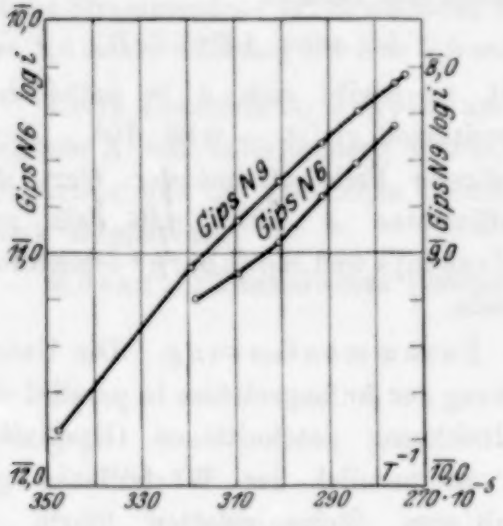


Fig. 7.

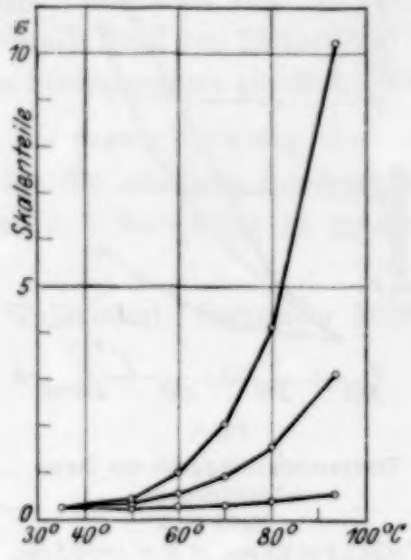


Fig. 8.

mit jenen von N. Ussataja und B. Hochberg* über den Wert des Koeffizienten A bei Dielektrika überein.

Bei der Untersuchung der Temperaturabhängigkeit der Steinsalzleitfähigkeit für niedrige t fällt die unbedeutende Leitfähigkeitszunahme mit der Temperatur auf, während Forscher, die die Temperaturabhängigkeit mit Hilfe von Restströmen untersuchten, ein Exponentialgesetz erhielten. Zwecks Aufklärung dieser mangelnden Übereinstimmung wurden von uns Messungen der Temperaturabhängigkeit für verschiedene Momente t angestellt. Da sich beide Steinsalzexemplare gleichartig verhielten, wollen wir nur die Werte für ein Exemplar — Nr. 2 — anführen (siehe

* N. Ussataja und B. Hochberg, Ber. d. Akad. d. Wiss. Leningrad 1927, Nr. 4.

Fig. 8). Diese Messungen zeigten, daß der Charakter der Temperaturabhängigkeit durch den Zeitpunkt bedingt ist, auf welchen sich die Strom messung bezieht. Und je größer das Zeitintervall t zwischen dem Anlegen der Spannung und dem Zeitpunkt der Strommessung ist, desto mehr nähert sich der Charakter der Temperaturabhängigkeit dem Exponentialgesetz. In Fig. 8 ist die Temperaturabhängigkeit für 3 t-Werte angeführt, wobei, da die Stromwerte bei ein und derselben Temperatur, aber für verschiedene t stark differieren, bei allen drei Kurven ein und derselbe Anfangspunkt, der der Temperatur 35° C entspricht, angenommen ist. Dieselben Werte sind auch in Fig. 9 angeführt, aber in den Koordinaten ($\log \sigma$, T^{-1}). Wenn man durch die Punkte, die sich auf $t = 7{,}5$ sec beziehen, annähernd eine Gerade

$$\log \sigma = AT^{-1} + B$$

zieht, so ergibt sich A in natürlichen Logarithmen gleich $-0{,}86 \cdot 10^4$. Auch in diesem Falle stimmt der Wert des Koeffizienten A nicht mit dem von N. Ussataja und Hochberg* ermittelten überein.

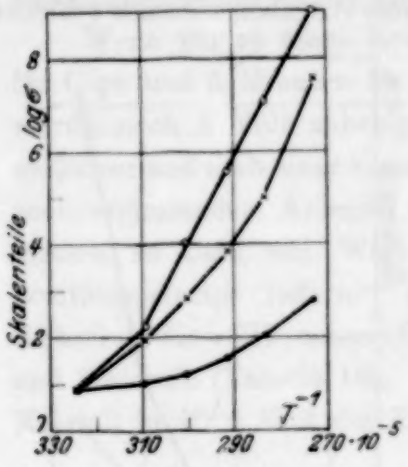


Fig. 9.

Temperaturabhängigkeit der Steinsalzleitfähigkeit.
Na Cl Nr 2.
○○○ $t = 7{,}5$ sec, ××× $t = 0{,}5$ sec,
●●● $t = 18{,}5 \cdot 10^{-3}$ sec.

Zusammenfassung. Die Untersuchung der Anfangsströme in parallel der Spaltrichtung geschnittenen Gipsplatten und in parallel der Würfelfläche geschnittenen Steinsalzplatten führte zu folgenden Ergebnissen:

1. Bei Verkürzung der Zeitspanne zwischen dem Anlegen der Spannung an den Kristall und der Strommessung von 0,06 bis 0,01 sec weist der Anfangsstrom in den untersuchten Substanzen einen ununterbrochenen Anstieg auf, ohne einer endlichen Grenze zuzustreben.

2. Im Gebiet der Anfangsströme konnten keine Anomalien in der Leitfähigkeit des Gipses beobachtet werden. Wie in Gips, so auch in Steinsalz entspricht der Anfangsstrom im gegebenen Exemplar der Gleichung (Ohmsches Gesetz)

$$i = Ef(t),$$

wo i die Stromstärke im Kristall, E die an den Kristall angelegte Spannung und $f(t)$ eine unbekannte Funktion der Zeit ist.

* l. c.

3. Für beide untersuchte Substanzen ist das Superpositionsprinzip gültig.

4. Es konnte keine Beeinflussung der Leitfähigkeit der untersuchten Substanzen durch vorherigen Stromdurchgang von dem Charakter, wie er für Quarz festgestellt ist, beobachtet werden.

5. Vorläufige Angaben über die Temperaturabhängigkeit der Gipsleitfähigkeit zeigen, daß sie angenähert der Formel

$$\log \sigma = A T^{-1} + B$$

entspricht, mit dem Wert von A gleich $-0{,}4 \cdot 10^4$.

6. Der Charakter der Temperaturabhängigkeit der Steinsalzleitfähigkeit ist durch die Zeitspanne zwischen dem Anlegen des Potentials an den Kristall und der Strommessung bedingt. Für $t = 18{,}5 \cdot 10^{-3}$ sec ist die Stromzunahme bei Erwärmung des Kristalls Nr. 2 von 35 bis 93,5° C das 2,4fache, während für $t = 7{,}5$ sec diese Stromzunahme gleich 4,3 ist.

Herrn Dozenten A. D. Goldhammer, auf dessen Anregung die vorliegende Arbeit unternommen wurde, bin ich für ständiges Interesse an der Arbeit und für zahlreiche Anweisungen und Ratschläge zu großem Dank verpflichtet.

Kasan, Physikalisches Institut der Universität, September 1928.

Untersuchungen über die Anfangsströme im Quarz.

Von **A. D. Goldhammer** in Kasan.

Mit 11 Abbildungen. (Eingegangen am 17. Oktober 1928.)

Es wurden mittels einer photographischen Methode die Anfangsströme in zwei Quarzpräparaten untersucht und folgende Ergebnisse gefunden: Die Zeitabhängigkeit des Anfangsstromes im Quarz in den ersten 4 bis $17 \cdot 10^{-2}$ sec ist durch die Formel $i = a t^{-n}$ wiedergegeben, später fällt der Strom rascher, als dieser Formel gemäß. Die Spannung–Stromabhängigkeit ist bei Quarz keine Gerade, vielmehr ändert sie die Vorzeichen ihrer Krümmung mit den Zeitwerten, bei welchen die Messungen ausgeführt wurden. Das Superpositionsprinzip ist bei Anfangsströmen nicht erfüllt; die Ursache dieser Erscheinung ist in der Beeinflussung der Leitfähigkeit des Quarzes durch den Stromdurchgang zu suchen. Diese besteht aber darin, daß der Stromdurchgang die Leitfähigkeit in der Richtung des Stromes vermindert und in entgegengesetzter Richtung vergrößert. Nach einer Zeitspanne, während welcher der Kristall geerdet ist, ändert die Unipolarität der Leitfähigkeit ihr Vorzeichen. Eine mögliche Erklärung aller dieser Erscheinungen wird gegeben.

In meiner vorigen Arbeit*) wurde nachgewiesen, daß der Durchgang elektrischer Ströme durch senkrecht zur optischen Achse geschnittene Quarzplatten in den ersten Momenten nach Anlegen der Spannung an den Kristall von einigen Eigentümlichkeiten (z. B. Beeinflussung der Leitfähigkeit durch vorherigen Stromdurchgang, Auftreten der Unipolarität u. a. m.) begleitet ist, die ergänzende Vorstellungen über die Natur der Quarzleitfähigkeit erfordern. Daselbst sprach ich die Vermutung aus, daß die den Stromdurchgang im Quarz begleitenden Prozesse in zwei Typen eingeteilt werden müssen — in schnelle und langsame, wobei die letzteren wahrscheinlich von gewöhnlicher elektrolytischer Natur sind und nur ihnen die früheren Arbeiten über die Quarzleitfähigkeit gewidmet waren. Um diese Annahme nachzuprüfen und auch möglichst eingehend die Eigentümlichkeiten des Stromes im Quarz in den ersten Momenten nach Anlegen der Spannung an den Kristall zu studieren, wurde von mir eine spezielle Untersuchung angestellt, deren Resultate in der vorliegenden Arbeit niedergelegt sind.

§ 1. Versuchsanordnung. Die Strommessungen im Quarz wurden nach der üblichen elektrostatischen Ladungsmethode ausgeführt, nur mit dem Unterschied, daß die Bewegung des Fadens eines Lützschen Saitenelektrometers photographiert wurde. Der Nachteil dieser Methode, der darin besteht, daß die photographierte Kurve nicht die Zeitabhängigkeit der Stromstärke, sondern des $\int_\tau^t i\,dt$ darstellt, wo τ ein konstantes Zeit-

*) A. D. Goldhammer, ZS. f. Phys. **47**, 671, 1928.

intervall (ungefähr 10^{-3} sec) zwischen dem Anlegen der Spannung an den Kristall und dem Beginn des Versuchs ist, wird, wenigstens prinzipiell, durch die Möglichkeit aufgehoben, Kurven zu erhalten, deren Anfang beliebig nahe dem Nullzeitpunkt liegt. Außerdem war es von Wichtigkeit, die Stromstärke im Kristall und ihre zeitliche Abhängigkeit nicht nur zu messen, sondern auch den Einfluß des vorherigen Stromdurchgangs und sogar der Pause zwischen diesem Stromdurchgang und dem Versuch, während welcher der Kristall geerdet war, zu bestimmen. Dies wurde mit Hilfe eines besonderen Kommutators erreicht, dessen Einrichtung aus Fig. 1 zu ersehen ist. An einer Ebonitscheibe von 24,5 cm Durchmesser waren 8 konzentrische Messingringe (in der Figur nur 6) befestigt, von welchen die einen durch Isolationsschichten in Sektionen verschiedener Länge (α, β, γ) eingeteilt waren. Die Ringe 7 und 8 waren gänzlich aus Ebonit, mit Ausnahme eines kleinen Sektors aus Messing; außerdem konnte der Messingsektor des Ringes 8 durch Drehen des Ringes in eine beliebige Lage gebracht werden. Mit Hilfe rotierender Bürsten (elektrische Motoren, die miteinander metallisch verbunden waren, wurde der Metallkontakt zwischen dem 1. und 2., oder 1. und 3. und 6., 7. und 8. Ring hergestellt. Der Ring 1 war dauernd mit dem Kristall verbunden, während an die Sektoren α, β und γ verschiedene Spannungen angelegt werden konnten, welche wir im folgenden der Reihe nach als Anfangsspannung, Zwischen- und Versuchsspannung (v_1, v_2 und v) bezeichnen werden. Auf diese Weise wurde beim Drehen des Apparats der Kristall nachfolgend mit drei verschiedenen Spannungen in Verbindung gebracht. Von der Rolle des Sektors α vorläufig abgesehen, konnte durch Wahl des 2. bis 5. Ringes und Variieren der Drehungsgeschwindigkeit des Kommutators die Zeitspanne geändert werden, während welcher der Kristall mit dem Sektor β verbunden war. Angesichts dessen jedoch, daß die aperiodischen Prozesse bei möglichst genau bekanntem Anfangszustand des Kristalls das Ziel der Untersuchung darstellen, war es notwendig, daß der ganze Zyklus der Änderung der an den Kristall angelegten Spannung nur einmal stattfand, d. h. der Kristall mußte mit dem Kommutator nur während einer Umdrehung des letzten verbunden bleiben. Dies wurde dadurch erreicht, daß sich in der Versuchsanordnung zwei

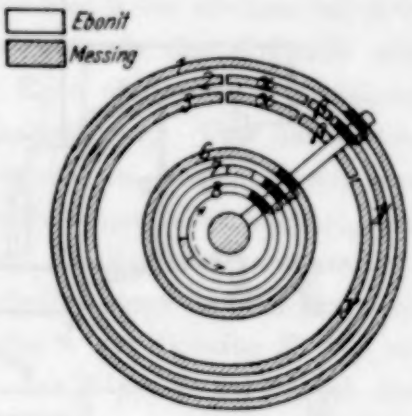


Fig. 1.

Wippen (vom üblichen Typus mit Quecksilberkontakten) befanden, die durch besondere Elektromagnete in Betrieb gesetzt werden konnten. In der Anfangsstellung der Wippen war der Kristall vom Kommutator abgeschaltet und trat mit ihm in Verbindung erst nach Einschalten der Wippe I. Diese Einschaltung wurde automatisch durch entsprechende Bürsten im Moment der Verbindung des 6. Ringes mit dem 7. bewerkstelligt. Wenn also beim rotierenden Kommutator der Strom im Elektromagnetenkreis eingeschaltet wurde, so wurde bei der nach der Einschaltung folgenden Verbindung der Ringe 6 und 7 auch die Wippe I

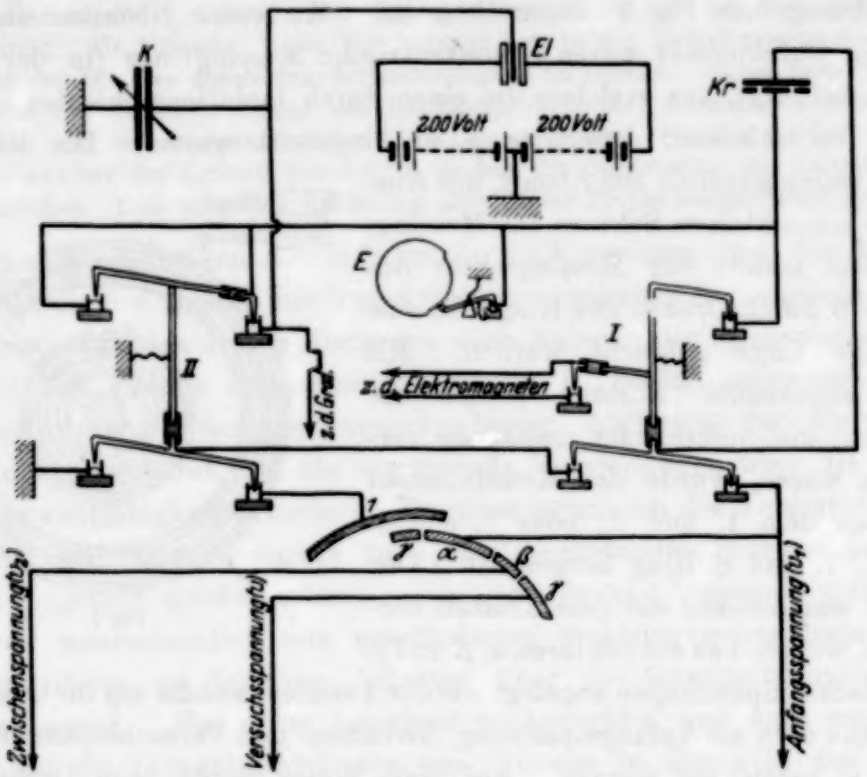


Fig. 2.

eingeschaltet und der Kristall mit der Anfangsspannung verbunden. Außer der Verbindung des Kommutators mit dem Kristall bewerkstelligte die Wippe I die weitere Umschaltung im Elektromagnetenkreis, wodurch, wenn bei weiterer Rotation des Kommutators die Ringe 6 und 8 in Verbindung gebracht waren, die Wippe II eingeschaltet wurde, die abermals den Kristall vom Kommutator abschaltete und die Kristallbelegungen erdete. Auf diese Weise befand sich der Kristall nur während einer nicht vollen Umdrehung des Kommutators unter Spannung (ungefähr $23 \cdot 10^{-2}$ sec). Die Versuchsanordnung ist in Fig. 2 schematisch dargestellt, wo I und II die oben erwähnten Wippen, Kr der Kristall, K der

drehbare Kondensator von ungefähr 1000 cm Kapazität und *El* das Saitenelektrometer sind. Um das Schema nicht zu überladen, ist der Elektromagnetenkreis, die Vorrichtung zur Graduierung des Elektrometers wie auch die Spannungsquelle (Akkumulatoren) in Fig. 2 nicht eingezeichnet.

Gewöhnlich wurde die Zeit, während welcher der Kristall mit der Anfangsspannung verbunden war, nach Minuten bemessen. Dies wurde dadurch erreicht, daß für die erforderliche Zeitdauer vor Versuchsbeginn bei uneingeschalteter Wippe I der Kristall unabhängig von ihr mit der Anfangsspannung verbunden wurde, wie es in Fig. 2 zu sehen ist.

Die Stellung des Sektors 7 wurde indessen so gewählt, daß im Moment der Einschaltung der Wippe I die oberen Bürsten des Kommutators sich gerade auf dem Sektor α befanden, so daß unabhängig von dieser Einschaltung die Verbindung des Kristalls mit der Anfangsspannung nicht unterbrochen wurde. Wie weiter aus Fig. 2 zu ersehen ist, war nach Einschalten der Wippe I die Sammelelektrode des Kristalls mit dem Elektrometer verbunden und von der Erde abgeschaltet, trotzdem die Versuchsspannung noch nicht eingeschaltet war. Um dabei den Faden des Elektrometers in der Nullage festzuhalten, bedienten wir uns der Vorrichtung *E* (Fig. 2), die aus einer Messingscheibe bestand, die einen Ausschnitt (siehe Fig. 2) trug und auf die Kommutatorachse aufgesetzt war. Beim Drehen hob diese Scheibe einen besonderen, das Elektrometer erdenden Hebel. Der Ausschnitt der Scheibe *E* war so gewählt, daß im Moment des Einschaltens der Wippe I der Hebel das Elektrometer erdete, die Aberdung aber erfolgte erst ungefähr 10^{-3} sec nach der Verbindung des Ringes 1 mit dem Sektor γ durch die rotierenden Bürsten. Erst von diesem Moment an setzte die Bewegung des Elektrometerfadens ein.

Der Faden wurde auf eine Trommel (Radius 4,8 cm) mit Bromsilberpapier, die sich in einem besonderen Kasten befand, projiziert. Diese Trommel wurde von demselben Motor, der den Kommutator in Bewegung setzte, gewöhnlich mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 200 Umdrehungen in der Minute rotiert. Der Lichtverschluß der Vorrichtung, in welcher sich der Kasten befand, war durch zwei Fäden mit den Wippen I und II verbunden, so daß er sich beim Einschalten der Wippe I und II öffnete bzw. schloß. Da jedoch das Einschalten der Wippe I nicht mit dem Anfangsmoment der Aufnahme zusammenfiel, war an der Kommutatorachse noch eine Scheibe befestigt, die mit einem Ausschnitt versehen war, welcher den Lichtzutritt zum lichtempfindlichen Papier erst im Moment der Einschaltung der Versuchsspannung gestattete. Auf diese

Weise ergab der Rand der Schwärzung des Papiers sozusagen den „Koordinatenanfang“ auf der Aufnahme. Schließlich wurden die absoluten Zeitmessungen mit Hilfe einer elektromagnetischen Stimmgabel, deren Schwingungen gleichzeitig mit dem Elektrometerfaden auf das lichtempfindliche Papier projiziert wurden, ausgeführt. Alle Leitungsdrähte, die den Kristall mit dem Elektrometer und dem Kondensator verbanden, waren durch Paraffin und Bernstein isoliert und befanden sich zusammen mit dem Elektrometer in einer besonderen, geerdeten Schutzvorrichtung. Was die übrigen Einzelheiten der Anordnung anbetrifft, wie z. B. den Apparat, in welchem sich der Kristall befand, Thermostat u. a. m., so sind sie in der vorigen Arbeit* beschrieben. Daselbst sind auch die Angaben über die untersuchten Kristalle angeführt. Die nach der photographischen Methode mit Quarz II und III angestellten Untersuchungen wurden wie früher ausschließlich bei einer Temperatur von 35° C ausgeführt.

§ 2. Fehlerquellen. Die mit Hilfe der oben beschriebenen Anordnung erhaltenen photographischen Kurven der Fadenbewegung sind nicht frei von einer Reihe von Fehlern, die eliminiert werden müssen, falls wir absolute Stromwerte erhalten wollen. Dieser Fehler gibt es mehrere: Kurvenverzerrungen, die von der Unvollkommenheit des Elektrometers abhängen und a) durch die Nichtproportionalität der Elektrometerskale und b) durch die Trägheit des Fadens hervorgerufen werden; dann c) die Nichtkonstanz des Elektrometerpotentials während der Aufnahme und d) zuletzt die Fehler infolge der Induktionsladungen, die von der Oberfläche des Schutzringes auf die Sammelelektrode abfließen.

Was den ersten Fehler betrifft, so ist er leicht zu eliminieren, indem das Elektrometer vorher graduiert wird. Die Differenz, die infolge der Substitution der „dynamischen“ Korrektionskurve durch die „statische“, die der Versuch ergibt, entstehen kann, wird nur klein sein, falls die Trägheit des Fadens und die Krümmung der zu untersuchenden Kurve unbedeutend ist. Wie wir weiter sehen werden, waren diese Bedingungen tatsächlich immer erfüllt. Da aber die Abweichungen von der gleichmäßigen Skale niemals 10% überschritten, so erwies es sich als vollkommen zulässig, die Korrektion auf die Ungleichmäßigkeit der Skale vor jener auf die Trägheit des Fadens einzuführen. Alle folgenden Kurven sind schon auf diese Weise korrigiert und deshalb werden wir im weiteren die Ausschläge des Elektrometers als seinem Potential

* l. c.

proportional betrachten. Für eine mögliche Herabsetzung der Trägheit des Fadens erwies es sich vorteilhaft, die im Saitenelektrometer üblichen Platinfäden durch Glasfäden* zu ersetzen. Es gelang mir leicht, Glasfäden von ungefähr 2 bis 3 μ Durchmesser herzustellen, welche leicht versilbert bei genügender Gleichmäßigkeit der Skale und „Schnelligkeit der Einstellung" die nötige Empfindlichkeit ergaben.

Jedoch war auch die Schnelligkeit der Einstellung, welche ich dabei erreichen konnte, nämlich ungefähr $1{,}5 \cdot 10^{-2}$ sec, nicht genügend, um die durch die Trägheit des Fadens herrorgerufenen Verzerrungen der Kurve unbeachtet lassen zu können. Zwecks Beseitigung dieses Fehlers machte ich die Annahme, daß die zurücktreibende Kraft des Fadens proportional seiner Entfernung aus der Ruhelage, die Dämpfung aber proportional seiner Geschwindigkeit ist, daß also das Bewegungsgesetz des Fadens (genauer gesagt, seiner Projektion auf das lichtempfindliche Papier) durch eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten wiedergegeben ist:

$$m\ddot{x} + 2k\dot{x} + n^2 x = a v_x,$$

wo v_x das wahre Potential des Elektrometers und x die Entfernung des Fadens von der Ruhelage darstellen (unter Annahme einer gleichmäßigen Skale, siehe oben). Wenn in diese Gleichung statt x jenes konstante Potential v des Elektrometers, das gerade den Ausschlag x (statische Reduktionskurve) hervorruft, eingesetzt wird, so wird

$$\frac{m}{n^2}\ddot{v} + 2\frac{k}{n^2}\dot{v} + v = v_x, \qquad \text{(a)}$$

d. h. der Wert $\frac{m}{n^2}\ddot{v} + 2\frac{k}{n^2}\dot{v}$ stellt gerade die Korrektion auf die Trägheit des Fadens dar. Zur Bestimmung der Koeffizienten $\frac{m}{n^2}$ und $2\frac{k}{n^2}$ und gleichzeitig zwecks Rechtfertigung aller oben angeführten Voraussetzungen wurde die Bewegung des Fadens bei praktisch momentaner Ladung des Elektrometers photographiert. Aus der erhaltenen Kurve sind leicht die Werte $\frac{m}{n^2}$ und $2\frac{k}{n^2}$ zu berechnen und danach kann der Vergleich der photographischen Kurve mit dem Integral der Gleichung (a) bei der Annahme $v_x =$ konst. die Anwendbarkeit der Gleichung selbst recht-

* Dabei ist es vorteilhafter, nicht den Quarzbügel zu gebrauchen, sondern beide Fadenenden fest zu fixieren und Fadenausschläge nur nach einer Seite hin zu verwerten, wobei der Nullpunkt asymmetrisch gewählt wird.

fertigen. Alle diese Annahmen wurden experimentell bestätigt und die Korrektion auf die Trägheit des Fadens gleich

$$0{,}002\,\ddot{v} + 0{,}0095\,\dot{v}\ \text{Volt}$$

gefunden, wenn als Zeiteinheit nicht eine Sekunde, sondern 10^{-2} sec (wie überall im folgenden) genommen wird. Hinsichtlich des Einflusses der Nichtkonstanz des Elektrometerpotentials muß bemerkt werden, daß, indem die Änderungen des letzteren bei einem Potential am Kristall von nicht weniger als 100 Volt niemals 5 Volt überstiegen, es zulässig erscheint, die Stromstärke in jedem beliebigen Moment als proportional der Differenz zwischen der angelegten und Elektrometerspannung anzunehmen und dementsprechend die Ordinaten der Kurve zu vergrößern.

Die größten Schwierigkeiten rufen jene Fehler hervor, die durch die von der Oberfläche des Schutzringes abfließenden Induktionsladungen bedingt sind. In der vorigen Arbeit (l. c.) habe ich gezeigt, daß dieses Abfließen der Induktionsladungen tatsächlich stattfindet, jedoch wurde sein Einfluß nur während einer Zeitspanne von nicht mehr als $1{,}4 \cdot 10^{-2}$ sec nach Anlegen der Spannung an den Kristall beobachtet. Da in betreff des zeitlichen Verlaufs dieses Abfließens der Ladungen und sogar über die Größe des Fehlers, der dadurch entstehen kann, absolut keine Angaben vorhanden sind (außer einer groben oberen Grenze, die aus dem Flächeninhalt des Schutzringes berechnet werden kann*), so ist auch eine einigermaßen sichere Eliminierung desselben ausgeschlossen. Die aber auffallend einfache Zeitabhängigkeit des Stromes im Quarz, von welcher unten die Rede sein wird, gestattet diesen Fehler auf indirekte Weise mit einem hohen Grade von Wahrscheinlichkeit zu eliminieren. Die diesbezüglichen Einzelheiten werden im entsprechenden Paragraphen erörtert werden.

Die sehr zeitraubende Reinigung der Kurven von all diesen Fehlern wurde nur in den Fällen ausgeführt, in welchen es notwendig war, den absoluten Stromwert zu bestimmen. Für alle übrigen qualitativen Resultate bestand hierfür keine Notwendigkeit, und deshalb sind unten nur jene Kurven auf absolute Werte reduziert, die zur Auffindung des wahren Charakters der Zeitabhängigkeit des Stromes dienten.

§ 3. Die Zeitabhängigkeit des Stromes. Als Illustration des allgemeinen Charakters der Kurven des Anfangsstromes führe ich hier eine von den Kurven an, die ich mit Quarz II zu Anfang der Untersuchung erhielt (Fig. 3, Kurve I). Diese Kurve zeigt zugleich, daß die

* Sie war für Quarz II gleich ungefähr 0,1 Volt und für Quarz III 0,15 Volt bei 330 bzw. 175 cm Kapazität des Leitungssystems.

angewendete photographische Methode gut reproduzierbare Resultate ergibt; die Kreise und Kreuze bezeichnen hier Punkte, die zwei verschiedenen, während zwei Tagen photographierten Aufnahmen entnommen sind (hier wie im weiteren bezeichne ich als Stromkurve eigentlich die Kurve des Integrals des Stromes; siehe § 1). Trotz dieser ausgezeichneten Reproduzierbarkeit muß ich bemerken, daß der in der vorliegenden Untersuchung beobachtete absolute Stromwert in Quarz II etwas größer ist, als in der vorigen. Da zwischen diesen Messungen fast ein Jahr verflossen ist, ist es mir schwer, die Ursache dieser Abweichung festzustellen.

Bei der Untersuchung der Zeitabhängigkeit des Stromes im Quarz muß auch beachtet werden, daß jeder langdauernder Stromdurchgang

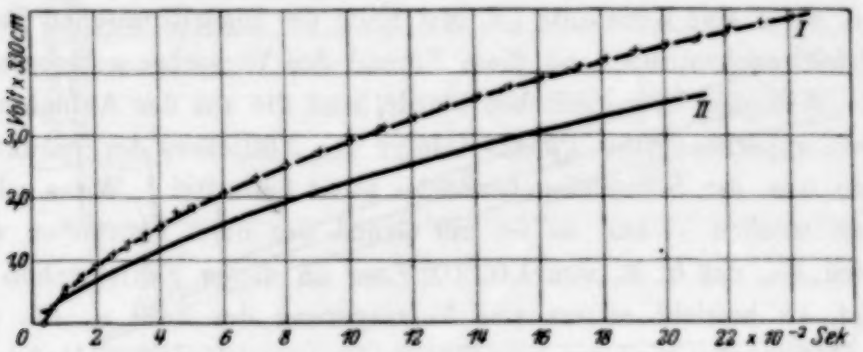


Fig. 3.

I und II. Quarz II $\begin{cases} v_1 = 0 \text{ Volt} \\ v_2 = 0 \text{ Volt} \\ v = 120 \text{ Volt} \end{cases}$ $t = 35^0$ C.

(Minuten) sozusagen eine Erhöhung des Widerstands des Kristalls hervorruft. Dies ist z. B. aus Fig. 3 zu ersehen, wo die Kurve II sich gleichfalls auf Quarz II bezieht und genau unter denselben Bedingungen erhalten ist, wie die Kurve I, jedoch $1^1/_2$ Monate später, während welcher Zeit mehrmals durch den Kristall Ströme geschickt wurden. Mir scheint es, daß diese Widerstandserhöhung am einfachsten mit den Beobachtungen von Warburg* über die Bildung von nichtleitenden Schichten in Quarz an der Anode nach langdauerndem Stromdurchgang in Zusammenhang zu bringen ist.

Was die Zeitabhängigkeit der Stromstärke selbst anbetrifft, so lassen die von mir erhaltenen Kurven eine ganz bestimmte Schlußfolgerung zu. Nämlich in allen untersuchten Fällen entspricht die Stromstärke in beiden

* E. Warburg und F. Tegetmayer, Wied. Ann. **41**, 18, 1890.

Exemplaren in den Grenzen der Beobachtungsfehler im Anfang der Beziehung

$$i = at^{-n}, \tag{b}$$

während nach 0,04 bis 0,2 sec nach Anlegen des Potentials der Strom rascher abfällt, als dieser Formel entspricht.

Die Gültigkeit dieser Beziehung ist am einfachsten auf folgende Weise nachzuweisen. Falls tatsächlich die Beziehung (b) zwischen Stromstärke und Zeit besteht, müssen die Integralkurven auf den Aufnahmen der Formel

$$Q = a\int_{\tau}^{t} t^{-n}dt = \frac{a}{1-n}\,t^{1-n} - \alpha,$$

oder

$$Q + \alpha = \beta t^{m} \tag{c}$$

genügen, wo α eine Konstante ist. Mit Hilfe des logarithmischen Papiers ist es leicht nachzuprüfen, ob diese Formel den Versuchsergebnissen entspricht. Wie oben hervorgehoben wurde, sind die aus der Aufnahme gewonnenen experimentellen Punkte infolge des Abfließens der Induktionsladungen von der Schutzringoberfläche nicht fehlerfrei. Wenn wir die Annahme machen — und es ist auf Grund des oben Erörterten wahrscheinlich —, daß z. B. von $1{,}0 \cdot 10^{-2}$ sec an dieser Fehler schon konstant ist, so bewirkt er nur eine Verringerung der Zahl α, die zu Q hinzugefügt werden muß, um eine Gerade im logarithmischen Maßstab zu erhalten.

Also ist

$$\alpha = \alpha' - \alpha'',$$

wo α'' den Wert des betrachteten Fehlers und α' die Korrektion der Kurve auf den Koordinatenanfang ist, die von τ abhängt. Zur Bestimmung von α'' kann man den Anfangspunkt der Kurve, der dem Anfang der Fadenbewegung entspricht (τ; 0, 0), zu Hilfe nehmen. Für diesen Punkt wird die Gleichung (c)

$$\alpha' = \beta\tau^{m},$$

da hier Q und α'' gleich Null sind. Nach den Werten von α' und α wird α'' direkt bestimmt.

Diese Berechnungen wurden von mir für eine Reihe von Kurven durchgeführt, leider aber nicht immer mit der gleichen Genauigkeit, da infolge von Nebenumständen nicht auf allen Aufnahmen die Lage des Anfangspunktes deutlich genug war.

So z. B. entspricht die Kurve I der Fig. 4 der Gleichung

$$v = 0{,}475\,t^{0{,}7333} - 0{,}08 \text{ (in Volt, die Zeit in } 10^{-2} \text{ sec)},$$

die Kreise aber sind experimentelle Punkte von einer der besten Aufnahmen, die für die Trägheit des Fadens, Nichtkonstanz des Potentials und die von der Schutzringoberfläche abfließenden Induktionsladungen (durch Subtrahieren von 0,095 Volt) korrigiert ist. Wie aus der Fig. 4 zu ersehen ist, legen sich alle experimentellen Punkte von 0,0009 sec an bis 0,17 sec ausgezeichnet auf die Kurve.

Die Kurven II und III der Fig. 4, die sich auf Quarz II und III beziehen, entsprechen den Formeln

$$v = 0{,}445\, t^{0{,}7161} - 0{,}15 \quad \text{und} \quad v = 0{,}285\, t^{0{,}8117} - 0{,}04;$$

durch · sind wie oben die experimentellen Punkte nach Einführung aller Korrektionen bezeichnet, wobei als Korrektion auf die Induktions-

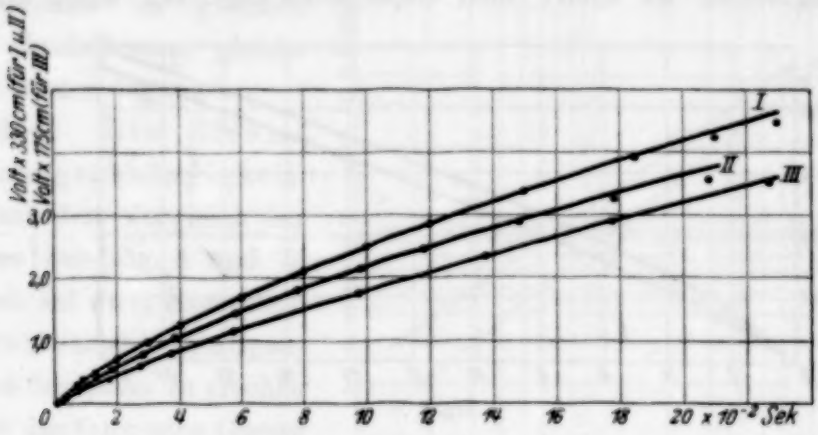


Fig. 4.

I und II. Quarz II $\begin{cases} v_1 = 0 \text{ Volt} \\ v_2 = 0 \text{ Volt} \\ v = 120 \text{ Volt} \end{cases}$ $t = 35^0$ C.

III. Quarz III $\begin{cases} v_1 = 0 \text{ Volt} \\ v_2 = 0 \text{ Volt} \\ v = 120 \text{ Volt} \end{cases}$ $t = 35^0$ C.

ladungen im ersten Falle gleich 0,11 Volt und im zweiten 0,04 Volt angenommen ist. Zuletzt sind in Fig. 5 noch zwei Beispiele solcher Berechnungen für Quarz II (Kurve I) und III (Kurve II) angeführt. Hier beziehen sich die experimentellen Punkte auf Ströme von 370 und 360 Volt, die jedoch, um den Vergleich mit den vorigen zu ermöglichen, durch $\frac{37}{12}$ bzw. 3 dividiert sind. Wir beobachteten hier abermals eine Übereinstimmung der Versuchsergebnisse mit der Formel (b), jedoch in einem bedeutend kleineren Zeitintervall. Die ersten Punkte legten sich auf die Kurve bei Anwendung einer Korrektion auf Induktionsladungen von 0,05 bzw. 0,03 Volt.

Dies Resultat gestattet uns, die Behauptung aufzustellen, daß in allen untersuchten Fällen in den Grenzen der Beobachtungsfehler in den ersten

10^{-2} sec, von 0,001 sec vom Moment des Anlegens der Spannung an, die Stromstärke im Quarz der Formel (b) genügt. Diese wichtige Tatsache wäre am leichtesten durch die Anwesenheit leichtbeweglicher Stromträger in Quarzkristallen zu erklären, wobei der Mechanismus des Anfangsstromes selbst mit den Vorstellungen von Gudden und Pohl über den sogenannten positiven Anteil des Primärstromes in Kristallen mit hohen Lichtbrechungsindizes* verglichen werden könnte. Die Angaben von Flechsig** zeigen, daß der allgemeine Charakter der zeitlichen Stromabnahme und die Schnelligkeit dieses Vorgangs in beiden Fällen die gleichen sind. Außerdem spricht für die Anwesenheit einer Zahl leichtbeweglicher Stromträger in Quarzkristallen noch jene Tatsache, daß der Anfangsstrom im Quarz dem Superpositionsprinzip nicht genügt,

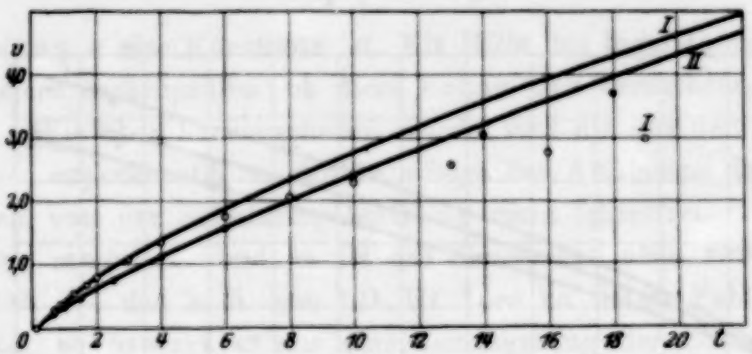


Fig. 5.

I. $v = 0{,}57\ t^{0{,}7100} - 0{,}15.$
II. $v = 0{,}385\ t^{0{,}8108} - 0{,}08.$

wovon unten die Rede sein wird. Und zuletzt kann noch als Hinweis auf die Teilung des Prozesses des Anfangsstroms in zwei Teile, einen schnellen und einen langsamen, der Verlauf der Anfangsstromkurve betrachtet werden. Die experimentellen Kurven der Fig. 5, die in logarithmischem Maßstab aufgetragen sind, erwecken nämlich den bestimmten Eindruck, daß die Stromstärke ungefähr 0,1 sec nach Anlegen der Spannung abermals der Gleichung (b) entspricht, jedoch mit anderen Werten der Koeffizienten (Fig. 6). Allerdings ist der Knick nicht genügend scharf ausgesprochen (Fig. 6), beim Vergleich aber dieser Werte mit den bei 120 Volt beobachteten kann man vermuten, daß bei größeren Spannungswerten diese Erscheinung ausgesprochener wäre. Leider erlaubten mir technische Einzelheiten meiner Versuchsanordnung nicht,

* B. Gudden und R. Pohl, ZS. f. Phys. **16**, 170, 1923; **31**, 651, 1925.
** W. Flechsig, ebenda **33**, 372, 1925.

diesbezügliche Versuche anzustellen. Als eine zweite Erklärung der raschen Stromabnahme in den Anfangsmomenten kann der Einfluß der durch die Inhomogenität des Kristalls bedingte Polarisationsbildung angenommen werden. Man kann sich vorstellen, daß die Bildung dieser Polarisation die Folge einer sehr unbedeutenden Umlagerung der Ionen ist und deshalb in kürzester Zeit möglich ist. Für solch eine Erklärung spricht noch jene Tatsache, daß eine analoge rasche zeitliche Anfangsstromabnahme auch in anderen Dielektrika* stattfindet, welche die Quarzeigentümlichkeiten (z. B. Abweichung vom Superpositionsprinzip) nicht aufweisen. Zuletzt ist es natürlich möglich, daß diese beiden Tatsachen, die den Charakter des Anfangsstromes im gleichen Sinne beeinflussen, gleichzeitig vorhanden sind.

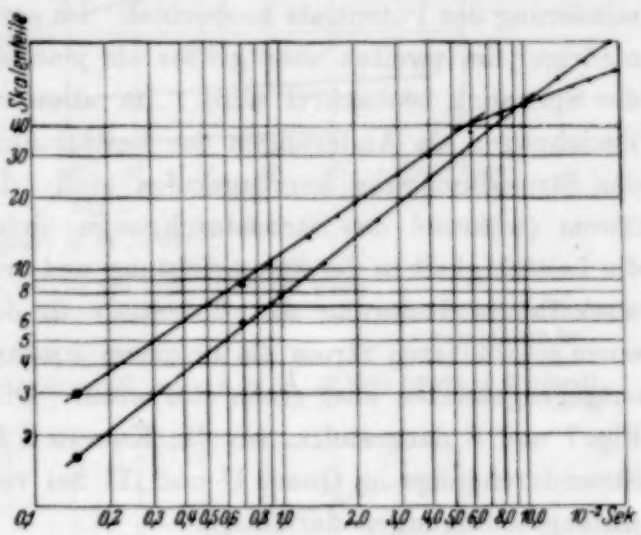


Fig. 6.

§ 4. Die Stromspannungsabhängigkeit. Wie aus dem Vergleich der Kurven der Fig. 4 und 5, die sich auf zwei Exemplare und zwei verschiedene Spannungen beziehen, zu ersehen ist, ist das Ohmsche Gesetz für den Anfangsstrom im Quarz nicht erfüllt. Diese Ergebnisse zeigen in Übereinstimmung mit meinen früheren Resultaten, daß die Stromstärke rascher ansteigt als die Spannung. In Zusammenhang mit der Darstellung des Anfangsstromes durch die Formel (b) kann dies als Nichtproportionalität des Koeffizienten a mit der Spannung gedeutet werden. n scheint, den angeführten Kurven gemäß, von der Spannung nicht abzuhängen. Von Interesse ist der Fall von Quarz II, wo der am Anfang des Prozesses relativ höhere, als der vom Ohmschen Gesetz geforderte Stromwert nach einer bestimmten Zeitspanne nachweisbar niedriger wird. Die auf verschiedene Momente nach Anlegen der Spannung bezogenen Charakteristiken des Kristalls werden darum je nach den Zeitwerten das Vorzeichen ihrer Krümmung ändern. Dies Resultat bestätigt die Annahme über die wahren Ursachen des „Sättigungsstromes" im Quarz, die ich in der vorigen Arbeit ausgesprochen hatte.

* N. Sallesky, ZS. f. Phys. **52**, 695, 1928.

§ 5. Das Superpositionsprinzip. Im Gegensatz zu den Angaben von Curie*, daß das Superpositionsprinzip für Quarz gültig ist, konnte ich feststellen, daß der Anfangsstrom im Quarz diesem Prinzip nicht genügt. Wenn man nach Anlegen der Spannung an den Kristall so lange wartet, bis der Stromwert bestimmt nicht mehr als 3 bis 4% des Anfangswertes beträgt und darauf sprunghaft die angelegte Spannung ändert, so wird die dabei beobachtete Änderung des Stromwertes derjenigen nicht gleich sein, die eine gleiche Änderung des Potentials an einem Kristall hervorruft, an dem vorher eine Spannung nicht angelegt worden war. Dies wird wie bei plötzlicher Erhöhung, so auch Verminderung des Potentials beobachtet. Im ersten Falle ist die Stromstärke niedriger, im zweiten aber größer als jene, die beim erstmaligen Anlegen der Spannung beobachtet wird. Im allgemeinen ist es einfacher, diese Beziehungen als Änderungen der Leitfähigkeit zu betrachten, die durch den Stromdurchgang hervorgerufen sind. Der den Kristall passierende Strom (während des Stromdurchgangs, siehe unten) verringert nämlich die Leitfähigkeit in der Stromrichtung und erhöht sie in entgegengesetzter, weshalb die Änderung des Potentials in der Richtung seines Anstiegs einen schwächeren Strom als in einem frischen Kristall hervorruft, in der entgegengesetzten aber einen stärkeren. Die Versuchsergebnisse sind in Fig. 7 und 8 dargestellt, wo die Kurven I bis V verschiedene Fälle des Stromdurchgangs im Quarz II und III bei verschiedenen Spannungen und Anfangsbedingungen darstellen.

Bei Betrachtung dieser Kurven kann man sich nicht des Eindruckes erwehren, daß im Quarz eine besondere Art von Stromträgern in verhältnismäßig geringer Anzahl vorhanden ist, die durch ihre Bewegungen zur Elektrode und Ansammlung an ihr eine Herabsetzung der Leitfähigkeit für eine Richtung und Erhöhung für die andere hervorrufen. Mit anderen Worten haben wir es hier genau mit demselben Sachverhalt zu tun, den Joffé** im Quarz beobachtete, jedoch mit dem Unterschied, daß, während die von Joffé beobachteten Erscheinungen Stunden dauerten, sie in unserem Falle unvergleichlich schneller verlaufen und dadurch auf eine ganz andere Ordnung der Beweglichkeit dieser Stromträger hinweisen. Einigermaßen unverständlich ist der Verlauf der Kurven III in ihrem Anfangsteil (größerer Stromwert als in einem frischen Kristall). Zur Erklärung dieser Erscheinung müssen detailliertere Vorstellungen über

* J. Curie, Ann. chim. phys. **18**, 216, 1889.

** Berichte des polytechnischen Instituts in Petrograd **24**, 100, 1915.

ihren Mechanismus herangezogen werden. Steht dies im Zusammenhang mit dem Verlauf der Charakteristik für Ströme von dieser Zeitperiode? Jedenfalls geben auch die Kurven V Hinweise darauf, daß wie für frische,

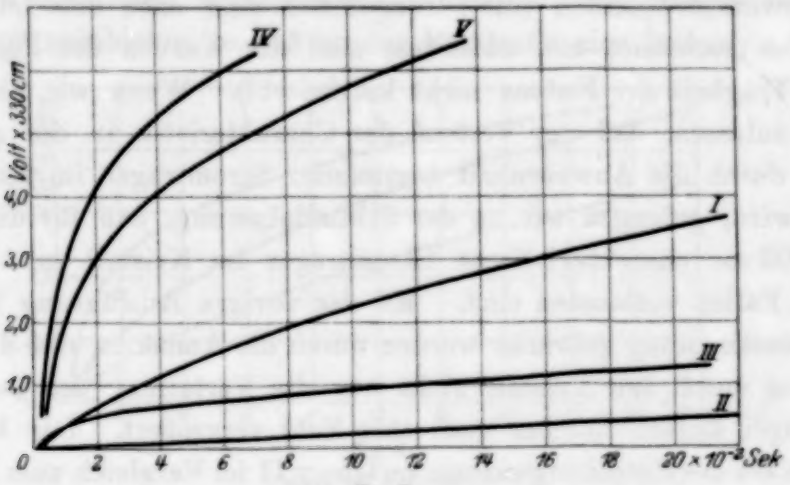


Fig. 7.

Quarz iI. $t = 35°$ C.

I. $v_1 = 0$; $v_2 = 0$; $v = 120$ Volt.
II. $v_1 = 120$ Volt während 1 min 15 sec; $v_2 = 120$ Volt; $v = 120$ Volt.
III. $v_1 = 120$ „ „ 1 „ 15 „ $v_2 = 120$ „ $v = 240$ „ , von welcher die Kurve II substahiert ist.
IV. $v_1 = 120$ „ „ 1 „ 15 „ $v_2 = 120$ „ $v = 0$ „
V. $v_1 = 120$ „ „ 1 „ 15 „ $v_2 = 120$ „ $v = -120$ Volt (durch 2 dividiert).

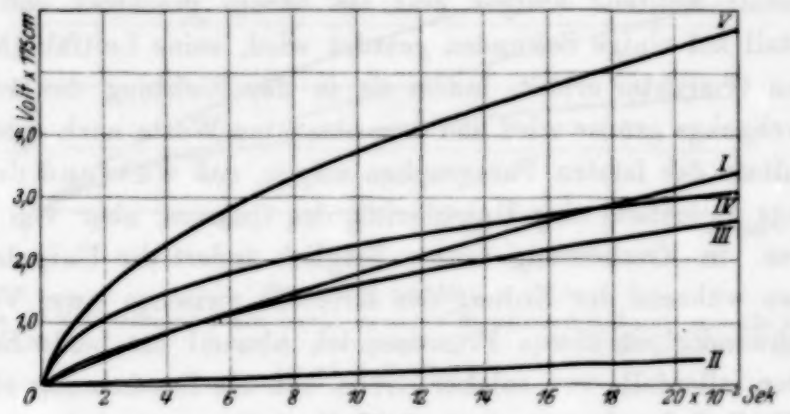


Fig. 8.

Quarz III. $t = 35°$ C.

I. $v_1 = 0$; $v_2 = 0$; $v = 120$ Volt.
II. $v_1 = 120$ Volt während 3 min 0 sec; $v_2 = 120$ Volt; $v = 120$ Volt.
III. $v_1 = 120$ „ „ 3 „ 0 „ $v_2 = 120$ „ $v = 240$ „ , von welcher die Kurve II substahiert ist.
IV. $v_1 = 120$ „ „ 3 „ 0 „ $v_2 = 120$ „ $v = 0$ „
V. $v_1 = 120$ „ „ 3 „ 0 „ $v_2 = 120$ „ $v = -120$ Volt (durch 2 dividiert).

so auch für vorbehandelte Kristalle ein und dieselbe Gesetzmäßigkeit zwischen Strom und Spannung besteht. Während nämlich im Quarz III der Strom von — 120 Volt zusammen mit dem Entladungsstrom (praktisch

ist in diesen Versuchen die Polarisation gleichfalls — 120 Volt, siehe oben) einen mehr als doppelten Strom als der Entladungsstrom ergibt, läßt sich im Quarz II die Gleichheit dieses Stromes mit dem doppelten Entladungsstrom beobachten (die Stromstärken sind nach dem Differentialquotienten berechnet und außerdem sind die Kurven der Fig. 7 und 8 auf die Trägheit des Fadens nicht korrigiert!). Wenn wir die Voraussetzung zulassen, daß der Verlauf der Charakteristik in der gegebenen Periode durch die Anwesenheit bestimmter Stromträger im Kristall bestimmt wird, gelangen wir zu der Schlußfolgerung, daß für die Periode 0 bis 0,02 sec charakteristische Stromträger im Kristall in beiden erörterten Fällen vorhanden sind. Mit der vorigen Ausführung kann dies in Übereinstimmung gebracht werden durch die Annahme, daß der Stromdurchgang durch den Kristall nicht nur die Verteilung der „schnellen" Stromträger ändert, sondern auch ihre Zahl vergrößert. Der bedeutend höhere Wert des Entladungsstroms im Quarz II im Vergleich zum Ladungsstrom, wie auch die Angaben über die Abhängigkeit des Leitfähigkeitswertes von der Vorgeschichte des Kristalls (siehe unten) sprechen gleichfalls zugunsten dieser Annahme.

§ 6. Der Einfluß des Stromes auf die Leitfähigkeit. In der vorigen Untersuchung (l. c.) habe ich gezeigt, daß, wenn durch einen Quarzkristall während einiger Zeit ein Strom geschickt und nachher der Kristall auf einige Sekunden geerdet wird, seine Leitfähigkeit einen unipolaren Charakter erhält, indem sie in der Richtung des vorherigen Stromdurchgangs größer wird und dem absoluten Werte nach erhöht wird. Die Resultate des letzten Paragraphen zeigen, daß während des Stromdurchgangs gleichfalls eine Unipolarität des Quarzes, aber von anderem Vorzeichen, in Erscheinung tritt. Folglich ändert die Unipolarität ihr Vorzeichen während der Erdung des Kristalls zwischen zwei Versuchen. Die Geschwindigkeit dieses Prozesses ist, obwohl für beide Exemplare verschieden, allenfalls von solcher Größe, daß die Erscheinung gleichfalls auf den Einfluß der Anwesenheit „schneller" Stromträger zurückgeführt werden kann. In Fig. 9 (Quarz II) und Fig. 10 (Quarz III) sind Kurven des Stromes von + 120 Volt und — 120 Volt in Kristallen dargestellt, die während einiger Zeit dem Einfluß des Stromes unterworfen waren und sodann für ungefähr 0,16 sec geerdet wurden. Die punktierte Kurve gibt zum Vergleich einen normalen Anfangsstrom von + 120 Volt. Die Fig. 11 illustriert den allgemeinen Charakter der Abhängigkeit der veränderten Leitfähigkeit von der Zeit für Ströme in beiden Richtungen.

Diese Änderung des Vorzeichens der Unipolarität sowie ihr Auftreten selbst kann leicht mit Hilfe der vorigen Vorstellungen auf folgende Weise erklärt werden. Beim Stromdurchgang sammeln sich an den Elektroden die früher vorhandenen „schnellen" Stromträger zusammen mit den neu gebildeten, so daß an der Elektrode eine Ladung entsteht*,

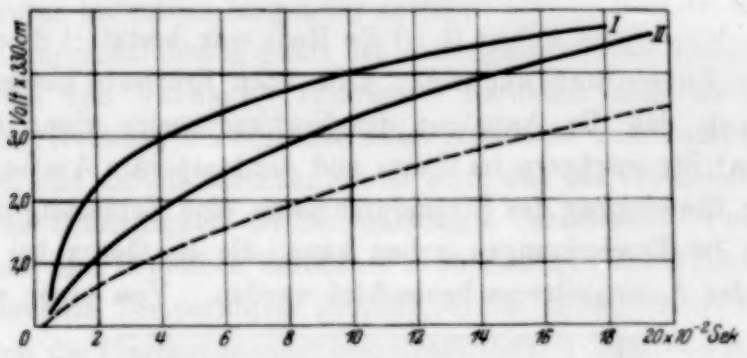


Fig. 9.

Quarz II. $t = 35°$ C.

I. $v_1 = 120$ Volt während 1 min 15 sec; $v_2 = 0$ Volt während 0,17 sec; $v = 120$ Volt.
II. $v_1 = 120$ „ „ 1 „ 15 „ $v_2 = 0$ „ „ 0,16 „ $v = -120$ Volt
(durch 2 dividiert).

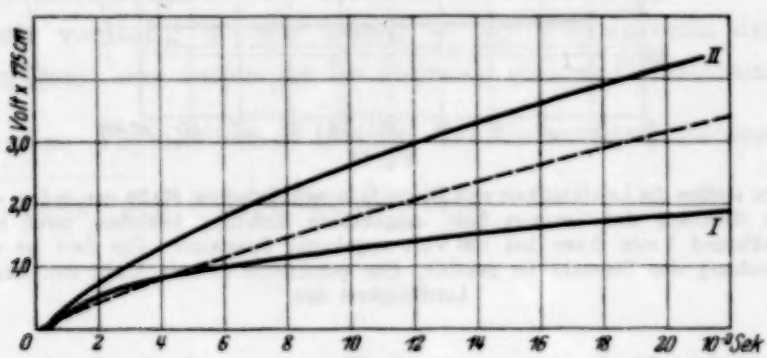


Fig. 10.

Quarz III. $t = 35°$ C.

I. $v_1 = 120$ Volt während 3 min 0 sec; $v_2 = 0$ Volt während 0,17 sec; $v = 120$ Volt.
II. $v_1 = 120$ „ „ 3 „ 0 „ $v_2 = 0$ „ „ 0,165 „ $v = -120$ Volt
(durch 2 dividiert).

die einen Teil der nach Stromdurchgang im Kristall sich bildenden Gegenspannung bedingen kann. Zu dieser Zeit wird der Kristall offenbar unipolar sein. Während der Erdung treibt das Gegenfeld diese Ladungen an die andere Elektrode; die Unipolarität der Leitfähigkeit ändert ihr Vorzeichen. Die allmähliche Verringerung der Gegenspannung zieht eine Diffusion der Träger im Innern des Kristalls nach sich, wo sie (teilweise

* Dafür, daß an den Elektroden eine Ansammlung sogar von Elektronen möglich ist, sprechen die Angaben von Gudden und Pohl, ZS. f. Phys. **16**, 170, 1923.

vielleicht auch an den Elektroden) von neuem rekombinieren, wobei die Leitfähigkeit nach einigen Stunden ihren früheren Wert annimmt. Die Übereinstimmung der Kurve, die derjenigen der Fig. 11 ähnlich ist, mit der Formel:

$$\sigma = \frac{\alpha}{1 + \beta t} + c,$$

wovon in der vorigen Arbeit (l. c.) die Rede war, bestätigt diese Annahme.

§ 7. Zusammenfassung. Alles oben Erörterte zusammenfassend sehen wird, daß die Annahme des Vorhandenseins einer Anzahl von „schnellen" Stromträgern im Quarz und der temporäre Anstieg ihrer Zahl unter der Einwirkung des Stromdurchgangs eine Erklärung der Mannigfaltigkeit der Erscheinungen geben kann, die im Quarz bei der Untersuchung des Anfangsstroms beobachtet werden. Von einer eingehenden

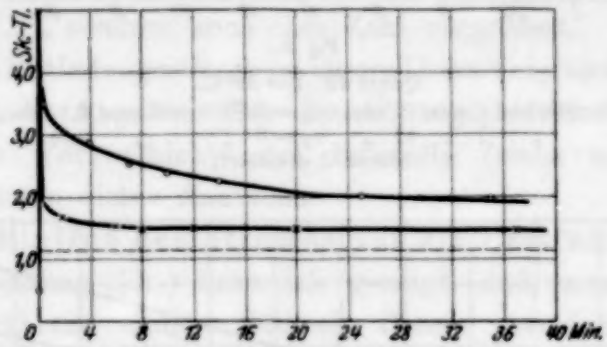


Fig. 11.

Die ○ und × stellen die Leitfähigkeit von Quarz II in willkürlichem Maße dar, indem die ○ bzw. × sich auf die Richtung des Stromes bzw. umgekehrte Richtung beziehen, nach einem Stromdurchgang während 1 min 5 sec bei 100 Volt angelegter Spannung. Die Zeit ist vom Moment der Unterbrechung des Stromes an gezählt. Die punktierte Gerade stellt den Normalwert der Leitfähigkeit dar.

Erörterung des Mechanismus dieser Vorgänge absehend, kann ich sie mit den von Gudden und Pohl in einigen Kristallen unter Einwirkung von Vorbestrahlung beobachteten Erscheinungen vergleichen. Die Frage nach der Natur dieser „schnellen" Stromträger bleibt offen und die Bezeichnung dieser Träger als „schnelle" stelle ich nicht in Zusammenhang mit dem unbekannten Wert ihrer Beweglichkeit, sondern ausschließlich mit den „schnellen" Änderungen des Stromes und anderem, als deren Ursache das Vorhandensein dieser Träger meiner Meinung nach anzusprechen ist.

Am Anfang meiner Untersuchungen war ich geneigt zu vermuten, daß die rasche zeitliche Stromabnahme im Quarz in unmittelbarer Nähe des Koordinatenanfangs gleichfalls von diesem Standpunkt aus zu erklären sei. Die Arbeit von Salessky aber über die Geschwindigkeit der Strom-

abnahme in Gips und Steinsalz (siehe oben) und die Versuchsergebnisse von Tank* mit Glas legten die Annahme nahe, daß es sich hier um eine Erscheinung von allgemeinerem Charakter handelt. Obwohl ich die Temperaturabhängigkeit des Anfangsstroms im Quarz nicht besonders untersuchte, habe ich dennoch vorläufige Angaben darüber, daß er mit der Temperatur bedeutend langsamer ansteigt, als der Reststrom, wodurch er an die Temperaturabhängigkeit des Anfangsstroms im Steinsalz gemäß den Angaben von Salessky erinnert. Natürlich muß auch mit der Möglichkeit gerechnet werden, daß diese Resultate rein zufälliger Natur sein können und darauf zurückzuführen sind, daß bei verschiedenen Temperaturen die Schnelligkeit der Stromabnahme verschieden ist und deshalb die nach ein und derselben Zeitdauer nach Anlegen der Spannung, aber bei verschiedenen Temperaturen gemessenen Stromwerte nicht in gleichem Grade durch die Gegenspannung beeinflußt sind, worauf von Akademiker Joffé hingewiesen wurde. Allerdings spricht die Tatsache, daß das „Temperaturverhalten" von Quarz und Steinsalz einander ähnlich ist, dafür, daß im untersuchten Gebiet — den Einfluß des Stromdurchgangs auf die Leitfähigkeit und die damit zusammenhängenden Erscheinungen wollen wir vorläufig beiseite lassen — der Mechanismus der Anfangsströme im Quarz und derjenigen im Steinsalz einiges Gemeinsame aufweist.

Kasan, Physikalisches Institut der Universität, September 1928.

* F. Tank, Ann. d. Phys. 48, 307, 1915.

Notiz zur Quantentheorie des Atomkerns.

Von **M. v. Laue** in Berlin-Zehlendorf.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 20. November 1928.)

Die Notiz stellt ein mathematisches Versehen in Gamows Veröffentlichung richtig und gibt beiden Konstanten der Geiger-Nuttalschen Beziehung eine physikalische Bedeutung.

Die Quantentheorie des Atomkerns, wie sie von Gurney und Condon* skizziert, von Gamow** näher ausgeführt ist, schlägt die erste Brücke von der Physik der Elektronenschale des Atoms zur Physik des Kernes. Ihr Grundgedanke, daß die Wellenmechanik die Überwindung selbst der höchsten Potentialschwellen im Prinzip zuläßt, ist so einleuchtend, und die Ableitung der bisher ganz geheimnisvollen Geiger-Nuttalschen Beziehung so überzeugend, daß man diese Arbeiten wohl den schönsten Erfolgen der neueren Physik zurechnen darf. Aber das Mathematische ist in Gamows Untersuchung nicht ganz in Ordnung. Damit sich nicht Fehlschlüsse in der Literatur festsetzen, sei die folgende Richtigstellung gestattet.

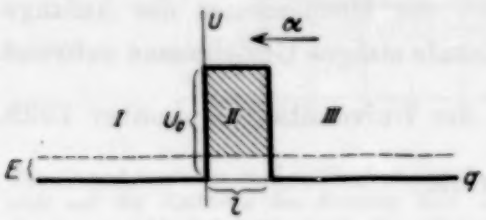


Fig. 1.

1. Gamow behandelt zunächst die Spiegelung einer Schrödingerwelle bei senkrechtem Einfall auf eine planparallele (im Sinne von Fig. 1) „rechteckige" Potentialschwelle. Da wir übersichtlichere Formeln brauchen, als die seinen, sei hier die Wiederholung erlaubt.

Im Gebiet I soll der Ansatz

$$\psi_{\mathrm{I}} = A e^{ikq} \quad \text{mit} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{2mE} \tag{1}$$

die Welle darstellen, innerhalb der Potentialschwelle (Gebiet II):

$$\psi_{\mathrm{II}} = B_+ e^{k'q} + B_- e^{-k'q} \quad \text{mit} \quad k' = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{2m(U'-E)}, \tag{2}$$

und im Gebiet III:

$$\psi_{\mathrm{III}} = C_+ e^{ikq} + C_- e^{-ikq}. \tag{3}$$

---

* R. W. Gurney und E. U. Condon, Nature **122**, 439, 1928.

** G. Gamow, ZS. f. Phys. **51**, 204, 1928.

Die Konstanten A, B_+, B_-, C_+ und C_- werden im allgemeinen komplex sein; der Schrödingerschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U)\psi = 0 \tag{4}$$

ist überall wegen der Wahl der Konstanten k und k' genügt. Da U_0 nach Voraussetzung größer als E ist, sind k und k' reell.

Die Grenzbedingungen, Stetigkeit für ψ und $\frac{d\psi}{dq}$ fordernd, ergeben

$$B_+ = \tfrac{1}{2}A\left(1 + i\frac{k}{k'}\right), \quad B_- = \tfrac{1}{2}A\left(1 - i\frac{k}{k'}\right) \tag{5}$$

und mit den Abkürzungen:

$$S = \tfrac{1}{2}\left(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k}\right), \quad D = \tfrac{1}{2}\left(\frac{k}{k'} - \frac{k'}{k}\right), \tag{6}$$

$$C_+ e^{ikl} = A(\mathfrak{Cof}\, k'l + iD\,\mathfrak{Sin}\, k'l), \quad C_- e^{-ikl} = iAS\,\mathfrak{Sin}\, k'l. \tag{7}$$

Die Erhaltung der Teilchenzahl spricht die Folgerung aus (7) aus:

$$|C_+|^2 - |C_-|^2 = |A|^2. \tag{8}$$

Man sieht ferner daran, daß die gespiegelte Welle im Raum III schwächer ist als die einfallende, weil $|C_+| > |C_-|$. Das Verhältnis $\frac{|C_-|^2}{|C_+|^2}$ gibt das Spiegelungsvermögen R, $\frac{|A|^2}{|C_+|^2}$ die Durchlässigkeit G der Potentialschwelle an. Im Grenzfall, daß k'/k unendlich groß ist, wird $R = 1$, $G = 0$; ferner $C_+ e^{ikl} = -C_- e^{-ikl}$, somit an der Grenzfläche $q = 1$ $\psi_{III} = 0$.

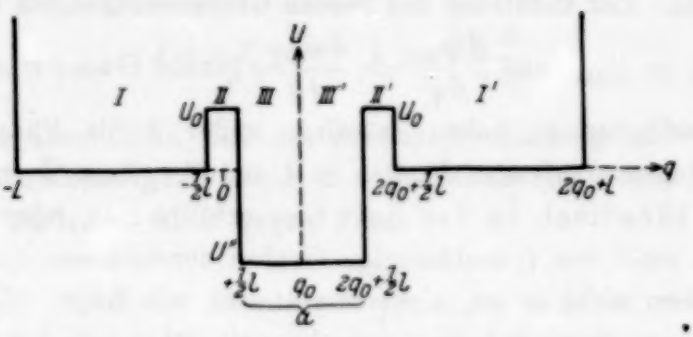


Fig. 2.

Verschwinden von ψ ist also die Grenzbedingung für eine unendlich hohe und deshalb vollkommen spiegelnde Potentialschwelle.

2. Unsere Übereinstimmung mit Gamow setzt sich zunächst noch fort, wenn wir für den Fall der in Fig. 2 dargestellten Doppelschwelle (wir setzen aber für den Augenblick die potentielle Energie U in III wie in I

gleich Null voraus) für den links von der Mittelebene des Ganzen liegenden Bereich, bestehend aus den Gebieten I, II, III, den obigen Ansatz beibehalten und ihn für die rechts liegenden Räume III′, II′, I′ durch einen entsprechenden zu ergänzen suchen, der in I′ eine nach rechts laufende ebene Welle darstellt. In III′ finden wir dabei auch zwei Wellen, von denen die eine, nach $+q$ laufende die stärkere ist. Soll an der Mittelebene, der Grenze von III und III′, keine Unstetigkeit liegen, so müssen die in III und III′ nach rechts laufenden Wellen identisch sein, ebenso die nach links laufenden. Das aber ist unmöglich, weil in III die nach links laufende, in III′ die nach rechts laufende die stärkere ist. Ein solcher Ansatz ist also unbrauchbar.

Und das ist nach der optischen Analogie anschaulich genug. Sollen von einer planparallelen Platte, die der Doppelschwelle entspräche, nach beiden Seiten Wellen ausgehen, ohne daß wenigstens von der einen Seite eine einfällt, so ist der Zustand unmöglich stationär.

3. Gamow sucht Abhilfe, indem er in die Schrödingergleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - \frac{4\pi i m}{h}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U n = 0$$

mit dem Ansatz

$$u = \psi(q)\, e^{-\frac{1}{2}\lambda t}\, e^{\frac{2\pi i}{h} E t} \tag{9}$$

eingeht. Da danach E durch den komplexen Wert $E + \frac{ih}{4\pi}\lambda$ ersetzt ist, werden nach 1. und 2. auch k und k' komplex, und zwar sind wegen der Kleinheit von λ die hinzukommenden imaginären Summanden zu λ proportional. Zur Erfüllung der beiden Grenzbedingungen an der Mittelebene, $\psi_{\mathrm{III}} = \psi_{\mathrm{III}'}$ und $\frac{d\psi_{\mathrm{III}}}{dq} = \frac{d\psi_{\mathrm{III}'}}{dq}$, glaubt Gamow nun zwei Konstanten verfügbar zu haben, nämlich außer λ die Phasendifferenz α zwischen den auslaufenden Wellen in I und I′. Jene Grenzbedingungen sind aber identisch in der Zeit t zu erfüllen; es wäre merkwürdig, wenn dazu zwei von t unabhängige Größen ausreichten.

Daß dem nicht so ist, sieht man leicht wie folgt. Da es sich um gedämpfte periodische Schwingungen handelt, führt jede der beiden Grenzbedingungen auf eine Gleichung von der Form:

$$e^{-\frac{1}{2}\lambda t}\left[a\cos\left(\frac{2\pi}{h} E t\right) + b\sin\left(\frac{2\pi}{h} E t\right)\right] = 0.$$

Eine solche Gleichung ist nur dann identisch in t erfüllt, wenn die beiden in ihr stehenden Koeffizienten a und b verschwinden. Im ganzen sind

also vier von t freie Bedingungen zu befriedigen, und dazu reichen die zwei reellen Konstanten λ und α nicht aus. Außerdem zeigt das Versagen des Ansatzes (9) die folgende Betrachtung.

4. Nehmen wir an, bis zur Zeit $t = 0$ wären die beiden Potentialschwellen in Fig. 2 unendlich hoch, d. h. k'/k unendlich groß. Dann hätten wir zwischen ihnen, in III und III', zwei hin und her laufende Wellen, von denen wir ohne wesentliche Herabsetzung der Allgemeinheit annehmen dürfen, sie wären monochromatisch und gleich stark. Zur Zeit $t = 0$ aber sollen sich beide Potentialschwellen plötzlich erniedrigen, so daß der in Abschnitt 1 betrachtete Vorgang der Spiegelung und Brechung an ihnen einsetzt. Dann tritt zur Zeit 0 in den Raum I eine Welle von der Intensität J_0; sie bricht aber nach der Zeit τ, welche eine Welle zur Durchlaufung des Abstandes $a = 2q_0 - l$ der beiden Schwellen braucht, ab und wird ersetzt durch eine von der geringeren Intensität $R \cdot J_0$, wo R wie oben das Reflexionsvermögen bedeutet. Denn nunmehr gelangt eine Welle zum Austritt, die an der anderen Schwelle eine Spiegelung erlitten hat. Von der Zeit 2τ an ist die Intensität dann gleich $R^2 J_0$, weil jetzt eine schon zweimal gespiegelte Welle herauskommt usw. Für den Raum I' gilt dasselbe. Es wäre also die Intensität als Funktion der Zeit durch eine Stufenkurve oder mathematisch durch das Gleichungssystem

$$J = J_0 R^n = J_0 e^{n \log R}, \quad \text{wenn } n\tau < t < (n+1)\tau,$$

darzustellen. Da die Zeit τ in allen Fällen unbeobachtbar klein ist, ergäbe die Beobachtung dann freilich

$$J = J_0 e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\log R}{\tau}.$$

Das bedeutet aber nicht, daß der Ansatz (9) zulässig ist. Führen wir statt R die Durchlässigkeit $G = 1 - R$ ein, so findet man, da in den betrachteten Fällen G klein gegen 1 ist:

$$\lambda = \frac{G}{\tau}. \tag{10}$$

Setzt man $\tau = \frac{a}{v}$ und die Gruppengeschwindigkeit der Schrödingerwelle in III und III', indem wir diesen Gebieten das Potentialniveau 0 beilegen,

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}},$$

berechnet man ferner $G = \frac{|A|^2}{|C_+|^2}$ nach Abschnitt 1 zu

$$G = \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2 k' l + D^2 \mathfrak{Sin}^2 k' l},$$

so folgt für große Werte von $k' l$ aus (10):

$$\lambda = \frac{8}{a} \frac{E^{3/2}}{(2m)^{1/2}} \frac{U_0 - E}{U_0^2} e^{-\frac{4\pi}{h}\sqrt{2m(U'-E)}\,l}. \tag{11}$$

In dem wesentlichen Faktor, der Exponentialfunktion, stimmt dies Ergebnis mit Gamows überein.

Doch scheint uns die Verwendung der Formeln aus Abschnitt 1 nur dann gerechtfertigt, wenn man den Abstand a der beiden Schwellen als groß gegen die Wellenlänge $\frac{2\pi}{k}$ betrachten darf. Die Spiegelung eines Wellenzuges von nur wenigen Wellenlängen wird etwas anderen Gesetzen genügen. Für die Übertragung auf die Vorgänge im Atomkern aber ist gerade der Fall wichtig, daß a selbst von der Größenordnung einer Wellenlänge ist. Dann muß das folgende Verfahren eingreifen.

5. Man denke sich in Fig. 2 bei $q = -L$ und bei $q = 2q_0 + L$, also in gleichen Abständen von der Mittelebene M, total spiegelnde Potentialschwellen, lege den Gebieten III und III' der Allgemeinheit wegen das negative Potential U'' bei und untersuche die Eigenschwingungen des zwischen ihnen liegenden Gebietes. L sei sehr groß gegen q_0 und l. Wegen der Symmetrie haben diese in der Mittelebene M, bei $q = q_0$, entweder einen Knoten oder einen Bauch und sind im ersten Falle antisymmetrisch, im zweiten symmetrisch zu M. Man hat also die Schrödingergleichung (4) nur für den links von M liegenden, aus I, II und III bestehenden Bereich unter Berücksichtigung der Stetigkeitsbedingungen für ψ und $\frac{d\psi}{dq}$ an den Unstetigkeitsflächen für U ($q = \pm {}^1/_2 l$) und der folgenden Grenzbedingungen zu lösen:

$$\psi = 0 \qquad \text{für } q = -L, \tag{12}$$

und entweder (Fall a):

$$\psi = 0 \qquad \text{für } q = q_0, \tag{13a}$$

oder (Fall b):

$$\frac{d\psi}{dq} = 0 \qquad \text{für } q = q_0. \tag{13b}$$

Dazu dient der Ansatz:

$$\left.\begin{aligned}
\psi_{\mathrm{I}} &= A\,(e^{i(kq+\beta)} + e^{-i(kq+\beta)} && \text{im Gebiet I}\\
\psi_{\mathrm{II}} &= B_+ e^{k'q} + B_- e^{-k'q} && \text{„ „ II}\\
\psi_{\mathrm{III}} &= C_+ e^{ik''q} + C_- e^{-ik''q} \quad \left(k'' = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(E-U'')}\right) && \text{„ „ III}
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Die Bedingungen für $q = +\frac{1}{2}l$ und $q = -\frac{1}{2}l$ verknüpfen die Konstanten folgendermaßen miteinander. Zunächst findet sich

$$\left.\begin{aligned}
B_+ e^{-\frac{1}{2}k'l} &= \tfrac{1}{2}A\left[e^{-i(\frac{1}{2}kl-\beta)}\left(1+i\frac{k}{k'}\right) + e^{i(\frac{1}{2}kl-\beta)}\left(1-i\frac{k}{k'}\right)\right],\\
B_- e^{+\frac{1}{2}k'l} &= \tfrac{1}{2}A\left[e^{-i(\frac{1}{2}kl-\beta)}\left(1-i\frac{k}{k'}\right) + e^{i(\frac{1}{2}kl-\beta)}\left(1+i\frac{k}{k'}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Sodann setze man:

$$1 + i\frac{k}{k'} = \varrho_1 e^{i\vartheta_1}, \qquad 1 + i\frac{k'}{k''} = \varrho_2 e^{i\vartheta_2},$$

und findet so:

$$C_+ e^{\frac{1}{2}ik''l} = \frac{\varrho_1\varrho_2}{2}A\left\{e^{k'l}e^{i\vartheta_2}\cos\left(\tfrac{1}{2}kl-\beta-\vartheta_1\right) + e^{-k'l-i\vartheta_2}\cos\left(\tfrac{1}{2}kl-\beta+\vartheta_1\right)\right\}, \tag{16}$$

$$C_- e^{-\frac{1}{2}ik''l} = \frac{\varrho_1\varrho_2}{2}A\left\{e^{k'l}e^{-i\vartheta_2}\cos\left(\tfrac{1}{2}kl-\beta+\vartheta_1\right) + e^{-k'l}e^{i\vartheta_2}\cos\left(\tfrac{1}{2}kl-\beta+\vartheta_1\right)\right\}. \tag{17}$$

Danach ist $|C_+| = |C_-|$, wir haben also in III wie in I eine stehende Welle.

Die Grenzbedingung (12) ergibt:

$$\beta - kL = \pm\tfrac{1}{2}\pi, \tag{18}$$

und für den Fall a) folgt aus (13a):

$$\begin{aligned}
&e^{k'l}\cos\left(\tfrac{1}{2}kl-\beta-\vartheta_1\right)\cos\left[k''\left(q_0-\tfrac{1}{2}l\right)+\vartheta_2\right]\\
&+ e^{-k'l}\cos\left(\tfrac{1}{2}kl-\beta+\vartheta_1\right)\cos\left[k''\left(q_0-\tfrac{1}{2}l\right)-\vartheta_2\right] = 0,
\end{aligned} \tag{19a}$$

für den Fall b) entsprechend aus (13b):

$$\begin{aligned}
&e^{k'l}\cos\left(\tfrac{1}{2}kl-\beta+\vartheta_1\right)\sin\left[k''\left(q_0-\tfrac{1}{2}l\right)+\vartheta_2\right]\\
&+ e^{-k'l}\cos\left(\tfrac{1}{2}kl-\beta+\vartheta_1\right)\sin\left[k''\left(q_0-\tfrac{1}{2}l\right)-\vartheta_2\right] = 0.
\end{aligned} \tag{19b}$$

Die Elimination von β aus (18) und (19a) oder (19b) ergibt, da k, k' und k'' Funktionen von E sind, die Gleichung zur Berechnung der Eigenwerte E_n. Nach (19a) und (19b) sind in beiden Gleichungen (17) die Summanden mit $e^{k'l}$ und mit $e^{-k'l}$ im allgemeinen von derselben Größenordnung. Infolgedessen haben im allgemeinen die Eigenschwingungen

in den Gebieten I und III Amplituden gleicher Größenordnung, ganz im Gegensatz zu den in Abschnitt 1 geschilderten Verhältnissen. Dort fand sich freilich auch in I nur eine fortschreitende Welle.

Hat man so die Eigenwerte E_n und die zugehörigen Eigenfunktionen ψ_n ermittelt, so läßt sich die Reihe

$$u = \sum_n a_n \psi_n(q)\, e^{\frac{k\pi i}{h} E_n t}$$

in bekannter Weise jedem Anfangszustand anpassen, z. B. auch dem, daß zur Zeit 0 eine Schwingung nur in den Räumen III und III′ vorhanden ist. Eine Durchführung dieser Rechnung erscheint kaum lohnend.

6. Das in Abschnitt 5 Ausgeführte läßt sich unschwer auf den kugelsymmetrischen Fall übertragen, in welchem die potentielle Energie U an zwei konzentrischen Kugelflächen sprungweise ihren Wert ändert, im übrigen konstant bleibt. Man hat dann die Funktion $\psi(q)$ der Schrödingergleichung zu ersetzen durch $\frac{1}{r} f(r)$; für $f(r)$ gilt dann wieder die Gleichung (4), nur daß die Variable r den Abstand vom Symmetriezentrum bedeutet. Bei $r = 0$ muß $f = 0$ sein, damit $\psi = \frac{1}{r} f$ endlich bleibt; und denkt man sich eine sehr große total spiegelnde Kugel als äußere Begrenzung, so hat man die Funktion f aus denselben Bedingungen zu ermitteln, wie die Funktion ψ im vorigen Abschnitt, Fall a). Für eine Eigenschwingung $\psi = f/r$ wird also f innerhalb und außerhalb der Schwelle im allgemeinen von der gleichen Größenordnung sein. Ein paar allgemeine Bemerkungen aber mögen noch angefügt werden. Die Beziehung (10) bleibt jedenfalls erhalten. Denn denken wir uns bis zur Zeit 0 das Innere der Schwelle vollkommen von der Außenwelt abgeschlossen, so haben wir im genannten Zeitpunkt (da wir nur kugelsymmetrische Wellen in Betracht ziehen) zwei Kugelwellen im Innern, eine divergierende und eine konvergierende. Wird von $t = 0$ an diesen der teilweise Durchgang durch die Schwelle gestattet, so muß auch hier nach Ablauf einer gewissen Zeit τ, welche mit der Durchlaufungszeit des Innern zusammenhängt, die Intensität der austretenden Welle um einen von der Durchlässigkeit der Potentialschwelle abhängigen Faktor gesunken sein. Damit bekommen aber die beiden Konstanten in der Gleichung

$$\log \lambda = a + bE$$

eine physikalische Bedeutung. Dies aber ist die Form, in der Gamow die Geiger-Nuttalsche Beziehung benutzt.

Weiter ist nach dieser Theorie der radioaktive Zerfall umkehrbar; es können Alphateilchen aus dem Äußeren in den Kern eintreten. Der Beweis dafür liegt in der Existenz der in Abschnitt 5 und 6 besprochenen Eigenfunktionen, deren jede eine stationäre Verteilung von Alphateilchen zwischen dem Innern und dem Außenraum bedeutet. Die von Nernst* in die kosmische Physik eingeführte Hypothese, daß die radioaktiven Elemente sich unter geeigneten Verhältnissen wieder neu bilden, findet damit eine beachtenswerte Stütze. Freilich umfaßt das hier Ausgeführte nicht die auf Entsendung eines Alphateilchens vielfach folgende Gammastrahlemission. Insofern ist natürlich auch der Beweis für diese Umkehrbarkeit noch unvollständig, selbst wenn sich das Bild der Überwindung einer Potentialschwelle sonst zur Darstellung des Atomzerfalls bewährt. Weiter folgt aus der obigen Bemerkung, daß die Funktion $f = r\psi$, wenn ψ eine Eigenschwingung darstellt, innerhalb der Schwelle und außerhalb der Größenordnung nach gleiche Werte besitzt, daß im Gleichgewichtszustand, wenn also gleich häufig ein Teilchen die Schwelle von außen überwindet, wie von innen, die Dichte dieser Teilchen innerhalb und außerhalb einigermaßen gleich groß sein muß. Das sind aber Verhältnisse weit entfernt von allem, was wir kennen.

Berechnet man die Koeffizienten a_n der angegebenen Reihe für die ebenen Verhältnisse von Abschnitt 5 oder auch für die kugelsymmetrischen dieses Abschnitts, so hat man bekanntlich Integrale von der Form

$$\int u_0 \psi_n \, dq \quad \text{bzw.} \quad \int r^2 u_0 \psi_n \, dr$$

auszuführen. Umfaßte der Integrationsbereich, also das Innere der Potentialschwelle, viele Wellenlängen, und enthielte die Anfangsverteilung u_0 nur Schwingungen einer Wellenlänge, so würden auch von diesen Integralen und den entsprechenden Koeffizienten a_n nur diejenigen einigermaßen groß, deren Funktionen ψ_n im Innern eine annähernd gleiche Wellenlänge haben. Dem ist aber keineswegs so; im Gegenteil wird der in Betracht kommende Wertebereich von k'' (k'' ist 2π/Wellenlänge) recht erheblich sein. Andererseits zeigt die Erfahrung, daß die Energie aller vom gleichen Element entsandten Alphateilchen nur ganz geringe Schwankungen aufweist.

---

* W. Nernst, Das Weltgebäude im Licht der neueren Forschung, Berlin 1921.

Auch dies vermag die Quantenmechanik zu erklären. Aus der Formel (14) für k'' folgt nämlich, wenn wir unter k_1'' und k_2'' die zu E_1 und $E_2 < E_1$ gehörenden Werte verstehen:

$$\frac{k_1''}{k_2''} = \sqrt{\frac{E_1 - U''}{E_2 - U''}} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - U''/E_1}{1 - U''/E_2}}.$$

Die zweite der rechts stehenden Wurzeln ist notwendig größer als 1, so daß stets

$$\frac{E_1}{E_2} < \left(\frac{k_1''}{k_2''}\right)^2$$

ist. Der Unterschied beider Quotienten kann sogar beliebig groß werden, wenn nämlich U'' nur wenig unterhalb des Wertes E_2 liegt. Dann kann E_1/E_2 fast gleich 1 sein, obwohl k_1''/k_2'' eine große Zahl ist. In dieser Art muß man sich wohl die beim Atomkern vorliegenden Energieniveaus denken.

Bemerkung über die Freiheitsgrade in der Wellenmechanik.

Von V. S. Vrkljan in Zagreb.

(Eingegangen am 31. Oktober 1928.)

Es werden zwei Beispiele in der Undulationsmechanik gezeigt (Wasserstoffatom ohne und mit Mitbewegung des Kernes), wo man zur Vereinfachung der Rechnung die Bewegungsfreiheit des Systems stärker beschränkt annehmen darf, als sie in Wirklichkeit beschränkt ist.

Nach E. Schrödinger* ist es bei der Anwendung der Undulationsmechanik nicht gestattet, sich zur Vereinfachung der Rechnung die Bewegungsfreiheit des Systems stärker beschränkt zu denken, als sie wirklich beschränkt ist, selbst wenn man auf Grund der Integrale der mechanischen Gleichungen weiß, daß das System bei der einzelnen Bewegung von bestimmten Freiheiten nicht Gebrauch macht.

Obzwar dies gültig ist (wir brauchen z. B. nur an die verschiedene Quantelung des Rotators mit raumfester und freier Achse zu denken), so scheint es, als ob es doch möglich ist, in einigen Fällen zur Vereinfachung der Rechnung sich die Bewegungsfreiheit des Systems stärker beschränkt zu denken, als sie wirklich beschränkt ist. Der Zweck dieser Abhandlung ist, eben dies an zwei Beispielen zu zeigen.

Als erstes Beispiel nehmen wir das Keplerproblem. Wir wissen, daß dies Problem von E. Schrödinger in seiner ersten Abhandlung über die Wellenmechanik behandelt wurde, und zwar als ein Problem von drei Freiheitsgraden. Nach dem, was oben erwähnt ist, könnte man meinen, daß es nicht zulässig sei, dies Problem als ein Problem von minder als drei Freiheitsgraden zu behandeln. Wir werden aber sofort sehen, daß es doch möglich ist, dies Problem als ein Problem von einem Freiheitsgrad zu betrachten, etwas Ähnliches, wie dies Problem von N. Bohr** in seiner ersten Abhandlung behandelt wurde.

Die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung für das Elektron als starren Rotator mit raumfester Achse lautet (r bedeutet die Entfernung des Rotators von der Achse):

$$\frac{1}{2\,m_1 r^2}\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)^2 + C - \frac{Ze^2}{r} = E; \qquad (1)$$

---

* E. Schrödinger, Ann. d. Phys. (4) **79**, 489, 1926; namentlich S. 520. Abhandlungen 1927, S. 48.

** N. Bohr, Phil. Mag. **26**, 1—25, 1913. Abhandlungen 1913, S. 4.

hier ist e die Ladung, m_1 die Masse des Elektrons (des Rotators), Ze die Ladung des Kernes, welcher im Raume als ruhend gedacht wird, E die Gesamtenergie und $C - \frac{Ze^2}{r}$ die potentielle Energie des Systems, welche in unserem Falle, da es sich um den starren Rotator handelt, konstant ist. Dabei bedeutet C die potentielle Energie des Elektrons in der unendlich großen Entfernung vom Kerne. Dadurch wird erreicht, daß sowohl die potentielle als auch die Gesamtenergie nicht negativ gezählt wird, wie das sonst üblich ist*.

Vor dem Übergang zu der Schrödingerschen Forderung (d. h. zu dem Variationsproblem) werden wir noch die Hamiltonsche partielle Gleichung etwas ändern. Zuerst werden wir die erwähnte Gleichung schreiben

$$\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)^2 - (E - E_{\text{pot}})\, 2\, m_1\, r^2 = 0; \tag{2}$$

weiter benutzen wir eine Gleichung, welche von J. M. Burgers und von A. Sommerfeld** auf Grund einer Bemerkung von N. Bohr*** abgeleitet ist. Es gilt nämlich im Coulombschen Felde

$$E_{\text{pot}} = C - 2\, E_{\text{kin}}. \tag{3}$$

Diese Gleichung ist im allgemeinen nur im Zeitmittel gültig; in unserem Falle aber, wo es sich um den starren Rotator (r = konst) handelt, wird sie in jedem Moment gültig sein. Da weiter in unserem Falle

$$E_{\text{pot}} = C - \frac{Ze^2}{r} \tag{4}$$

ist, so ergibt sich durch die Anwendung dieses Ausdruckes für E_{pot} auf die Gleichung (3)

$$r = \frac{Ze^2}{2\, E_{\text{kin}}}. \tag{5}$$

In dieser Gleichung für r können wir die kinetische Energie E_{kin} durch den Ausdruck ersetzen, in welchem die Gesamtenergie E vorkommt. Denn aus der Gleichung (3) ergibt sich

$$E_{\text{kin}} = C - E, \tag{6}$$

---

* Vgl. z. B.: A. Sommerfeld, Atombau, 2. Aufl., 1921, S. 243; 3. Aufl., 1922, S. 263; 4. Aufl., 1924, S. 109.

** A. Sommerfeld, Atombau, 2. Aufl., 1921, S. 472—473.

*** N. Bohr, Phil. Mag. **26**, 1—25, 1913; namentlich S. 24. Abhandlungen 1921, S. 24.

und so wird unser Ausdruck (5) für r endlich

$$r = \frac{Z e^2}{2(C - E)}. \tag{7}$$

Wenn man für r in die Gleichung (2) den Ausdruck aus der Gleichung (7) substituiert und beachtet, daß in (2) der Ausdruck $E - E_{\text{pot}}$ die kinetische Energie E_{kin} des Systems bedeutet, welche nach der Gleichung (6) gleich $C - E$ ist, so geht die Gleichung (2) in die Gleichung

$$\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)^2 - \frac{m_1 Z^2 e^4}{2(C - E)} = 0 \tag{8}$$

über.

Wenn wir nun jetzt weiter mit E. Schrödinger

$$S = \frac{h}{2\pi} \ln \psi \tag{9}$$

einsetzen und dann

$$\delta \int \left[\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2 - \frac{2\pi^2 m_1 Z^2 e^4}{h^2 (C - E)} \psi^2\right] d\varphi = 0 \tag{10}$$

fordern, wo sich das Integral über den ganzen Konfigurationenraum erstreckt, so lautet die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung unseres Variationsproblems

$$\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + \frac{2\pi^2 m_1 Z^2 e^4}{h^2 (C - E)} \psi = 0. \tag{11}$$

Die Eigenwerte dieser Gleichung sind

$$\frac{2\pi^2 m_1 Z^2 e^4}{h^2 (C - E)} = n^2, \tag{12}$$

wo n eine (beliebige) ganze Zahl bedeutet (wegen der Forderung der Eindeutigkeit und Stetigkeit von ψ im Bereich der Koordinate φ).

Wir sind also endlich zu den bekannten Bohrschen Energiewerten

$$E = C - \frac{2\pi^2 m_1 Z^2 e^4}{h^2 n^2} \tag{13}$$

gekommen und haben jetzt noch zu erwähnen, daß man zu demselben Resultat auch so kommen kann, wenn man die Gleichungen (6) und (7) direkt und die Schrödingersche undulationsmechanische Gleichung des Rotators mit raumfester Achse

$$\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + \frac{8\pi^2 m_1 r^2}{h^2} (E - E_{\text{pot}}) \psi = 0 \tag{14}$$

anwendet.

Wir wenden uns jetzt dem zweiten Beispiel zu. Es handelt sich nämlich um die (kreisförmige) Mitbewegung des Kernes*. Nach der klassischen Mechanik bleibt bekanntlich die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung (1) der Form nach erhalten, nur muß man

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{15}$$

statt m_1 in derselben Gleichung schreiben; r bedeutet wie früher die (konstante) Entfernung des Elektrons von dem Kerne [dessen Masse in der Gleichung (15) mit m_2 bezeichnet ist]. Aber auch die Gleichungen (3) und (4) bleiben erhalten und deswegen die Gleichungen (8) und (10) bis (13), nur muß man überall m_1 durch μ ersetzen.

Zusammenfassung. Die Bewegung des Elektrons im Wasserstoffatom (ohne Berücksichtigung der Mitbewegung des Kernes) hat drei Freiheitsgrade, jedoch braucht man auch in der Undulationsmechanik das Problem nicht als ein Problem aller drei Freiheitsgrade zu behandeln; man kann die Bohrschen Energiewerte ableiten, wenn man das Problem auch als ein Problem mit einem Freiheitsgrad behandelt.

Wenn man die Mitbewegung des Kernes berücksichtigt, so hat das Problem im allgemeinen sechs Freiheitsgrade; jedoch kann man das Problem, wie oben gezeigt wurde, auf ein Problem mit einem Freiheitsgrad zurückführen, um zu den befriedigenden Resultaten (d. h. zu den bekannten Energieniveaus) zu gelangen.

Zusatz bei der Korrektur. Es wird vielleicht nicht ohne Interesse sein, zu erwähnen, daß man durch die Anwendung der Gleichung $E - E_{\text{pot}} = \frac{m_1 v^2}{2}$ auf die Gleichung (14) und durch die Schrödingersche Forderung der Eindeutigkeit und Stetigkeit der Lösungen zu der wohlbekannten früheren Bohrschen Quantenbedingung

$$m_1 v r = n \frac{h}{2\pi} \quad (n = \text{ganze Zahl})$$

kommen kann.

Zagreb (Kroatien), Oktober 1928.

---

* Wir nehmen jetzt an, daß sowohl das Elektron als auch der Kern die kreisförmige Bewegung um den gemeinsamen (ruhend gedachten) Schwerpunkt in einer Ebene ausführt.

Eine Verbesserung des Totalreflektometers für Röntgenstrahlen.

Von **W. E. Laschkarew** und **S. D. Hertzrücken** in Kiew.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 9. November 1928.)

Es wurde ein äußerst einfaches Totalreflektometer für Röntgenstrahlen konstruiert. Die einzelnen Messungsergebnisse mittels dieses neuen Totalreflektometers wiesen für den Fall des Glases Abweichungen von nicht mehr als 0,1 bis 0,2 % auf.

Im Jahre 1926 veröffentlichten W. P. Linnik und W. E. Laschkarew* eine Totalreflektometermethode zur Bestimmung des Brechungsindex von Röntgenstrahlen.

Die Genauigkeit der Bestimmungen des Winkels α ($\cos\alpha = \mu$; μ = Brechungsindex) hing bei dieser Methode von zwei Faktoren ab:

1. Von der Genauigkeit der Drehung um 180°.

2. Von der Genauigkeit der Messungen der Strichbreite auf der photographischen Platte.

Nach der Schätzung der Verfasser betrug die Genauigkeit der Bestimmungen ihrer Messungen 1 %.

Die Fortsetzung der Arbeit hatte selbstverständlich die Aufgabe, die mit der Drehung verbundenen Fehlerquellen zu beseitigen und scharfe Grenzen bei der Aufnahme zu erhalten.

Das nachstehende Schema (Fig. 1) ermöglicht es, von einer genauen Drehung gänzlich abzusehen. Zwei Spiegel AA und $A'A'$

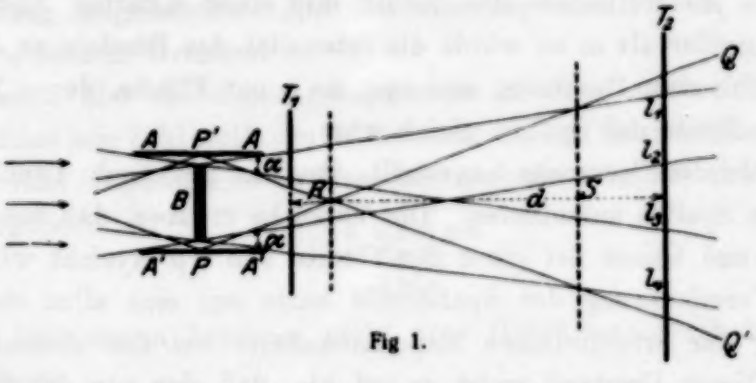


Fig 1.

werden möglichst parallel gelagert; zwischen den Spiegeln befindet sich ein kleiner Metallschirm B, so daß zwischen dem Schirm und den Spiegeln schmale Spalte bleiben. Die Richtung der Röntgenstrahlen wird durch die Pfeile in der Fig. 1 angedeutet. Die Geraden l_1, l_2, l_3, l_4 zeigen die Randstrahlen der Bündel, welche durch die Spalte gehen; PQ und $P'Q'$

* W. P. Linnik und W. E. Laschkarew, ZS. f. Phys. **38**, 659, 1926.

sind die Grenzstrahlen der totalen Reflexion. Zwei photographische Platten T_1 und T_2 befinden sich auf dem Wege der Strahlen, die erstere näher zum Spiegel als der Punkt R, die letztere jenseits des Punktes S. An der ersten Platte werden also entsprechend den beiden Spalten zwei schmale Linien erscheinen.

Um die Wirkung der nichtparallelen Lage der Spiegel bei der Bestimmung des Winkels α auszuschalten, wird das ganze System um annähernd 180° gedreht und zwei weitere photographische Aufnahmen (an der nahen und der entfernten Platte) gemacht.

Der Winkel α ergibt sich aus der Formel

$$\alpha = \frac{a_1 + a_2 + a_1' + a_2'}{4d}, \tag{1}$$

wo a_1, a_2, a_1' und a_2' die Abstände zwischen den Grenzen der totalen Reflexion und d den Abstand zwischen den Platten bedeuten.

Der Winkel zwischen unseren Spiegeln läßt sich berechnen nach der Beziehung

$$\varphi = \frac{(a_1 + a_2) - (a_1' + a_2')}{4d}. \tag{2}$$

Die Formel (1) zeigt, daß die Genauigkeit der Bestimmung von α nur durch die Messungsgenauigkeit der Grenzen auf den Photogrammen bedingt wird.

Wie leicht zu ersehen ist, wird die Schärfe der Grenze (eine Größe umgekehrt proportional der Länge, an der die Schwärzung der Platte um einen bestimmten Prozentsatz abnimmt) ceteris paribus um so größer, je schmaler der Spalt ist.

Wäre die Reflexion eine totale mit einer scharfen Abnahme bei Winkeln größer als α, so würde die Intensität des Bündels an der Platte von Null bis zum Maximum ansteigen an einer Fläche, deren Länge der doppelten Breite des Spaltes gleich wäre.

Es wurden Versuche angestellt, um die praktisch zweckmäßigste Breite des Spaltes aufzufinden. Die Versuche ergaben, daß das Optimum für Glas und Quarz bei einer Spaltbreite von 5 μ erreicht wird. Eine weitere Verminderung der Spaltbreite hatte nur eine allzu starke Verlängerung der erforderlichen Expositionsdauer bei den Aufnahmen zur Folge. Dieser Umstand weist darauf hin, daß eine von der Spaltbreite unabhängige Verschwommenheit der Grenze existiert.

Die Verschwommenheit gibt (wie es Prins* gezeigt hat) einen Beweis dafür, daß die Formeln von Fresnel, betreffend die Reflexion von absorbierenden Medien, auch für Röntgenstrahlen gelten.

---

* J. A. Prins, ZS. f. Phys. 47, 479, 1928.

Als kleiner Schirm B diente uns der zylindrische Teil einer Stahlnadel (0,587 mm Durchmesser). Die Spalte wurden von 5 μ dicken Stanniolstreifen gebildet. Um die parallele Lage zu erreichen, wurden vier Bruchstücke von Stahlnadeln desselben Durchmessers (0,587 mm) zwischen die Spiegel gelegt.

Die Stanniolstreifen und die Nadeln wurden an einem der Spiegel auf die Weise befestigt, daß sich der andere Spiegel einfach entfernen und durch einen solchen aus der zu prüfenden Substanz ersetzen ließ. Die photographischen Platten befanden sich in Kassetten, die an einem gemeinsamen Brett in 498,6 mm Abstand voneinander befestigt waren. Der Abstand läßt sich mittels eines Lineals messen, der Fehler beträgt höchstens 0,2 mm.

Die nächste Platte war ungefähr 3 cm von der Nadel B entfernt.

Die Arbeit wurde bei einer mäßigen Spannung von 25 bis 30 $kV_{eff.}$ ausgeführt, weil bei höheren Spannungen die Nadel erhebliche Mengen von Strahlen des kontinuierlichen Spektrums durchzulassen beginnt.

Die Antikathode bestand aus Kupfer mit der charakteristischen Strahlung $Cu\,K\alpha = 1{,}537$ Å.

Zur Bestimmung des Brechungsindex von härteren Strahlen wäre ein kleiner Zylinder aus dichterem Material, beispielsweise aus Wolfram, erforderlich.

Die Exposition erforderte bei 25 bis 30 mA bis 30 Minuten an der entfernten Platte, an der näherliegenden nur einige Sekunden.

Die Aufnahmen wurden mittels eines Komparators bei 10facher Vergrößerung ausgemessen. Auf den näherliegenden Platten zeigten die Aufnahmen scharfe Grenzen.

Es seien hier die Messungsergebnisse an einer solchen Platte angeführt. Eine jede Zahl stellt den Mittelwert von fünf Grenzablesungen dar.

Für drei verschiedene Stellen der Aufnahme haben sich folgende Zahlen ergeben:

Nr. 2 δ	0,396 mm
	0,398 „
	0,392 „

Die Differenzen betragen nicht über 0,006 mm; vielfach sind sie noch geringer.

Auf den entfernten Platten waren die Grenzen mehr verschwommen, die Ergebnisse einzelner Messungen also weniger genau. Trotzdem erhält man bei fünfmaliger Ablesung ganz sichere Resultate. So z. B.:

Nr. 2 a	3,698 mm	Nr. 4 a	3,699 mm
	3,694 „		3,702 „
	3,696 „		3,693 „

Die Differenzen übersteigen nicht 0,01 mm.

Bei der Berechnung nach der Formel (1) sind die Mittelwerte noch sicherer. Nachstehend werden die Werte $\frac{a_1 + a_2 + a_1' + a_2'}{4}$ bei zwei unabhängigen Aufnahmen für Glas aufgeführt:

I. Reihe:	II. Reihe:
3,999 × 0,5 mm	3,991 × 0,5 mm
3,995	4,005
3,993	3,978
3,979	3,983
Mittelwert: 3,992 × 0,5 mm	Mittelwert: 3,990 × 0,5 mm

Die Abweichungen der Mittelwerte betrugen 0,001 mm, d. h. 0,05% der gemessenen Größe.

Trotz der ganz guten Übereinstimmung der einzelnen Messungsergebnisse wäre es übereilt, auf Grund dieser Messungen eine Berechnung von α zu unternehmen.

Es bleibt ja ungeklärt, was für Längen eigentlich mittels des Komparators gemessen werden. An den Grenzen liegt eine Abnahme der Schwärzung vor. Unser Auge wählt in dieser Zone den Punkt, wo der Kontrast am größten zu sein scheint. Die Beziehung dieses Punktes zu demjenigen, der dem Winkel α entspricht, ist aber unbekannt.

Hier könnte eine tiefer greifende Theorie der Erscheinungen an der Grenze der Reflexion in Verbindung mit dem Photometrieren der einzelnen Aufnahmen eine Klärung bringen.

Zusammenfassung. Es wurde ein äußerst einfaches Totalreflektometer für Röntgenstrahlen konstruiert.

Die einzelnen Messungsergebnisse mittels dieses neuen Totalreflektometers wiesen für den Fall des Glases Abweichungen von nicht mehr als 0,1 bis 0,2% auf.

Die prinzipielle Frage nach der Zuverlässigkeit dieser Methode ihrem Wesen nach wird hier nicht diskutiert.

Es ist uns eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. A. Goldmann, Leiter des physikalischen Forschungskatheders, für sein Interesse an der Ausführung dieser Arbeit unseren tiefsten Dank auszusprechen.

Kiew, Polytechnisches Institut. Physikalisches Forschungskatheder.

Über Kapazitätsmessungen mittels piezoelektrischer Oszillatoren und Resonatoren.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von **G. A. Kjandsky** in Leningrad.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 13. November 1928.)

Ein mit Resonanz gesteuerter oder durch einen Leuchtquarzresonator kontrollierter Röhrengenerator wird für Meßzwecke nach der Schwebungs- und Resonanzmethode verwendet. Durch die außerordentliche Konstanz der so erhaltenen Schwingungen wird die Genauigkeit der Messungen erhöht.

Die große Konstanz der Frequenz der Eigenschwingungen einer Piezoquarzplatte erlaubt sie als Frequenznormal zu verwenden. Piezoelektrische Oszillatoren und Resonatoren sind in vielen Fällen der Radiomessungen nach der Resonanzmethode verwendbar, z. B. für Messungen sowohl der Wellenlänge als auch von Kapazitäten und Induktivitäten.

Nachstehend werden einige Methoden der Kapazitätsmessungen mittels Piezoquarzplatten beschrieben.

1. Schwebungsmethode.

Es ist möglich den Piezoquarz zu Kapazitätsmessungen nach der Methode der Interferenz zweier ungedämpfter Schwingungen („Schwebungsmethode") zu verwenden.

In Fig. 1 ist mit I eine der Schaltungen der piezoelektrischen Oszillatoren bezeichnet; die Quarzplatte Q liegt zwischen Gitter und Anode, bzw. zwischen Gitter und Heizfaden.

Die ungedämpften Schwingungen eines Quarzoszillators ($i_1 = J_1 \sin \omega_1 t$) interferieren mit den Schwingungen eines Röhrengenerators ($i_2 = J_2 \sin \omega_2 t$). Im Schwingungskreise III (Fig. 1) entstehen bekanntlich Schwebungen von der Form

$$i_3 = i_1 + i_2 = 2 J_2 \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + (J_1 - J_2 \sin \omega_1 t).$$

Die Scheitelwerte der Schwingungen I und II können annähernd gleichgemacht werden. In diesem Falle ist

$$i_3 = 2 J \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t.$$

Den Zeitmomenten

$$t_1 = 0; \quad t_2 = \frac{\pi}{\omega_1 - \omega_2}; \quad t_3 = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}; \quad t_4 = \frac{3\pi}{\omega_1 - \omega_2}$$

entsprechen die Scheitelwerte der resultierenden Schwingungen $2J$, 0, $-2J$, 0, d. h. die Änderung der Amplituden der Resultatsschwingungen ist eine periodische Funktion, deren Periode $T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ und Frequenz $F = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}$ ist, wo $\omega_1 = 2\pi f_1$ und $\omega_2 = 2\pi f_2$. Hieraus folgt $F = f_1 - f_2$.

In den Schwingungskreis II (Fig. 1) ist ein variabler Normalkondensator C_n geschaltet. Die im Kreise III entstehenden Schwebungen der Frequenz $F = f_1 - f_2$ werden mittels eines Verstärkers und Telephons beobachtet.

Die Kapazitätsmessung erfolgt nach der Nullmethode. Man macht mittels des Normalkondensators C_n (Kapazität C_n') die Frequenz des

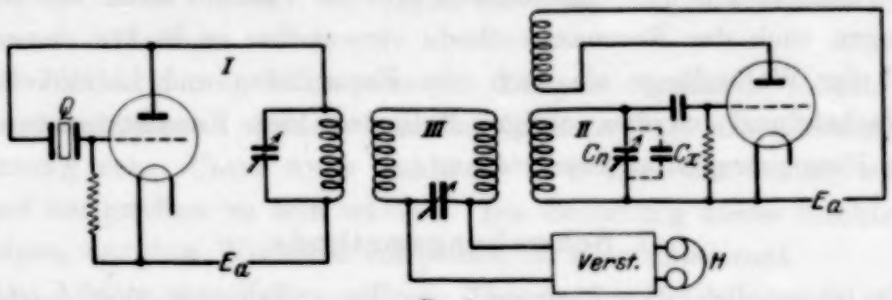


Fig. 1.

II-Oszillators f_2 gleich der Frequenz des Quarzoszillators f_1, was ein Verschwinden des Schwebungstons im Hörer zur Folge hat.

Darauf schaltet man parallel dem Normalkondensator C_n die zu eichende Kapazität C_x ein.

Man muß dann die Normalkapazität C_n bis zum Wiederverschwinden des Schwebungstons vermindern (C_n''). Hieraus folgt

$$C_x = C_n' - C_n''.$$

Der Vorzug dieser Methode besteht in der Verminderung des Fehlers bei der Frequenzbestimmung, da die erste der beiden Frequenzen f_1 und f_2, durch Quarz gesteuert, als konstant angenommen werden kann.

2. Messung kleiner Kapazitäten.

Messungen kleiner Kapazitäten können unter Verwendung der Schaltung (Fig. 1) eines Hilfssenders mit Tonfrequenz (f_t) vorgenommen werden. Es werden in diesem Falle Schwebungen von der Frequenz $f_s = (f_1 - f_2) - f_t$ beobachtet. Dann wird die Kapazitätsmessung nach dem bekannten Ver-

fahren von L. Pungs und G. Preuner* ausgeführt, sowohl nach der Vergleichungsmethode der zu eichenden Kapazität C_x mit einer Normalkapazität C_n, als auch nach der Methode der Änderung der Tonfrequenz f_t um die Größe $df_t = df_2$ bei konstanter f_1 (f_1 ist die Frequenz des Quarzoszillators).

3. Kapazitätsmessungen mittels der Leuchtquarzresonatoren.

Es ist möglich, die Leuchtquarzresonatoren von E. Giebe und A. Scheibe** für Kapazitätsmessungen zu verwenden.

Mit Hilfe einer Kopplungsspule S (Fig. 2) wird der Leuchtquarzresonator LQ zum Leuchten gebracht, indem der Schwingungskreis LC_n auf dessen Eigenschwingung abgestimmt wird. Nachdem die unbekannte Kapazität C_x im Nebenschluß zu C_n hinzugeschaltet wird, erfolgt eine neue Abstimmung des Schwingungskreises durch Änderung der Kapazität C_n bis zum neuen Aufleuchten des Quarzresonators. Die zu bestimmende Kapazität ist wiederum gleich der Differenz zwischen den beiden eingestellten Kapazitätswerten des Normalkondensators.

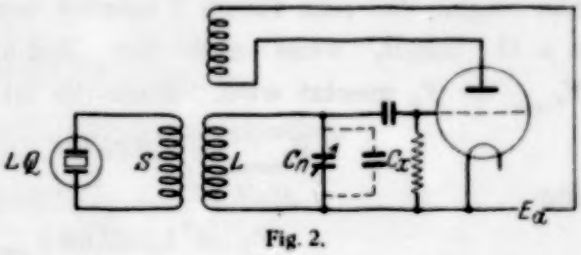


Fig. 2.

Es können selbstverständlich auch andere Schaltungen des Leuchtquarzresonators Anwendung finden, wie z. B. einpolige Kopplung des Resonators mit dem Gitterkreise der Röhre, oder es kann eine Neonlampe im Nebenschluß zum Quarzresonator im Falle der Resonanz zum Verlöschen gebracht werden.

Die Methode gibt große Genauigkeit bei ausgezeichneter Einfachheit der Messung.

Die dargestellten Methoden sind außerdem verwendbar für Messungen sowohl der Selbstinduktionskoeffizienten als auch der Koeffizienten der gegenseitigen Induktion.

Leningrad, Hauptkammer für Maße und Gewichte, Juli 1928.

---

* Phys. ZS. **20**, 543—545, 1919.
** Jahrb. d. drahtl. Telegr. **28**, 21, 1926.

Die Funkenspannung bei Drucken $p < 760$ mm Hg und das Minimumpotential, unter Berücksichtigung der Elektrodenfunktion dargestellt.

(Nachtrag zur ersten Mitteilung*.)

Von **Fr. Klingelfuss** in Basel.

(Eingegangen am 22. November 1928.)

Die kritische Wellenlänge λ_k beim Minimumpotential ist in einem konstanten Verhältnis zu dem durch die Elektrodenfunktion bedingten λ_{min} und $\lambda_{\ddot{u}}$ (λ_{max}); durch die Einführung dieser Konstanten in die Gleichung (9) a. a. O. erhält die elementare Energiegleichung die erweiterte Form $eV = h\frac{c}{\lambda}\cdot\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^2+1\right]$, die der Erfahrung besser zu entsprechen scheint als die ursprüngliche Form.

In der Tabelle 4 Seite 134 der ersten Mitteilung* findet sich die Gleichung $\lambda_{min} = \frac{6752}{\lambda_{max}}$; danach ist $\lambda_{min}\cdot\lambda_{max} = \text{konst.}$ Es läßt sich nun zeigen, daß man diesen Ausdruck unmittelbar aus der Gleichung (9) a. a. O. erhält, wenn nach der Bedingung der Elektrodenfunktion $V_{v_{max}} = V_{\ddot{u}}$ gesetzt wird. Nach (9) ist

$$V_{v_{max}} = 1{,}825\,66\,\lambda_{min} + \frac{12\,327}{\lambda_{min}} \tag{9a}$$

und

$$V_{\ddot{u}} = 1{,}825\,66\,\lambda_{max} + \frac{12\,327}{\lambda_{max}}, \tag{9b}$$

wo in (9b) für $\lambda_{\ddot{u}} = \lambda_{max}$ geschrieben ist. Für $V_{v_{max}} = V_{\ddot{u}}$ sind die rechten Seiten von (9a) und (9b) einander gleich, und man kann daher auch schreiben

$$1{,}825\,66\,\lambda_{min} - \frac{12\,327}{\lambda_{max}} = 1{,}825\,66\,\lambda_{max} - \frac{12\,327}{\lambda_{min}} = 0.$$

Da beide Seiten dieser Gleichung für sich gleich Null sind, so ergibt sich aus jeder derselben

$$\lambda_{min}\cdot\lambda_{max} = \frac{12\,327}{1{,}825\,66} = \text{const.} \tag{12}$$

Das Wichtige in diesem Resultat ist nun aber, daß

$$\sqrt{\lambda_{min}\cdot\lambda_{max}} = \lambda_k, \tag{13}$$

d. h. die kritische Wellenlänge beim Minimumpotential gibt.

Dadurch wird es möglich, die Einsteinsche Gleichung so zu modifizieren, daß der erweiterte Ausdruck zur Berechnung des Funken-

* ZS. f. Phys. **32**, 126, 1928. Man ist gebeten, folgende kleinen Korrekturen in der ersten Mitteilung vorzunehmen: Seite 127 Zeile 3, in der Gleichung $V'_{\ddot{u}}$ statt $V_{\ddot{u}}$; Seite 128, Gleichung (5a) und Seite 129 in Zeile 4, 6, 8 und 9 V'_0 statt V_0. Ferner Seite 137 Tab. 8, Kolonne 4 oben 1,82566 statt 1,85266.

potentials in Gasen für Drucke $p \gtrless 760$ mm Hg mit der Erfahrung in Einklang steht, was bekanntlich für die ursprüngliche Form der Gleichung nicht der Fall ist. Die ursprüngliche Form gilt nur annähernd bei kurzwelligen Röntgenspektren, und auch da nur für die Grenzwellenlänge mit um so größerer Annäherung, je kleiner die Grenzwellenlänge ist. Mit wachsenden Wellenlängen ($\lambda < \lambda_k$) nimmt der Fehler zu und erreicht bei $\lambda = \lambda_k$ 100 %. Hier versagt deshalb die Gleichung in ihrer ursprünglichen Form. Für $\lambda > \lambda_k$ versagt die Gleichung in der ursprünglichen Form überhaupt.

Wir haben nun in der ersten Mitteilung zeigen können, daß die Funktion $V_v = \varphi(p, \delta_{\ddot{u}})$ sich durch die Summe von $V = \frac{hc}{e\lambda}$ und $V' = \frac{\mathfrak{E}_{\ddot{u}}}{(h\delta)_{\ddot{u}}} \cdot (h\delta)$ darstellen läßt.

In unserer Gleichung (9) a. a. O. setzen wir nach (12) und (13) nunmehr den Koeffizienten

$$1{,}825\,66 = \frac{12\,327}{\lambda_k^2}$$

und können dann die Gleichung in der Form schreiben

$$V_v = 12\,327\left(\frac{\lambda}{\lambda_k^2} + \frac{1}{\lambda}\right) \text{ Volt.} \tag{9}$$

Setzen wir für $12\,327 = \frac{hc}{e}$ ein (vgl. erste Mitteilung Seite 128), so lautet nach einer leichten Umformung die erweiterte Energiegleichung

$$eV = h\frac{c}{\lambda} \cdot \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^3 + 1\right]. \tag{9'}$$

An der Gleichung (9') erkennt man unmittelbar die Ursache des Versagens der Rechnung nach der ursprünglichen Form der Gleichung. Setzen wir in (9') $\lambda = \lambda_k$, so wird der Faktor in der großen Klammer $= 2$, d. h. es ist

$$\frac{hc}{\lambda_k} = \frac{eV_k}{2},$$

also bei der kritischen Wellenlänge beim Minimumpotential nur halb so hoch, als nach der Einsteinschen Gleichung. Hierin mag der Grund mancher Unstimmigkeiten bei der Auswertung und Deutung der Spektren zu suchen sein. Die nach der Gleichung (9') berechneten Spannungen V stimmen mit den nach der Gleichung (9) a. a. O. berechneten Spannungen V_v überein, wenn zur Umrechnung die a. a. O. Seite 128 angegebenen Zahlenwerte benutzt werden.

Basel, 18. November 1928.

Neues Absorptionsgefäß für variable Flüssigkeitsschichten.

Von Carl Leiss in Steglitz.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 24. November 1928.)

Es wird ein neues Absorptionsgefäß beschrieben, bei dem der Abstand der beiden Fenster meßbar bis auf $^1/_{20}$ mm variierbar ist. Allen bisher gebräuchlichen ähnlichen Absorptionsgefäßen für genaue Schichtdickenmessungen haftet der große Nachteil an, daß die zu untersuchende Flüssigkeit dadurch Verunreinigungen ausgesetzt ist, daß sie mit Metall und einem gefetteten Schraubgewinde in Berührung kommt. Diesen Nachteil hat dies neue Absorptionsgefäß nicht, weil die Flüssigkeit nur mit Glas in Berührung kommt.

Dies neue Absorptionsgefäß, dessen Fenster f_1 und f_2 aus Glas, Quarz oder Flußspat sein können, gestattet, die Flüssigkeitsschicht zwischen den Fenstern f_1 und f_2 von 0 bis 20 mm zu variieren. Die jeweilige Schichtdicke ist an einer oben angebrachten Millimeterskale a ablesbar. Durch Drehen des geränderten Ringes b wird die innere Glasröhre r_2 mit ihrem Fenster f_2 in der äußeren Glasröhre r_1 verschoben. Beide Glasrohre sind genau ineinandergeschliffen und das innere Rohr verschiebt sich in dem äußeren vollkommen trocken ohne jegliches Fett. — Jede volle Umdrehung an dem Ring b entspricht 1 mm. Der abgeschrägte Rand des mit dem Ring b verbundenen Rohrstücks c ist in 20 Teile geteilt, so daß jedes Intervall 0,05 mm angibt. Bei dem ziemlich großen Abstand der einzelnen Intervalle ist also 0,05 mm sehr bequem abzulesen und sicher zu messen.

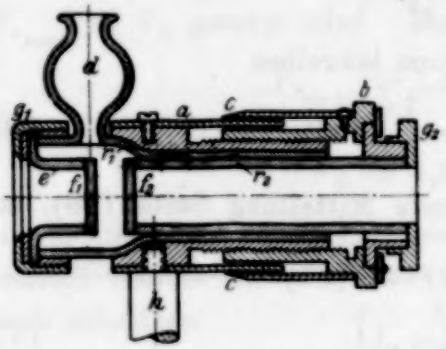


Fig. 1.

Mit irgend einem Metallgewinde oder mit Metallteilen kommt dabei die Flüssigkeit — wie das bei den bisher bekannten ähnlichen Zwecken dienenden Vorrichtungen der Fall ist — nicht in Berührung. Irgend eine Verunreinigung der Flüssigkeit kann also bei dieser neuen Vorrichtung nicht eintreten.

Beim Hineinschrauben des inneren Glasrohres r_2 mit seinem Fenster f_2 wird die Flüssigkeit in das Füllgefäß oder Reservoir d gedrückt und fließt beim Zurückschrauben wieder in die Küvette zurück. — Das Fenster f_1 der äußeren Glasröhre sitzt an einem besonderen Glas e, das

durch den Schraubring g_1 gehalten und jederzeit behufs Reinigung abgeschraubt werden kann.

Die freie Öffnung der inneren Röhre beträgt 16 mm.

Obwohl die beiden Glasrohre gut passend ineinandergeschliffen sind und die Flüssigkeit zwischen den beiden Wandungen durch Kapillarität nicht gut entweichen kann, so ist doch auf der Seite des Ringes b noch eine auf einem Metallring des Glasrohres r_2 aufsteckbare Kappe g_2 vorgesehen, so daß die zwischen der inneren und äußeren Glasröhre r_1 und r_2 etwa infolge der Kapillarität entweichende geringe Flüssigkeitsmenge dann leicht nach Abnahme des Ringes g_2 entfernt werden kann.

Zur Erhöhung der Lichtintensität der durch das Absorptionsgefäß gehenden Büschel können auf die beiden Kappen g_1 und g_2 Beleuchtungslinsen aufgesteckt werden. Die der Lichtquelle zugekehrte Linse sendet dann — bei richtiger Entfernung der Linse von der Lichtquelle — ein paralleles Bündel durch die Röhre und die zweite Linse vereinigt die Strahlen auf dem Spalt usw.

Das Absorptionsgefäß kann mit Hilfe des Stieles h auf einen Reiter oder ein Stativ gesetzt werden.

Evakuierbare Funkenstrecke.

Von **Carl Leiss** in Steglitz.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 24. November 1928.)

Diese neue evakuierbare, auf Anregung von Herrn Prof. Dr. Ley in Münster i. W von mir konstruierte Funkenstrecke kann sowohl für den direkten Anschluß an Vakuumspektrographen gebraucht werden als auch unter Vermittlung eines Stativs unmittelbar an den Spalt eines Vakuumspektrographen gestellt werden. Die Beobachtung des Funkens ist bequem von außen möglich.

Ein Glaskörper G besitzt drei sogenannte Normalschliffe, a, b und c. Der Schliff a setzt sich auf einen Metallkonus d auf, der mit dem Spektrographen derart verbunden ist, daß er samt der Funkenstrecke durch vier Schrauben zentriert werden kann, so daß der Funke konaxial zum Kollimator steht. Der Konus d kann durch ein Fluoritfenster e abgeschlossen werden, damit die Funkenstrecke für sich allein evakuiert werden kann.

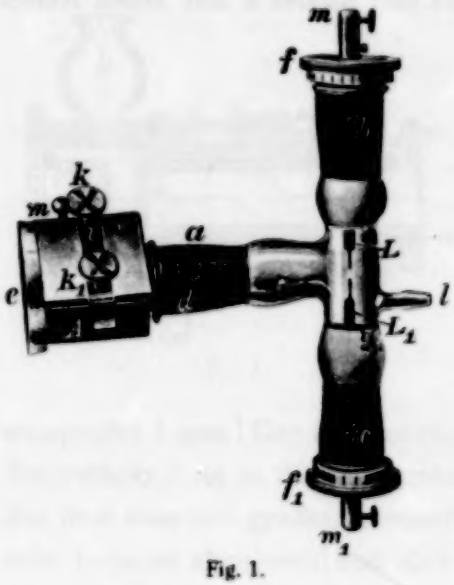


Fig. 1.

Statt des Konus d kann auch in den Schliff a irgend ein anderer beliebiger Konus mit und ohne Fenster e eingesetzt und die Funkenstrecke auf einem Stativ befestigt werden.

In den Schliffen b und c befinden sich ebenfalls zwei Metallkonen, welche durch die aus Isoliermaterial bestehenden Knöpfe f und f_1 gedreht werden können. Die Konen besitzen im Innern ein Muttergewinde, in welches die Schraubenbolzen g und g_1 passen. Die Schraubenbolzen tragen in ihrem oberen Ende eine kleine einklemmbare Pinzette oder Klemme L und L_1 zum Einspannen der Elektroden. Damit sich beim Drehen der Metallkonen die Schraubenbolzen g und g_1 nicht drehen, sondern die Elektroden in der Vertikalen verschoben werden, trägt jeder der Schraubenbolzen einen Querstift, welcher sich in je zwei Nuten, die in zwei im Innern der Glasröhre bei g und g_1 sitzende Ringe eingefräst sind, führen. Dreht man also die Konen an den Knöpfen f und f_1, dann schrauben sich die Elektroden herauf und herunter.

Die Schrauben g und g_1 haben eine Steigung von 1 mm und die Knöpfe f und f_1 zum Drehen der Konen bzw. zum Bewegen der Schrauben g und g_1 sind auf ihrer Zylinderfläche in zehn Teile geteilt, so daß die Verschiebung der Elektroden auf 0,1 mm abgelesen werden kann.

Für die Stromzuführung dienen die beiden Polklemmen m und m_1; dieselben sind drehbar, damit sich die Zuleitungsdrähte nicht beim Drehen der Knöpfe f und f_1 mitdrehen.

Die Evakuierung der Funkenstrecke erfolgt durch den Pumpenansatz l.

Die Funkenstrecke kann so benutzt werden, daß entweder die Elektroden, so wie in der Abbildung dargestellt, vertikal stehen, der Funke also parallel dem Spalt überspringt, oder es kann die Funkenstrecke um 90° gedreht sein, der Funke in diesem Falle dann senkrecht zur Spaltrichtung überspringt.

In Verbindung mit dem Konus d kann ein gleichzeitig mit der Funkenstrecke evakuierbares Kästchen A angebracht werden, in welches Absorptionsröhren eingelegt werden können. Das Kästchen wird durch einen mit Gummi abgedichteten Ring abgeschlossen, indem der Deckel mit der Brücke i und den beiden Klemmschrauben k und k_1 fest an das Kästchen gepreßt wird. Die kleine Schraube n dient zum Abheben des Deckels.

Magnetostriktion: Bemerkungen zu einer Mitteilung von Herrn Alfred Schulze.

Von **L. W. McKeehan** in New Haven, Conn.

(Eingegangen am 29. Oktober 1928.)

Herr Alfred Schulze hat bei der Besprechung einer Reihe ausgedehnter Untersuchungen über Magnetostriktion, in denen er sich einer sehr präzisen und bequemen Methode bedient, gewisse Einwände gegen meine Andeutung erhoben *, daß die leichte Magnetisierbarkeit des Permalloy durch lokale Neutralisierung der Magnetostriktion, die für Eisen und Nickel verschiedenes Vorzeichen hat, bedingt werde. Ich möchte darauf hinweisen, daß seine Resultate durchaus nicht so entschieden gegen meine Deutung sprechen, wie er anzunehmen geneigt ist.

Erstens beweist die Abwesenheit von Expansions- oder Kontraktionserscheinungen bei der Magnetisierung (verschwindender Joule-Effekt) an sich nicht das Vorhandensein einer lokalen Neutralisierung der Magnetostriktion und läßt daher meiner Meinung nach nicht notwendig auf leichte Magnetisierbarkeit schließen. Man kann sich dies leicht an einem Experiment klarmachen. Wäre z. B. ein Stab aus kurzen Stücken verschiedenen Materials, etwa reinem Nickel und einer Legierung von 50 % Eisen und 50 % Nickel zusammengesetzt, so würde er unter Umständen keine resultierende Ausdehnungsveränderung bei der Magnetisierung zeigen; trotzdem würde er sehr beträchtliche Hysterese aufweisen. Im mathematischen Sinne scheint mir ein Verschwinden des Joule-Effekts daher nicht hinreichend, um eine ungewöhnlich kleine Hysterese zu gewährleisten.

Es ist sehr wohl möglich, daß das Verschwinden des Joule-Effekts, das, wie Herr Schulze annimmt, für eine gewisse Zusammensetzung in der Fe-Si-Reihe zwischen 4,45 % Si und 8,37 % Si vorliegt, etwa durch eine bei erhöhtem Si-Gehalt stattfindende Zunahme der relativen Anzahl von Kristallen, deren [111] Richtungen der Magnetisierungsrichtung parallel liegen, bewirkt wird, und daß es mit einer lokalen Neutralisierung nichts zu tun hat. In ähnlicher Weise lassen vielleicht die hohen positiven Werte von $\Delta l/l$ in der Fe-Al-Reihe eine zunehmende Bevorzugung der [100] Richtungen erkennen.

---

* ZS. f. Phys. **50**, 448—505, 1928.

In der Fe-Mn-Reihe und in dem irreversiblen Bereich der Fe-Ni-Reihe ist der Vergleich der Joule-Effekte bei konstantem H wegen des Vorkommens zweier Kristalltypen und der sehr geringen Magnetisierung, die mit leicht anwendbaren Feldstärken erzielt werden kann, von verhältnismäßig geringem Interesse.

In der Fe-Ni-Reihe, für die meine Hypothesen zuerst ausgesprochen waren, können die beobachtbaren Joule-Effekte sehr stark durch Prozesse abgeändert werden, die die Atomachsen in besonderer Weise orientieren. Zug z. B. kann die magnetischen Achsen der Eisenatome so vollständig in gleiche Richtung bringen, daß bei der Magnetisierung nur sehr geringe Expansion beobachtet wird. Es wäre daher zu erwarten, daß Wärmebehandlung, sofern sie innere Spannungen zurückläßt, die Größe des Joule-Effekts verändert, aber nicht die Zusammensetzung, wo er sein Vorzeichen umkehrt, und gerade dies ist von Herrn Schulze und früheren Forschern beobachtet worden.

Eine Änderung im Nickelgehalt, bei dem der Joule-Effekt in ternären Legierungen verschwindet, ist eher zu erwarten als nicht. Überraschend ist jedoch die Tatsache, daß Herr Schulze einen Nickelgehalt in der Höhe von 82 % in seinen reinsten Legierungen erreicht hat. Es ist zum mindesten möglich, daß die angegebenen Zusammensetzungen die angenommenen, aber vielleicht nicht die in Wirklichkeit erzielten waren. Nach meiner Erfahrung habe ich allgemein gefunden, daß der Nickelgehalt niedriger war als erwartet, vielleicht weil Nickel schneller aus der Schmelze verdampft als Eisen. Eine Erniedrigung des Nickelgehalts um 1 % ist nicht ungewöhnlich; sie würde im gegebenen Falle unsere Resultate in gute Übereinstimmung bringen.

Herr Schulze führt an, daß leichte Magnetisierbarkeit nicht mit Verschwinden des Joule-Effekts in Verbindung steht, weil schnell erkaltete Eisen–Nickel-Legierungen die höchsten Permeabilitäten unterhalb 81 % Ni zeigen. Die darin liegende Schwierigkeit war mir natürlich wohl bekannt, als ich meine Untersuchungen machte, war sie doch von Arnold und Elmen, mit denen ich damals zusammen arbeitete, zum ersten Male berichtet. Ich fand jedoch, daß bei langsam gekühlten Drähten die höchsten Permeabilitäten und die geringste Hysterese bei ungefähr 81% Ni zum Vorschein kommen. Diese Tatsache habe ich in den Berichten, auf die Herr Schulze Bezug nimmt, dahingehend erklärt, daß bei angewandten Spannungen, die entweder homogen oder durch schnelle Erkaltung bewirkt sein können, die in schwächsten Feldern am leichtesten magnetisierbare Zusammensetzung nicht diejenige ist, für die der Joule-

Effekt gleich Null wird, sondern die, für welche er einen geringen Wert hat, der dasselbe Vorzeichen wie die von den mechanischen Kräften bewirkte innere Verformung trägt.

Ich komme daher zu dem Schlusse, daß Herrn Schulzes neue Resultate meine allgemeinen Hypothesen bezüglich der Verbindung zwischen Magnetostriktion und magnetischer Hysterese eher bestätigen als widerlegen. Der Energieverschwendung bei stufenweiser Magnetisierung kann man anscheinend nur dann entgehen, wenn Änderungen in der Magnetisierung ohne Änderungen in den inneratomaren Kräften eintreten, was vielleicht in isolierten Kristallen möglich ist.

Es ist wohl erwähnenswert, daß Herrn Schulzes Experiment mit Wismut die Ergebnisse von Wills* und Hobbie** bestätigt, und daß, in Widerspruch zu seiner Behauptung, Hysterese und Remanenzerscheinungen in Magnetostriktion leicht beobachtbar sind***.

---

* A. P. Wills, Phys. Rev. **15**, 1—6, 1902.

** J. R. Hobbie, Phys. Rev. (2) **19**, 456—466, 1922.

*** L. W. McKeehan, Journ. Franklin Inst. **202**, 737—773, 1926, besonders Fig. 4.

Berichtigung

zu der Notiz: Über den Bauschingereffekt. Von H. Shôji*.

S. 728, Z. 5 lies L. Boltzmann statt E. Boltzmann.

Fig. 1 lies λ in $^0/_{00}$ statt λ in $^0/_0$.

---

* ZS. f. Phys. **51**, 728, 1928.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Faserstoffchemie.)

Über Deformationsversuche bei Faserstoffen.

Von **R. O. Herzog** und **W. Janeke** in Berlin-Dahlem.

(Vorläufige Mitteilung.)

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 26. November 1928.)

Es werden röntgenographische Beobachtungen an deformierten Faserstoffen — merzerisierter Cellulose und echter Seide — beschrieben. Durch Walzen oder Pressen kann eine Struktur der Anisotropieklasse IV (Walzstruktur) erzeugt werden.

Bei Substanzen, die keine Einkristalle liefern, sondern nur als Kristallitaggregate bekannt sind, ist die Indizierung der Röntgendiagramme mit Unsicherheiten behaftet. Will man sie eindeutig gestalten, muß man von jeder Interferenz entsprechend den drei unbekannten Indizes drei voneinander unabhängige experimentelle Größen messen, um zu den drei Gleichungen für die drei Unbekannten zu gelangen. Das Debye-Scherrerdiagramm gibt für jede Interferenz einen Parameter, den Radius des Debye-Scherrerkreises, das Faserdiagramm zwei, eine Weissenbergsche Röntgengoniometeraufnahme einer Struktur der Anisotropieklasse IV (Walzstruktur) drei.

Nach längeren Bemühungen ist es nun geglückt, auch bei organischen Faserstoffen, und zwar bei der Cellulose und der Naturseide, durch plastische Deformation — ähnlich wie früher bei den Metallen — Strukturen der Anisotropieklasse IV zu erzielen*.

Z. B. wurde bei genügend plastischen Filmstreifen durch starkes Dehnen zunächst eine Faserstruktur erzeugt, die gute Faserdiagramme von mercerisierter Cellulose ergab. Diese Filmstreifen wurden dann gewalzt oder stark gepreßt. Aus den dünnen Filmstreifen wurde dann durch paralleles Übereinanderschichten und Beschneiden ein dünnes Stäbchen mit nahezu quadratischem Querschnitt hergestellt und senkrecht zur Dehnungsrichtung, aber in verschiedenen Stellungen der Filmfläche zum

* Das im nachstehenden benutzte Verfahren gründet sich auf den Vorschlag von K. Weissenberg (Ann. d. Phys. **69**, 421, 1921), bei der Deformation einen Spannungstensor der geforderten Anisotropie anzulegen. Dagegen haben H. Mark und von Susich (ZS. f. Kolloidchemie **46**, 11, 1928) einen neuen Weg beschritten, indem sie die Anisotropie der äußeren Form des Präparates (extrem dünne Folien) ausnutzten. — Zusatz bei der Korrektur: Inzwischen ist es Herrn Dr. Burgeni gelungen, den von Mark und Susich bei Kautschuk gefundenen Effekt an Cellulosefi men hervorzurufen.

Primärstrahl, Diagramme unter gleichen Belichtungsverhältnissen aufgenommen. Hernach wurden alle Platten unter denselben Bedingungen gleichzeitig entwickelt und längs des Äquators mit gleicher Empfindlichkeit photometriert.

Fig. 1 und 2 zeigen die Photometerkurven bei Durchstrahlung von Cellulose senkrecht und parallel zur Filmfläche. Auf der Diagrammplatte zeigen sich deutliche Intensitätsunterschiede bezüglich der Äquatorpunkte $A_0\left(\sin\frac{2\vartheta}{2} = 0{,}011,\ \text{Kupferstrahlung}\right)$, A_3 (0,0304) und A_4 (0,0368). Während A_3 und A_4 ihre Intensität zueinander in den verschiedenen Stellungen (auch bei $\pm 45^0$) nicht merklich zu ändern scheinen — sie

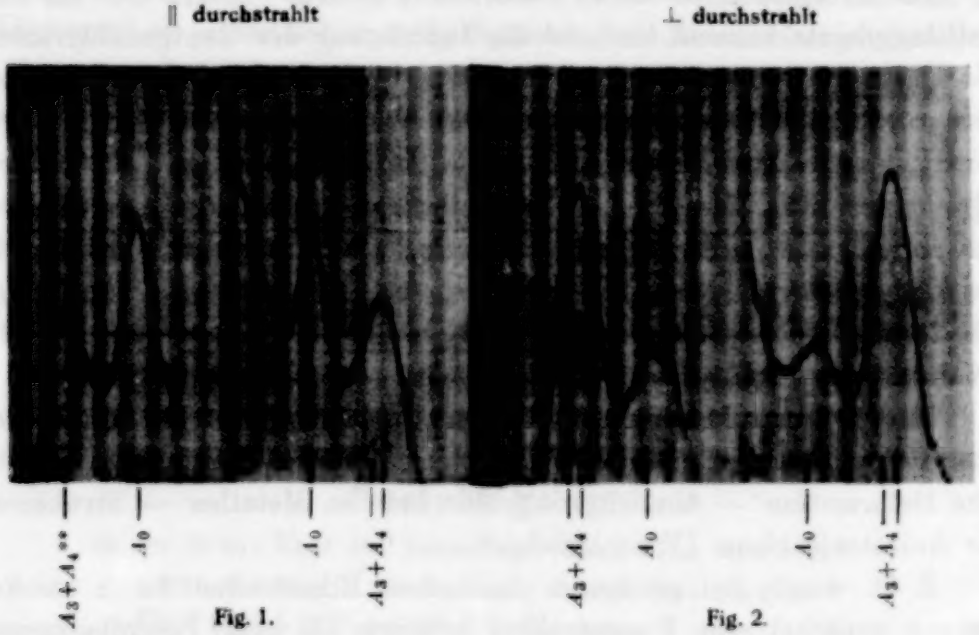


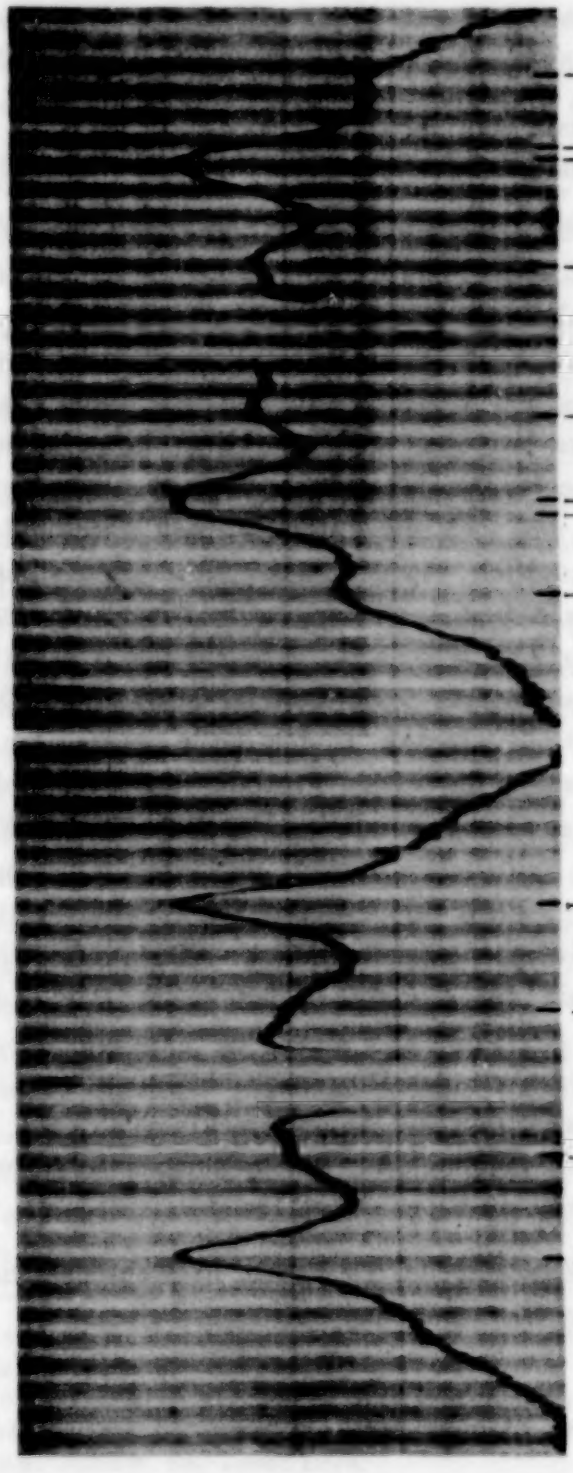
Fig. 1. Fig. 2.

sind in der Photometerkurve nicht deutlich getrennt —, ändert sich das Intensitätsverhältnis von A_3 und A_4, bezogen auf A_0, merklich je nach der Stellung. Das eine Mal (bei senkrechter Durchstrahlung) ist A_0 sehr schwach gegen A_3 und A_4, bei paralleler Durchstrahlung steigt die Intensität von A_0 an, während die von A_3 und A_4 fällt. Die nächstliegende Deutung wäre, daß die A_3 und A_4 erzeugenden Ebenen nahezu parallel liegen, während A_0 ungefähr senkrecht zu ihnen steht. Die bisher an-

* Die Unsymmetrie — ansteigender Ast — bei Fig. 1 und 2 rührt davon her, daß der Primärfleck nicht genau zentrisch ausgeblendet war.

** An dieser Stelle fehlt versehentlich die Kennzeichnung als Doppelpunkt durch zwei Vertikalstriche an der Basis der Figur (vgl. die richtig markierte Fig. 2).

genommene quadratische Form, in welcher A_3 und A_4 als Achsenpunkte gewählt wurden, bei denen also die zugehörigen Ebenen senkrecht oder nahezu senkrecht (monokline Symmetrie) zueinander stehen sollten, wäre



∥ durchstrahlt

Fig. 4.

⊥ durchstrahlt

Fig. 3.

dann nicht angängig. Sicherheit können erst Aufnahmen im Weissenbergschen Röntgengoniometer geben.

Ähnliche Erscheinungen sind bei echter Seide von Bombyx mori beobachtet worden, die in Form von Silkworm zu filmähnlichen Streifen durch Walzen deformiert war. Hier sind die Intensitätsunterschiede noch deutlicher, je nach paralleler oder senkrechter Durchstrahlung zur Walzfläche, wobei die ursprüngliche Faserrichtung beide Male senkrecht zum Strahle stand. Von den Äquatorpunkten bei Silkworm, deren $\sin\frac{2\vartheta}{2}$-Werte ungefähr bei 0,006 (Doppelpunkt), 0,024, 0,032 und 0,063 (breit verwaschen) liegen, sind die Punkte 0,006, 0,024 und 0,063 bei Durchstrahlung senkrecht zur Walzfläche bezüglich der Intensität sehr stark geschwächt, während bei paralleler Durchstrahlung alle erwähnten Punkte gleichzeitig auftreten und man den Eindruck hat, daß sich dieses Diagramm von dem normalen Silkwormdiagramm nicht merklich unterscheidet. In dem Diagramm bei senkrechter Durchstrahlung scheinen die drei erwähnten Punkte zu fehlen, ohne daß sich die Intensität des übrigbleibenden Äquatorpunktes 0,032 merklich geändert hat. Diese Erscheinungen geben die Photometerkurven 3 und 4 wieder. (Die Diagramme waren auch hier gleich lange exponiert, gleichartig entwickelt und unter derselben Empfindlichkeit photometriert.) Die Punkte 0,024 und 0,032 sind in den Kurven nicht deutlich getrennt. In dem Falle senkrechter Durchstrahlung ist der Intensitätsberg durch den Fortfall von 0,024 bei gleicher Höhe bedeutend schmaler als bei paralleler Durchstrahlung. Ebenso ist 0,006 stark geschwächt (möglicher Fortfall nur einer Komponente) und noch mehr 0,063. Desgleichen verschwindet auf der 1. Schichtlinie der Punkt, dessen Horizontalkomponente dem Werte 0,024 entspricht, während der nächstfolgende mit der Horizontalkomponente 0,032 unverändert erhalten bleibt.

Die Verschiedenheit der Diagramme bei paralleler und senkrechter Durchleuchtung weist auf die Anisotropieklasse IV hin. Über Versuche an Celluloseabkömmlingen und die quantitative Auswertung mittels Röntgengoniometers wird demnächst berichtet werden.

Der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft danken wir verbindlichst für ihre Unterstützung unserer Arbeiten.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie, Abteilung Hahn-Meitner.)

Die weitreichenden α-Teilchen des Radiums C.

Von **K. Philipp** und **K. Donat** in Berlin-Dahlem.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 1. Dezember 1928.)

Die Untersuchung der weitreichenden α-Strahlen des RaC nach der Wilsonschen Nebelmethode wurde fortgesetzt, um genauere Angaben über Reichweite und Häufigkeit dieser Strahlen machen zu können. Dabei wurde statt der bisher verwendeten Plattenkamera ein Kinoaufnahmeapparat benutzt, der für stereoskopische Einzelaufnahmen eingerichtet worden war.

Jede α-strahlende Substanz sendet bekanntlich α-Strahlen einheitlicher Geschwindigkeit, also einheitlicher Reichweite aus, die charakteristisch für die betreffende Substanz ist. Neben diesen „normalen" α-Strahlen sind jedoch bei manchen radioaktiven Elementen α-Strahlen größerer Reichweite beobachtet worden. Ihre genaue Untersuchung ist dadurch sehr erschwert, daß ihre Anzahl im Verhältnis zu den normalen α-Teilchen nur sehr gering ist. Am besten untersucht sind die Verhältnisse beim aktiven Niederschlag des Thoriums, der die relativ größte Anzahl weitreichender Teilchen aussendet, nämlich pro 10^6 normaler α-Strahlen von ThC' (8,6 cm Reichweite) 65 bis 70 Teilchen von 9,5 cm und 180 bis 200 Teilchen von 11,5 cm Reichweite. Von beiden Gruppen konnten einerseits durch Ausmessen einzelner nach der Wilsonschen Nebelmethode photographierten α-Strahlbahnen *, andererseits durch Auszählen von Szintillationen ** Reichweitekurven aufgenommen und so der Nachweis geführt werden, daß es sich wirklich um α-Strahlgruppen mit definierter Anfangsgeschwindigkeit handelt. Beim RaC liegen die Verhältnisse bereits viel ungünstiger. Bates und Rogers *** geben pro 10^6 normaler α-Teilchen des RaC 38 mit 9,3 cm, 12,6 mit 11,2 cm und 6,5 mit 13,2 cm Reichweite an. Die Nachprüfung dieser Ergebnisse von Rutherford und Chadwick **** ergab nur das Vorhandensein von zwei Geschwindigkeitsgruppen, und zwar pro 10^6 normale α-Teilchen etwa 30 α-Teilchen mit 9,3 cm und 5 α-Teilchen mit 11,2 cm Reichweite. Diese beiden Gruppen konnten auch von einem von uns † nach der

---

* L. Meitner und K. Freitag, ZS. f. Phys. **37**, 481, 1926.
** K. Philipp, ebenda **37**, 518, 1926.
*** L. F. Bates und J. F. Rogers, Proc. Roy. Soc. London (A) **105**, 97, 1924.
**** E. Rutherford und J. Chadwick, Phil. Mag. **48**, 509, 1924.
† K. Philipp, Naturw. **14**, 1203, 1926.

Wilsonschen Nebelmethode bestätigt werden. Die Anzahl der photographierten weitreichenden α-Strahlbahnen war aber noch zu gering, um genaue Angaben über ihre Häufigkeit und ihre Reichweite machen zu können. Von 26 weitreichenden Strahlen gehörten 22 zu der 9,2 cm-Gruppe, während 4 eine größere Reichweite, aber nicht über 12 cm hinaus, aufwiesen. Zu diesen Versuchen waren bereits 400 Aufnahmen notwendig gewesen. Wollte man zuverlässigere Angaben über Häufigkeit und Reichweite dieser Strahlen machen, so mußte ein erheblich größeres Versuchsmaterial beschafft werden. Wir haben deshalb weitere 3000 Aufnahmen von α-Strahlen des RaC gemacht und ausgewertet.

Fig. 1.
Filmstreifen mit α-Strahlen des RaC (Orginalgröße).

Um einerseits das Negativmaterial rascher verarbeiten und andererseits die Zahl der Aufnahmen pro Stunde heraufsetzen zu können, verwandten wir Filme. Als Kamera diente ein Amigo-Normal-Kinoapparat für 60 m (Holzkamera), der sich sehr einfach zur Herstellung von Stereoskop-Einzelaufnahmen umarbeiten ließ. Es brauchte nur die Sektorblende herausgenommen und an Stelle des einen Objektivs die Stereoskopoptik* vorgesetzt zu werden. Auf demselben Filmstreifen erhält man dann die beiden Stereoskopbilder 18×24 mm in einem Abstand von 67 mm voneinander, der durch die Abmessungen des Compurverschlusses bedingt war. Der Zwischenraum wird für 2 weitere Aufnahmen ausgenutzt. Nach je 3 Aufnahmen muß

* Zwei Kinoobjektive Rüo 1 : 3,0, die von der Rüo-Optik G. m. b. H. in Rüdersdorf b. Berlin in einem Compurverschluß eingebaut worden waren.

man den Film dann um so viel weiterbewegen (5 Kurbelumdrehungen), daß die erste Hälfte der neuen Gruppe nicht in die zweite Hälfte der alten Gruppe hineinfällt. Man erhält so sehr übersichtliche Dreiergruppen, die eine leichte Zuordnung der zusammengehörigen Stereoskopbilder gestattet. In der Fig. 1 ist eine solche Dreiergruppe (36a, b, c) abgebildet. Im übrigen war die Versuchsanordnung die gleiche wie in der oben zitierten Arbeit aus dem Jahre 1926, nur war der 2 mm-Spalt in der Wilsonkammer durch einen solchen von 1 mm Breite ersetzt. Die Aufnahmen mußten des raschen Abfalls des Ra B + C-Präparates wegen wiederum sehr schnell hintereinander gemacht werden (etwa 100 Aufnahmen in $^1/_2$ Stunde). Die Zahl der bei einer Versuchsserie (100 bis 200 Aufnahmen) in der Wilsonkammer zur Wirksamkeit gelangten Strahlen wurde wie früher durch Eichaufnahmen bestimmt, die angefertigt wurden, nachdem das Präparat so weit abgefallen war, daß die Zahl der Bahnen der normalen α-Strahlen sicher ausgezählt werden konnte.

Mit Hilfe einer kleinen Projektionseinrichtung konnten die Filmbilder etwa 25 fach vergrößert betrachtet und die weitreichenden Strahlen ausgemessen werden. Hierbei wurde die Bahnlänge stets auf diejenige der normalen α-Strahlen der gleichen Aufnahme bezogen. Da die normalen α-Strahlen ein sehr dichtes Bündel von mehreren tausend Strahlen bildeten, markierte sich die Reichweite sehr deutlich. Immerhin ist es möglich, daß man beim Ausmessen die längsten der normalen α-Strahlen bevorzugt, also eventuell noch Strahlen berücksichtigt, die nach der Definition der Reichweite* bereits in das Gebiet der Endstreuung gehören. Die Auswahl der längeren Strahlen bringt daher die Gefahr mit sich, die weitreichenden Strahlen zu kurz zu messen. Der durch diese Art der Ausmessung entstehende Fehler wird jedoch nicht größer als 1 % sein.

Mittels zweier Fernrohre konnten die Filmbilder stereoskopisch betrachtet werden. Sämtliche weitreichenden Strahlen wurden dieser stereoskopischen Prüfung unterzogen und diejenigen ausgeschieden, deren Richtung nicht vom Präparat zu kommen schien. Natürlich können dadurch auch Strahlen fortfallen, die auf dem Teil ihrer Bahn, der noch in dem dichten Bündel liegt, eine Ablenkung erfahren haben. Ebenso wurden auch diejenigen wenigen Strahlen (3 Strahlen) fortgelassen, bei denen die Entscheidung zwischen α- oder H-Strahlencharakter etwas zweifelhaft war. Im allgemeinen sind jedoch α- und H-Strahlen sehr leicht zu unterscheiden**. Die so vorgenommene kritische Art der Auswahl ist natürlich

* Siehe Fußnote * S. 762.

** Vgl. L. Meitner und K. Freitag, ZS. f. Phys. **37**, 481, 1926.

notwendig, um Irrtümer auszuschließen, führt aber nur zu Mindestwerten.

Auf den neu hergestellten 3000 Aufnahmen sind nun einwandfrei 221 weitreichende α-Strahlen und 83 H-Strahlen festgestellt. Um die in Fig. 2 abgebildete Reichweitekurve der weitreichenden α-Strahlen zu erhalten, wurden als Abszissen die gemessenen Bahnlängen R, als Ordinaten die Zahl der Teilchen, deren Längen gleich und größer als R sind, aufgetragen. Hierbei wurden alle Strahlen zwischen R und $R + 1$ mm Länge zu Gruppen von $R + {}^1/_2$ mm Längen zusammengefaßt. Man erkennt deutlich das Vorhandensein zweier Gruppen, deren Reichweite * etwa 9,2 cm und 11,0 cm beträgt. Die 9,2-Teilchen ** zeigen einen für die vorliegenden Verhältnisse durchaus normalen Abfall und Streubereich; die Endstreuung der Reichweite erscheint allerdings etwas groß. Wie diese Erscheinung zu erklären ist, ob etwa durch 11,0-Teilchen, deren Bahnlänge in der Wilsonkammer durch zufällige ungleichmäßige Wasserhäute ungewöhnlich stark verringert wurde, oder durch das Vorhandensein einer neuen Strahlengruppe, das läßt sich nicht entscheiden. Es handelt sich hier insbesondere um 9 Strahlen von 9,5 und 9,6cm Länge ***. In der Reichweiteverteilungskurve der Fig. 3, in der die Zahl der Teilchen, deren Bahnlängen $R \pm 1$ mm betragen, in Abhängigkeit von R aufgetragen ist, erscheinen sie als besondere Gruppe von geringer Intensität. Bei der kleinen Zahl dieser Teilchen lassen sich

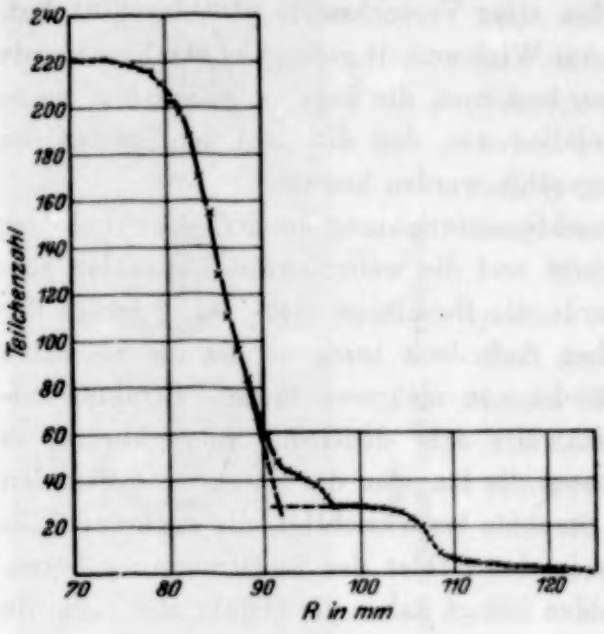


Fig. 2.
Reichweitekurve der weitreichenden α-Teilchen des Ra C.

* Die „Reichweite" ist, wie üblich, durch die Fortsetzung des geradlinigen Abfalls bis zum Schnittpunkt der Abszissenachse definiert.

** Zwei solche Strahlen sind auf dem Filmstreifen Fig. 1 (Aufnahme 36b) zu sehen. Vgl. auch die Bilder in Naturw. 14, 1203, 1926.

*** Es sei betont, daß diese Strahlen nicht von einer etwaigen Infektion durch Th B + C herrühren können, da wir sonst die 10^4 mal zahlreicheren normalen α-Strahlen des Th B (8,6 cm) hätten bemerken müssen.

genauere Aussagen über sie nicht machen. Auch die 11,0-Teilchen geben, wie der in vergrößertem Maßstab gezeichnete Endteil der Kurve (Fig. 3) zeigt, bereits eine brauchbare Reichweitekurve. Der geradlinige Abfall definiert durchaus scharf eine bestimmte Reichweite. Die Endstreuung erstreckt sich aber außerordentlich weit. Es sind hier noch 3 Strahlen von 11,9, 12,1 und 12,3 cm Bahnlänge beobachtet worden. Nach der Stärke ihrer Nebelbahn muß man sie für α-Strahlen halten. Die beiden Bilder (Fig. 5 und 6) zeigen einen solchen Strahl (11,9 cm Länge) im Vergleich zu einem 11,0-Strahl (10,3 cm Länge). Auch unter den

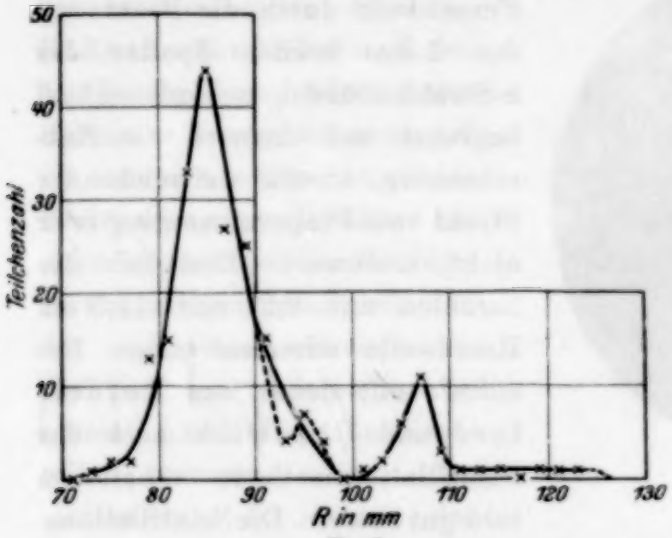


Fig. 3.
Reichweiteverteilung der α-Strahlen extremer Reichweite beim Ra C.

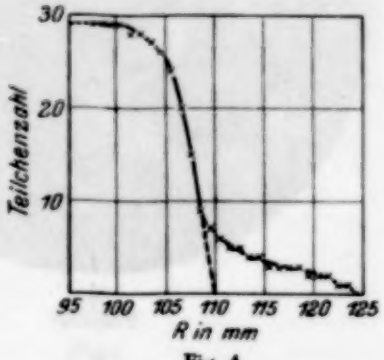


Fig. 4.
Reichweitekurve der 11,0-Teilchen des Ra C.

4 Teilchen extrem hoher Reichweite, die in der oben zitierten Veröffentlichung des einen von uns angegeben sind, befand sich ein Strahl von 12 cm Länge. Es erscheint danach nicht ausgeschlossen, daß noch α-Strahlen mit einer Reichweite größer als 11 cm existieren. Ihre Intensität müßte aber bedeutend geringer als die der 11,0-Strahlen sein. Nach den beiden Niveaus der Reichweitekurve (Fig. 2) würden von den 221 Teilchen 192 den 9,2-Teilchen und 29 bzw. 26 den 11,0-Teilchen zuzuschreiben sein, je nachdem ob man die 3 oben erwähnten besonders langen Strahlen einer neuen Gruppe zuordnet oder nicht. Die Gesamtzahl der bei diesen Versuchen verwandten α-Strahlen betrug nach den Eichungen etwa $6{,}7 \cdot 10^6$.

In der Tabelle 1 sind unsere Ergebnisse mit denen anderer Autoren zusammengestellt. Bei den in Klammern stehenden Zahlen ist der damals aufgefundene Strahl von 12 cm Länge zu der Gruppe $R > 11$ cm

gerechnet worden. Die von uns in den Spalten 2, 3 und 6 angegebenen Zahlen beanspruchen auch jetzt noch keine große Genauigkeit, da wir die Zuordnung der Strahlen mit 9,5 bis 9,6 cm Länge nicht zweifelsfrei durchführen können. Die Ausbeute an weitreichenden Strahlen ist jedenfalls merklich größer als in der Arbeit von 1926. Diese Differenz erklärt sich einmal dadurch, daß die dort beobachteten „unsicheren" Strahlen in bezug auf die verhältnismäßig geringe Anzahl der photographierten weitreichenden Strahlen vielleicht zufällig häufiger als hier waren. Ferner war durch die Benutzung des 2 mm breiten Spaltes das α-Strahlenbündel weniger scharf begrenzt und dadurch die Entscheidung, ob ein weitreichender Strahl vom Präparat ausging oder nicht, erschwert. Bezüglich der Strahlen mit 9,2 und 11,0 cm Reichweite stimmen unsere Resultate mit denen von Rutherford und Chadwick nach der Szintillationsmethode erhaltenen sehr gut überein. Die Szintillationsmethode gestattet zwar keine direkte Aussage über die Richtung der Teilchen, sie hat aber den Vorteil, daß die beobachtete Teilchenzahl eine weit größere ist. Rutherford und Chadwick haben ebenfalls einige Teilchen größerer

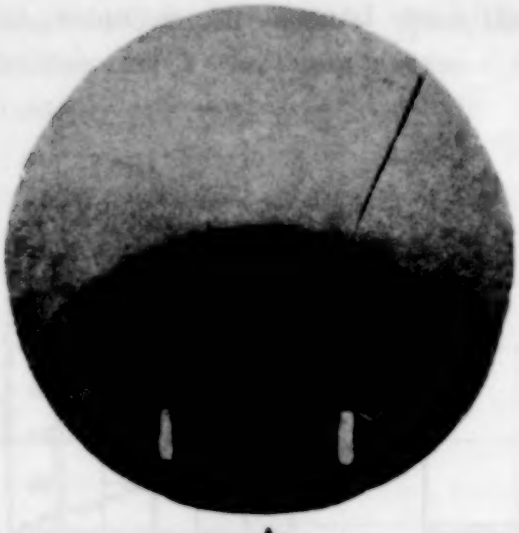


Fig 5.
Weitreichender α-Strahl des RaC (11,9 cm Länge) etwa 3,5 mal vergrößertes Filmbild.

Tabelle 1. Weitreichende α-Teilchen des RaC.

Beobachter und Methode	Weitreichende α-Teilchen pro 10^6 normale α-Teilchen			Zahl der direkt beobachteten α-Teilchen	Verhältnis der 11,0-Teilchen zu den 9,2-Teilchen
	$R = 9{,}2$ cm	$R = 11{,}0$ cm	$R > 11$ cm		
Bates und Rogers, Sz. 1924	38	12,6	6,5	—	1 : 3
Rutherford u. Chadwick, Sz. 1924	30	5	0	—	1 : 6
Yamada, Sz. 1925	20	0	0	—	—
Philipp, W. 1926	12	2,2 (1,6)	0 (0,5)	26	1 : 5,5 (7,5)
Philipp u. Donat, W. 1928	29	4	0,5	221	1 : 7,5

Sz. = Szintillationsmethode. W. = Wilsonsche Nebelmethode.

Reichweite festgestelit, aber sie können keine Aussage über die Natur dieser Teilchen machen. Nach unseren Aufnahmen müssen auch noch α-Teilchen mit größerer Reichweite als 11 cm vorhanden sein. Ob auch sie einer definierten Geschwindigkeitsgruppe angehören, kann nur durch weitere Versuche entschieden werden, die sich wohl am leichtesten mit den in dieser Arbeit angewandten stereoskopischen Filmaufnahmen nach der Wilsonschen Nebelmethode ausführen lassen.

Interessant ist natürlich die Frage nach dem Ursprung der weitreichenden Strahlen. E. Rutherford* hat z. B. bei der Beschreibung seines neuen Kernmodells angenommen, daß die normalen α-Strahlen auf das Freiwerden eines Satelliten aus einer bestimmten Quantenbahn zurückzuführen sind, während die seltenen weitreichenden Teilchen aus anderen, wahrscheinlich tiefer liegenden Kernteilen stammen sollen. Bemerkenswert ist ferner, daß α-Strahlen übernormaler Reichweite bisher mit Sicherheit nur bei solchen radioaktiven Elementen gefunden sind, die an Verzweigungsstellen der Zerfallsreihen stehen. Durch Untersuchung weiterer α-Strahler wird man Aufschluß erhalten können, ob Strahlen extremer Reichweite nur auf derartige Elemente beschränkt sind. Entsprechende Untersuchungen beim Polonium haben wir deshalb bereits in Angriff genommen.

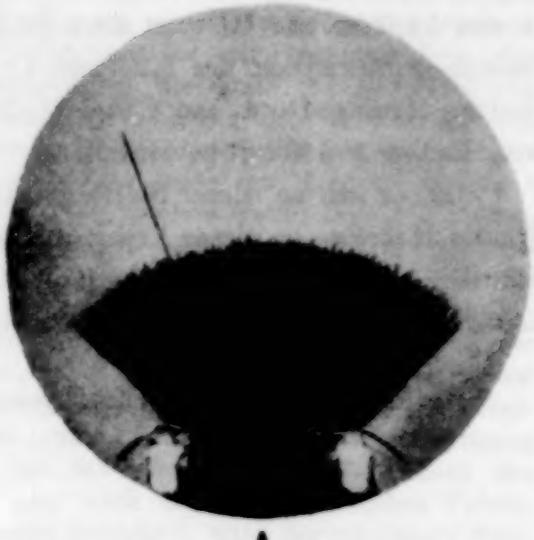


Fig. 6.
Weitreichender α-Strahl des Ra C (10,3 cm Länge) etwa 3,5 mal vergrößertes Filmbild.

Zusammenfassung.

1. Die im Jahre 1926 mitgeteilte Untersuchung der weitreichenden α-Teilchen des Ra C nach der Wilsonschen Nebelmethode wurde fortgesetzt. Die Aufnahmetechnik wurde dadurch verbessert, daß die Platten-

* E. Rutherford, Phil. Mag. (7) **4**, 580, 1927. Auch D. Enskog gibt in seiner soeben erschienenen Arbeit „Magnetismus und Kernbau", ZS. f. Phys. **52**, 203, 1928. Erklärungsmöglichkeiten für das Auftreten weitreichender Strahlen.

kamera durch einen Kinoaufnahmeapparat ersetzt wurde, der für stereoskopische Einzelaufnahmen auf Normalkinofilm umgebaut war.

2. Auf 3000 Aufnahmen konnten insgesamt 221 weitreichende α-Strahlen festgestellt werden. Die Reichweitekurve dieser Strahlen läßt zwei Geschwindigkeitsgruppen von 9,2 und 11,0 cm Reichweite erkennen. Außerdem wurden noch einige Teilchen mit einer Reichweite größer als 11 cm beobachtet.

3. Auf 10^6 normale α-Teilchen kommen 29 α-Teilchen von 9,2 cm, 4 von 11,0 cm und 0,5 von noch größerer Reichweite. Diese Ergebnisse bestätigen bezüglich der 9,2- und 11,0-Teilchen durchaus die Resultate, welche Rutherford und Chadwick bei der Nachprüfung der Angaben von Bates und Rogers erhielten.

Es sei uns an dieser Stelle gestattet, Fräulein Professor L. Meitner für das Interesse an dieser Arbeit und der Agfa, I. G. Farbenindustrie A. G. für die kostenlose Überlassung des in dieser Arbeit verwandten Filmmaterials unseren Dank auszusprechen.

Berlin-Dahlem, den 24. November 1928.

Die Temperaturstrahlung der Fixsterne.

Von **Alfred Brill** in Neubabelsberg.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 22. November 1928.)

Einleitend werden die Prinzipien einer Temperaturdefinition für die Fixsternstrahlung erläutert. Die Farbtemperatur bezieht sich auf die Form der Energiekurve, die Strahlungstemperatur auf die Intensität der vom Stern zu uns gelangenden Strahlung. Da die Sonne nicht wie ein vollkommen schwarzer Körper strahlt, erhält man je nach dem Spektralbereich verschiedene Farbtemperaturen. Mit bekannten Daten wird die Strahlungstemperatur der bolometrischen, der visuellen und der photographischen Helligkeit für die Sonne bestimmt. Die von Wilsing und Rosenberg aus der Intensitätsverteilung in den Sternspektren abgeleiteten Farbtemperaturen werden einer eingehenden Kritik unterzogen. Die Farbtemperatur der Fixsterne hängt wie die der Sonne von dem Spektralgebiet ab, auf das sich die Messungen beziehen. Die mittlere Wellenlänge der Sampsonschen spektralphotometrischen Beobachtungen liegt zwischen den mittleren Wellenlängen der Wilsingschen und der Rosenbergschen. Der photographische Farbenindex (photographische minus visuelle Helligkeit) und der Wärmeindex (visuelle minus bolometrische Helligkeit) können zur Sicherung der Farbtemperaturskale benutzt werden, wenn man die beobachteten Helligkeiten auf ein einheitliches, durch Rechnung festgelegtes System reduziert. Die Strahlungstemperatur der Fixsterne wird bestimmt erstens indirekt durch Berücksichtigung der Abweichungen der Sternstrahlung von der schwarzen Strahlung nach den spektralphotometrischen Beobachtungen oder nach den photographischen Farbenindizes, zweitens direkt aus der scheinbaren Helligkeit, wenn der scheinbare Halbmesser des Sternes bekannt ist. Den Schluß des Aufsatzes bildet eine Zusammenstellung der Temperaturen von 14 hellen Fixsternen, die von verschiedenen Autoren mit verschiedenen Instrumenten nach verschiedenartigen Beobachtungs- und Reduktionsmethoden erhalten wurden.

Die Strahlung und die Temperatur. Der Ursprung der im kontinuierlichen Spektrum oder in irgend einer Integralhelligkeit* beobachteten Strahlung liegt in einer verhältnismäßig dünnen Schicht, der Sternphotosphäre. Da die Temperatur innerhalb dieser Schicht nach innen zu ansteigt, überlagern sich Strahlungen von Schichten verschiedener Temperatur. Der Durchlässigkeitskoeffizient der photosphärischen Schicht ist für die sichtbare Strahlung größer als für die ultrarote und ultraviolette**. Jene stammt aus tiefen und heißen Schichten der Sternphotosphäre, die ultrarote und ultraviolette dagegen aus hohen und kühlen.

---

* Die Integralhelligkeit der bolometrischen, der visuell und der photographisch wirksamen Strahlung begreift die Wirkung der selektiven Sternabsorption ein, welche in der umkehrenden Schicht des Sternes entsteht.

** Ragnar Lundblad, On the radiation and temperature of the external photospheric layers. Astrophys. Journ. **58**, 113, 1923; Referat in Naturwiss. **12**, 334, 1924.

Die spektrale oder die Integralhelligkeit ist ein Gemisch verschiedenartigster Strahlungen, herrührend von den ungleich zur Gesichtslinie orientierten Teilen der Sternphotosphäre. Je mehr die Richtung der aus der Sternoberfläche austretenden Strahlung von der radialen abweicht, um so länger ist der Weg, den sie in der absorbierenden Photosphäre und Atmosphäre zurücklegt. In den Randzonen stammt die Strahlung aus den oberen und kühleren, im zentralen Teil der Sternscheibe aus den tieferen und heißeren Schichten der Photosphäre. Das beobachtete Spektrum des Gesamtlichtes der Sterne ist durch Übereinanderlagerung zahlreicher Einzelspektren entstanden, die zu verschieden heißen Schichten gehören.

Will man aus der Natur der von den Fixsternen zu uns dringenden Strahlung Schlüsse über ihre Temperatur ziehen, so handelt es sich um die Temperatur derjenigen Schicht, von der die Strahlung hauptsächlich ausgeht. Da verschieden tiefe und heiße Schichten zu der Strahlung beitragen, gehört die Temperatur nicht zu einer bestimmten Schicht, sondern ist ein mittlerer Wert für eine Schichtenfolge.

Die Berechnung der wahren Temperatur setzt die Kenntnis des Absorptionsvermögens der die Photosphäre bildenden Gasmassen voraus. Dieses hängt im allgemeinen von der Art des Gasgemenges, von der Temperatur und von der Strahlungsart ab. Solange man nicht weiß, welches Gas oder Gasgemisch in der Sternphotosphäre strahlt, läßt sich die wahre Temperatur nicht einwandfrei physikalisch bestimmen.

Genau bekannt ist das Strahlungsgesetz des absolut schwarzen Körpers; es bleibt zurzeit nur übrig, dies Gesetz anzuwenden. Das Temperaturproblem wird damit auf die Ermittlung der effektiven Temperatur zurückgeführt, bei der ein schwarzer Körper von den gleichen Dimensionen wie der Stern denselben Strahlungseffekt liefert. Die effektive Temperatur ist grundsätzlich nur ein passendes physikalisches Arbeitselement, dessen Einführung notwendig ist, weil uns die physikalische und die chemische Konstitution der Fixsterne in den photosphärischen Schichten unbekannt ist. Da die Emission des schwarzen Körpers ein Maximum der Strahlung bildet, welche ein Körper bei einer bestimmten Temperatur aussendet, so erhält man mit der effektiven Temperatur einen unteren Grenzwert der wahren Temperatur.

Die Farbtemperatur und die Strahlungstemperatur. Die in der Praxis übliche Methode der Temperaturbestimmung fußt auf der Messung der Helligkeitsverteilung im kontinuierlichen Spektrum. Die

Darstellbarkeit der Form der Energiekurve durch die Plancksche Strahlungsgleichung:

$$E_\lambda = C\lambda^{-5}/e^{c_2/\lambda T} - 1; \quad c_2 = 1{,}435\,\text{cm grad},$$
$$C = 3{,}696 \cdot 10^{-5}\,\text{erg cm}^2\,\text{sec}^{-1}$$

führt zu einem rechnerisch bestimmbaren Wert der effektiven Temperatur. Die Messung der Gesamtstrahlung gibt bei Anwendung des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes:

$$S = \sigma \cdot T^4; \quad \sigma = 5{,}72 \cdot 10^{-5}\,\text{erg cm}^{-2}\,\text{sec}^{-1}\,\text{grad}^{-4}$$

ebenfalls einen Wert für die effektive Temperatur. Messungen der Strahlungsintensität innerhalb eines mehr oder minder weit begrenzten Spektralbereiches dienen dem gleichen Zwecke. Die an die Gestalt der Energiekurve anknüpfende Methode hat gegenüber der die Strahlungsintensität benutzenden den Vorzug, daß sie von der Kenntnis des scheinbaren Sterndurchmessers unabhängig ist.

Verhalten sich die Sterne wie schwarze Strahler, so liefern alle Methoden den gleichen Wert für die effektive Temperatur, welche dann auch gleich der wahren Temperatur der strahlenden Schicht ist. Bei nichtschwarzer Strahlung führen im allgemeinen die einzelnen Methoden nicht zu dem gleichen Wert. Über die Beziehung der wahren zur effektiven Temperatur kann man a priori nichts Bestimmtes aussagen.

Erfahrungsgemäß stellt die Plancksche Strahlungsgleichung die Intensitätsverteilung im Spektrum der Sterne nur näherungsweise dar. Je nach der Wahl des Spektralbereiches liefern die spektralphotometrischen Beobachtungen für die gleichen Sterne verschiedene Temperaturen. Die Bestimmung der Temperatur aus der Strahlungsintensität gibt ebenfalls mehr oder weniger voneinander abweichende Werte. Um den verschiedenen Charakter der Temperaturen deutlich hervortreten zu lassen, sind von mir die Begriffe der Farb- und der Strahlungstemperatur in die astronomische Terminologie eingeführt worden*.

Die Farbtemperatur bezieht sich auf die Form der Energiekurve und entspricht der Temperatur eines schwarzen Strahlers, welcher nahezu die gleiche Gestalt der Energiekurve zeigt wie der Stern. Innerhalb eines kleinen Spektralbereiches kann man immer mit einer den Beobachtungsfehlern entsprechenden Genauigkeit eine Angleichung der beob-

---

* A. Brill, Die Strahlung der Sterne. Veröffentl. Univ. Sternwarte Berlin-Babelsberg 1924.

achteten Energiekurve an den schwarzen Strahler erzielen*. Unebenheiten im Verlauf der Energiekurve, wie sie, abgesehen von den eigentlichen Beobachtungsfehlern, durch die Absorptions- und Emissionslinien im Spektrum bedingt sind, geben, wenn der Spektralbereich schmal ist, einen unrichtigen Gradienten der Energiekurve und täuschen eine falsche Farbtemperatur vor. Weicht die Energiekurve des Sternes systematisch von der des schwarzen Strahlers ab, so unterscheiden sich die Farbtemperaturen je nach dem Spektralbereich voneinander. Will man aus der Gestalt der Energiekurve einen für den Stern typischen Wert der Farbtemperatur ableiten, so wird man einen möglichst weiten Spektralbereich auswählen. Die zugehörige Farbtemperatur ist so zu bestimmen, daß ein gewisser Ausgleich zwischen den positiven und den negativen Abweichungen der Energiekurve des Sternes und des schwarzen Strahlers stattfindet. Bildet man für eine Reihe von Wellenlängen den Quotienten der Energiewerte des Sterns gegen den schwarzen Körper, so ist derjenige schwarze Strahler der beobachteten Energiekurve in der Form am ähnlichsten, bei der die Variation des Quotienten mit der Wellenlänge am kleinsten ist. Dabei gibt man dem Quotienten ein um so höheres Gewicht, je größer der absolute Energiewert der Sternstrahlung ist.

An und für sich hat die Farbtemperatur nur eine fiktive Bedeutung; sie dient vor allem dazu, die Abweichungen vom Planckschen Strahlungsgesetz zahlenmäßig festzulegen. Berücksichtigt man rechnerisch die Ungleichheiten in ähnlicher Weise, wie ich es in der Veröffentlichung Berlin-Babelsberg 1924 getan habe, so kann man jede Art von Farbenindex dazu benutzen, die Temperaturskale zu prüfen und die Farbtemperatur der Einzelsterne aus ihren Farbenäquivalenten zu bestimmen.

Die Farbtemperatur ist wohl ein Charakteristikum für die Form der Energiekurve, aber nicht für die Intensität der Strahlung. Für die stellarastronomische Forschung hat meist nur die Strahlungstemperatur, sei es der visuellen, der photographischen oder der bolometrischen Helligkeit eine Bedeutung Man bezeichnet als Strahlungstemperatur für einen gewissen Spektralbereich diejenige Temperatur, welche ein schwarzer Körper haben muß, um die Strahlung dieses Bereiches in gleicher Intensität zu emittieren wie der Stern. Bei schwarzer Strahlung entspricht der Emission jeder Schwingungszahl die gleiche Temperatur; bei nicht-

* H. Siedentopf bezeichnet die Temperatur, welche durch den Gradienten der Energiekurve bestimmt wird, als Gradationstemperatur. H. Siedentopf, Grundlagen der Kosmogonie. Veröffentl. Univ. Sternwarte Göttingen, Heft 3, 1928.

schwarzer Strahlung gehören zu den einzelnen Spektralbereichen mehr oder weniger verschiedene Strahlungstemperaturen. Je nachdem man bolometrische, visuelle, photographische oder lichtelektrische Helligkeiten gemessen hat, unterscheidet man die Strahlungstemperatur der bolometrischen, visuellen, photographischen und lichtelektrischen Helligkeit. Wenn die Form der Energiekurve des Sternes nur wenig von der des schwarzen Strahlers abweicht, sind alle Strahlungstemperaturen nahezu einander gleich. Bezieht sich in diesem Falle die Farbtemperatur auf den Gesamtverlauf der Energiekurve, so sind Farb- und Strahlungstemperatur nur dann voneinander verschieden, wenn sich der Stern wie ein grauer Strahler verhält. Die Divergenz der verschiedenen Temperaturen bildet einen sicheren Maßstab für die Abweichungen der Sternstrahlung von der schwarzen Strahlung.

A. Die Farbtemperatur und die Strahlungstemperatur der Sonne.

Von allen Sternen ist die Energiekurve der mittleren Sonnenstrahlung am genauesten bekannt. Die einzelnen Autoren geben für die Farbtemperatur der Sonne mehr oder weniger verschiedene Werte. Für das visuell wirksame Spektralgebiet λ 451 bis 642 mμ habe ich die Messungsresultate von Abbot und Fowle auf dem Mt. Wilson und Mt. Whitney, von Müller und Kron in Teneriffa und von Wilsing in Potsdam (photographisch und bolometrisch) zu Mittelwerten vereinigt*. Die Farbtemperatur der mittleren Sonnenstrahlung wird gemäß der Planckschen Strahlungsgleichung 6650°. Die Reste sind verschwindend klein, im Maximum 0,02 m (abgesehen von der Wellenlänge 451 mμ mit der Abweichung 0,06 m). Müller und Kron finden aus der Form der Energiekurve im Spektralbereich λ 430 bis 679 mμ die Farbtemperatur 6300°**. Wilsing erhält aus photographischen und bolometrischen Messungen im Sonnenspektrum, die sich über das Spektralgebiet λ 400 bis 2128 mμ erstrecken, die Farbtemperatur 5900°***. Diese Zahl ist ein Mittelwert

* A. Brill, Spektralphotometrische Untersuchungen. Astr. Nachr. Nr. 5223 und 5254, 1923.

** G. Müller und E. Kron, Die Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre und die Energieverteilung im Sonnenspektrum nach spektralphotometrischen Beobachtungen auf der Insel Teneriffa. Publ. Astrophys. Observ. Potsdam Nr. 64, 1912.

*** J. Wilsing, Über die Helligkeitsverteilung im Sonnenspektrum nach Messungen an Spektrogrammen. Publ. Astrophys. Observ. Potsdam Nr. 66, 1913; J. Wilsing. Über die Helligkeitsverteilung im Sonnenspektrum nach bolometrischen Messungen und über die Temperatur der Sonnenphotosphäre. Publ. Astrophys. Obs. Potsdam Nr. 72, 1917.

von zwei der rechnerischen Ausgleichung zugrunde gelegten: Bei der einen (5810°) ist die Verteilung der Vorzeichen in den Resten gleichmäßig; bei der anderen (6070°) überwiegen die positiven Abweichungen im Sinne Beobachtung minus Rechnung. H. H. Plaskett legt bei der Bestimmung der Farbtemperatur der Sonne besonderen Wert darauf, möglichst von Absorptionsstreifen freie Teile des Spektrums zu messen. Die Beobachtungen beziehen sich auf die Strahlung des zentralen Teiles der Sonne und werden in dem Spektralbereich λ 400 bis 670 mμ durch einen schwarzen Strahler von der Temperatur 6700 bis 7000° dargestellt*.

Die Farbtemperatur der mittleren Sonnenstrahlung ist um so kleiner, je größer der Spektralbereich ist. Die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung nehmen mit wachsendem Spektralbereich zu; die Energiekurve der mittleren Sonnenstrahlung läßt sich nicht in ihrem ganzen Verlauf durch die Plancksche Gleichung darstellen. Die Farbtemperatur 6650° ist aus der Gestalt der Energiekurve im Spektralbereich λ 451 bis 642 mμ berechnet. Die Energiekurve der Sonne besitzt in diesem Bereich, in den das Maximum der Strahlung fällt, eine markante Spitze, deren Form der Temperatur eines schwarzen Strahlers von 7000° entspricht.

Durch zahlreiche Arbeiten des Smithsonian Instituts sind uns von der Sonne bekannt: die Gesamtstrahlung, die Strahlung in den einzelnen Wellenlängen und der Helligkeitsabfall von der Mitte bis zum Rande der Sonnenscheibe (bolometrisch und spektral gemessen). Minnaert** hat nach diesen Daten absolute Energiekurven der mittleren und der zentralen Sonnenstrahlung gezeichnet (Fig. 1). Die Größe der Ordinaten gibt für jede Wellenlänge die Strahlung in erg pro sec pro qcm der Sonnenoberfläche. Die gestrichelten Kurven sind die Energiekurven der schwarzen Strahler von der Temperatur 5000, 6000 und 7000°.

Schon die oberflächliche Betrachtung der Figur lehrt, daß es nicht leicht ist, aus der Form der Energiekurve der Sonne die Farbtemperatur zu bestimmen. Solange der Spektralbereich klein ist, kann man immer den Verlauf der Energiekurve durch die Plancksche Strahlungsgleichung darstellen. Je nach der Lage im Spektrum gleicht die Form der Energiekurve schwarzen Strahlern verschieden hoher Temperatur. Wenn man von der Depression der Energiekurve im Ultraviolett absieht, die zum

---

* H. H. Plaskett, The wedge method and its application to astronomical spectrophotometry. Publ. Dominion. Astrophys. Observ. Victoria **2**, Nr. 12, 1923.

** M. Minnaert, Recent data on solar radiation converted into absolute measure. Bull. Astron. Inst. Netherland **2**, Nr. 51, 1924.

Teil auf den Einfluß der Absorptionslinien zurückzuführen ist, so gleicht die Energiekurve der mittleren Sonnenstrahlung im Spektralbezirk λ 0,4 bis 1,0 μ einem schwarzen Strahler von der Temperatur 6000 bis 7000°, im Spektralbezirk λ 1,0 bis 2,0 μ einem solchen von der Temperatur 5000 bis 6000°. Je weiter die Grenzen des Spektralbereiches gesteckt sind, in dem man die Sonnenenergiekurve durch die Plancksche Gleichung annähern will, um so größer sind die Abweichungen im Sinne Beobachtung minus Rechnung. Schwierigkeiten erheben sich bei der Frage, wie man innerhalb eines weiten Spektralbereiches die schwarze Strahlungskurve

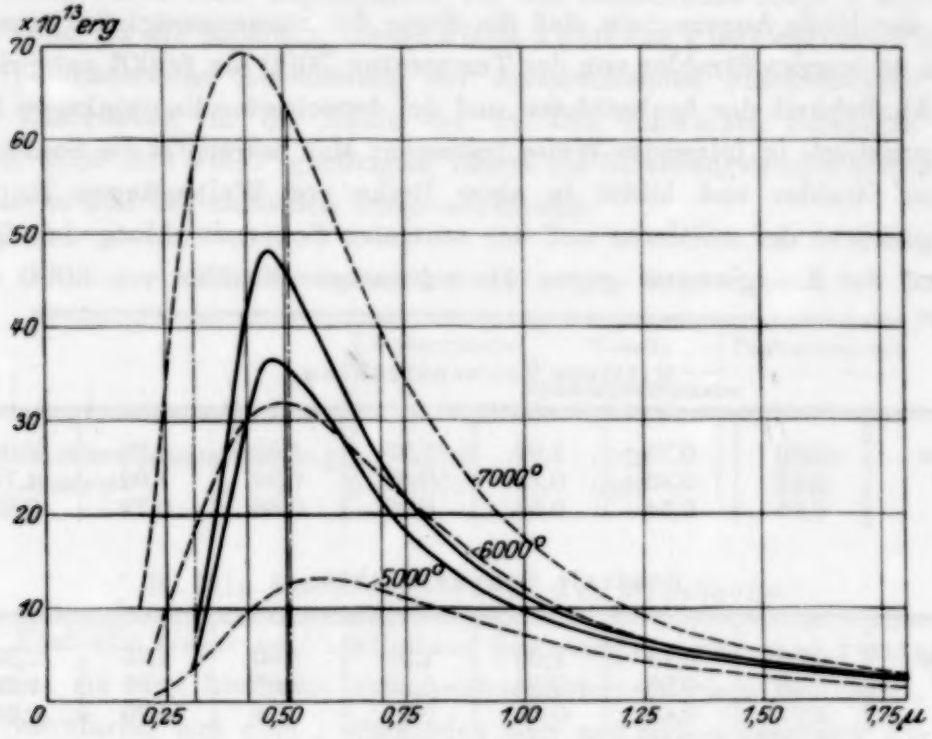


Fig. 1. Energiekurve der mittleren und zentralen Sonnenstrahlung.

definiert, welche die Sonnenenergiekurve am besten darstellt. Im wesentlichen bleibt es in das Belieben des Rechners gestellt, welche Annäherung ihm am günstigsten erscheint (vgl. die beiden Ansätze von Wilsing für die Farbtemperatur der Sonne nach Publ. Astrophys. Observ. Potsdam Nr. 72).

Kennt man die Sonnenenergiekurve in ihrem ganzen Verlauf vom Ultrarot bis zum Ultraviolett, so könnte man als Farbtemperatur der Sonne diejenige bezeichnen, bei der die von der Energiekurve der Sonne und von der ihr angeglichenen schwarzen Strahlungskurve umschlossenen Flächenstücke, je nachdem sie einen Überschuß oder Defekt ergeben,

gerade einander aufheben. In diesem Falle wird von der Energiekurve der Sonne der gleiche Flächeninhalt umschlossen wie von der Kurve des schwarzen Strahlers. Gemäß dieser Definition wäre die Farbtemperatur der Sonne in dem Grenzfall unendlich weit gesteckter Spektralgrenzen gleich der Strahlungstemperatur der Gesamtstrahlung (vgl. Wilsings ersten Ansatz 5810° für die Farbtemperatur der Sonne, die nur wenig größer ist als die von Abbot aus der Solarkonstanten bestimmte Strahlungstemperatur 5750° der bolometrischen Helligkeit).

Bei dieser Umschreibung der Farbtemperatur wird ihr Charakteristikum, die Gestalt der Energiekurve, ganz außer acht lassen; lehrt doch der bloße Augenschein, daß die Form der Sonnenenergiekurve mehr einem schwarzen Strahler von der Temperatur 7000 als 6000° entspricht. Die Ähnlichkeit der beobachteten und der berechneten Energiekurve läßt sich praktisch in folgender Weise festlegen: Man betrachtet die Sonne als grauen Strahler und bildet in einer Reihe von Wellenlängen für die Energiekurve der mittleren und der zentralen Sonnenstrahlung den Quotienten der Energiewerte gegen die schwarzen Strahler von 6000 und 7000°.

Mittlere Sonnenstrahlung.

λ in μ .	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
6000° . .	1,12	0,85	0,79	0,87	0,93	1,00	1,18
7000 . .	0,55	0,54	0,56	0,63	0,68	0,77	0,93

Zentrale Sonnenstrahlung.

λ in μ .	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
6000° . .	1,45	0,96	0,90	0,98	1,02	1,02	1,18
7000 . .	0,71	0,63	0,63	0,71	0,74	0,79	0,93

Es ist derjenige schwarze Strahler in der Form der Energiekurve der Sonne am ähnlichsten, bei welcher die Variation des Quotienten mit der Wellenlänge am kleinsten ist. Dabei gibt man dem Quotienten ein um so höheres Gewicht, je größer der absolute Energiewert der Sternstrahlung ist. Nach der obigen Tabelle entspricht die Energiekurve der mittleren Sonnenstrahlung im Hauptteil einem grauen Strahler von annähernd 7000° mit dem Absorptionskoeffizienten 0,55, die der zentralen einem grauen Strahler von der gleichen Temperatur mit dem Absorptionskoeffizienten 0,64.

Wenn man innerhalb eines weiten Spektralbereiches die schwarze Strahlungskurve bestimmt, welche die Energiekurve der Sonne am besten

darstellt, so erhält man nur einen rohen Durchschnittswert der Farbtemperatur. Will man eine bessere Annäherung erreichen, so wird man sich auf schmale Spektralbereiche beschränken; es ist dann zu jeder Farbtemperatur der Spektralbereich anzugeben, auf den sich jene bezieht.

An Hand der Fig. 1 läßt sich die Strahlungstemperatur der bolometrischen, der visuellen und der photographischen Helligkeit berechnen; dabei gilt als Strahlungstemperatur der Sonne diejenige, welche ein schwarzer Körper haben muß, um die Strahlung des betreffenden Spektralbereiches in gleicher Intensität zu emittieren wie die Sonne. Als Empfindlichkeitsgrenzen sind angenommen für das menschliche Auge λ 420 und λ 700 mμ, für die photographische Platte λ 310 und λ 507 mμ (vgl. Fig. 1). Die planimetrische Ausmessung der entsprechenden Flächenstücke und ihre Einordnung in die Skale der zu den schwarzen Strahlern von 5000, 6000 und 7000° gehörigen, liefert die Strahlungstemperaturen der mittleren und der zentralen Sonnenstrahlung.

Strahlungstemperaturen der Sonne.

	Bolometrische	Visuelle	Photographische
	Strahlungstemperatur		
Mittlere Sonnenstrahlung	5775°	6075°	5835°
Zentrale „	6075	6435	6190

B. Die Farbtemperatur der Fixsterne.

Fast alle bisher veröffentlichten Sterntemperaturen sind Farbtemperaturen; sie sind bestimmt aus spektralphotometrischen Messungen, aus der Sternfarbe, aus dem Farbenindex oder aus anders gearteten Farbenäquivalenten. Die spektralphotometrischen Messungen beziehen sich auf Spektralbereiche, die mehr oder weniger frei von Absorptions- und Emissionslinien sind. Die Sternfarbe und ihre Äquivalente bilden ein Kollektivmaß für die Intensitätsverteilung im Sternspektrum und begreifen die Wirkung der Absorptions- und Emissionslinien ein. Man wird deshalb a priori nicht erwarten, daß die aus der Farbe oder aus ihren Äquivalenten abgeleitete Temperaturskale mit der aus den spektralphotometrischen Messungen gefundenen übereinstimmt.

1. Die Divergenz der Temperaturskalen von Wilsing und Rosenberg. In größerem Umfang sind Untersuchungen über die Intensitätsverteilung in dem kontinuierlichen Spektrum der Fixsterne von

Wilsing, Scheiner und Münch* nach visuellen, von Rosenberg** nach photographischen Methoden angestellt worden. Die Darstellbarkeit der Form der Energiekurve durch die Plancksche Strahlungsgleichung führt zu einem rechnerisch bestimmbaren Wert der Farbtemperatur.

Die Temperaturen, welche Rosenberg aus den photographisch bestimmten Energiekurven abgeleitet hat, erreichen bei einigen Sternen des frühen A-Typus unendlich hohe Werte (ζ Ursae maioris, α Coronae borealis); die von Wilsing aus spektralphotometrischen Okularbeobachtungen erhaltenen Temperaturen überschreiten selbst bei den heißesten Sternen 15000° nur in ganz seltenen Fällen. Die Unterschiede zwischen beiden Temperaturreihen verschwinden bei 5000° und treten bei den späten Spektraltypen mit entgegengesetztem Vorzeichen auf. Wie Rosenberg gezeigt hat, lassen sich beide Temperaturskalen durch eine lineare Transformation ineinander überführen. Stellt man den reziproken Wert der Temperatur nach Wilsing c_2/T_W (Wien-Plancksche Strahlungskonstante c_2 gleich 1,435 cm . grad) als Funktion des Rosenbergschen c_2/T_R graphisch dar, so gruppieren sich die Punkte sehr nahe um eine Gerade, deren Gleichung lautet:

$$c_2/T_R = \frac{10}{6{,}2} \cdot c_2/T_W - 2{,}00.$$

Die Wilsingschen Werte c_2/T_W und die Rosenbergschen c_2/T_R lassen sich miteinander in Einklang bringen, wenn man entweder die Potsdamer Skale im Verhältnis 10 : 6,2 erweitert oder die Rosenbergsche im umgekehrten Verhältnis zusammendrückt.

In die Fig. 2 sind die relativen spektralen Farbenindizes*** eines BO-Sternes gegen einen MO-Stern in der Skale von Wilsing (·) und von Rosenberg (×) als Funktion der reziproken Wellenlänge eingetragen****. Man erkennt zunächst, daß in dem gemeinsamen Spektralbereich keine systematischen Unterschiede zwischen den visuellen und

---

* J. Wilsing und J. Scheiner, Temperaturbestimmung von 109 helleren Sternen aus spektralphotometrischen Beobachtungen. Publ. Astrophys. Observ. Potsdam Nr. 56, 1909; J. Wilsing, Effektive Temperaturen von 199 helleren Sternen nach spektralphotometrischen Messungen von J. Wilsing, J. Scheiner und W. Münch. Publ. Astrophys. Observ. Potsdam Nr. 74, 1919.

** H. Rosenberg, Photographische Untersuchung der Intensitätsverteilung in Sternspektren. Abh. K. Leop.-Karol. Deutsche Akad. d. Naturforscher **101**, Nr. 2, 1914.

*** Dies sind die spektralen Helligkeitsunterschiede eines BO- und eines MO-Sternes, bezogen auf ihre visuelle Helligkeitsdifferenz als Nullpunkt.

**** A. Brill, Spektralphotometrische Untersuchungen. Astron. Nachr. Nr. 5222, 1923. Referat in Naturwissensch. **12**, 699, 1924.

den photographischen Beobachtungen vorhanden sind und daß beide spektrale Skalen, die von Rosenberg und die von Wilsing, gleichberechtigt sind.

Man wird die Unstimmigkeit zwischen den Temperaturskalen von Wilsing und von Rosenberg daraus erklären, daß das Plancksche Gesetz in dem relativ weiten Spektralbereich der visuell und der photographisch wirksamen Strahlen nicht mehr erfüllt ist. Würden sich die Sterne wie schwarze Strahler verhalten, so müßte die Farbenindexkurve

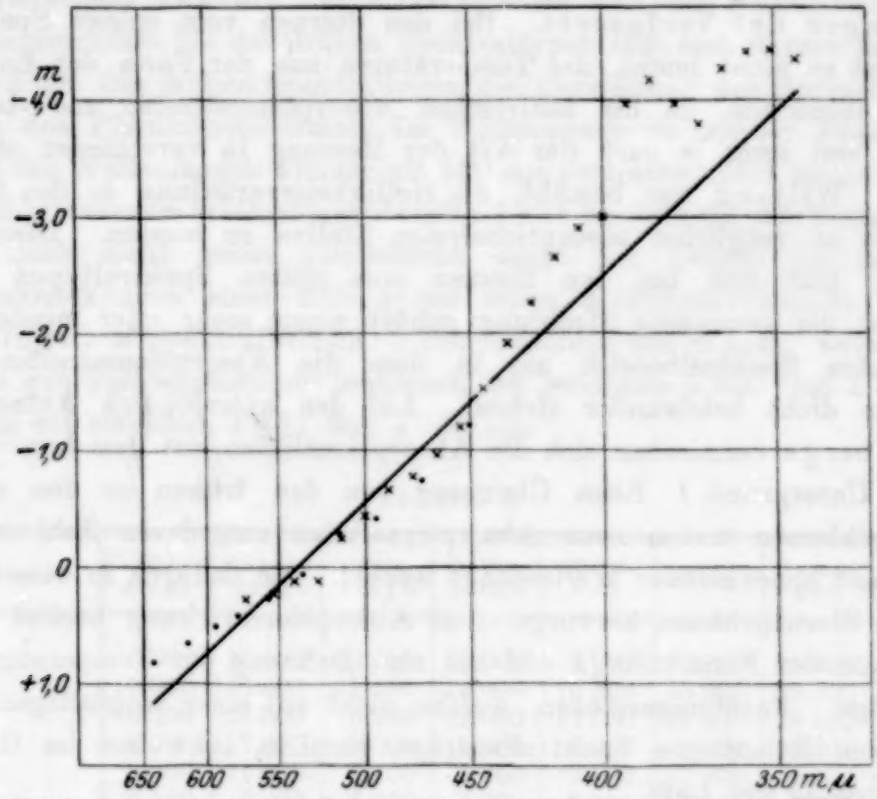


Fig. 2. Relativer spektraler Farbenindex eines BO-Sternes gegen einen MO-Stern.
● Wilsings Messungen. × Rosenbergs Messungen.

annähernd eine gerade Linie von der in der Fig. 2 gezeigten Gestalt sein. In Wirklichkeit ist dies nicht der Fall. Für die kurzen Wellenlängen zwischen λ 400 und 500 mμ ist der Gradient der beobachteten Farbenindexkurve größer als für die langen Wellenlängen zwischen λ 500 und 600 mμ. Man kann aus der Figur ablesen, wie sich die Gradienten der Farbenindexkurve in dem Wilsingschen und in dem Rosenbergschen Spektralbereich zueinander verhalten. Die Farbtemperaturen von Wilsing beziehen sich auf den Spektralbereich λ 451 bis 642 mμ; die in diesem Bereich zu den relativen Farbenindizes gehörigen Punkte (·) liegen nahezu auf einer Geraden, welche unter dem Winkel 32° gegen die Horizontale

geneigt ist. Die Farbtemperaturen von Rosenberg beziehen sich auf den Spektralbereich λ 400 bis 500 mμ; die relativen Indizes von Rosenberg ($\times$) werden in diesem Bereich angenähert durch eine Gerade dargestellt, welche den Winkel 46° mit der Horizontalen bildet. Die Tangenten der Winkel verhalten sich wie 6 : 10, in guter Übereinstimmung mit dem von Rosenberg angegebenen Überführungsverhältnis beider Temperaturskalen 6,2 : 10.

2. Die Ergebnisse der spektralphotometrischen Untersuchungen des Verfassers. Bei den Sternen vom späten Spektraltypus ist es nicht leicht, die Temperaturen aus der Form der Energiekurve abzuleiten, da die zahlreichen Absorptionsstreifen und -banden stören, und zwar je nach der Art der Messung in verschieden starker Weise. Wilsing war bemüht, die Helligkeitsverteilung in den Sternspektren an möglichst absorptionsfreien Stellen zu messen. Diese Bedingung läßt sich bei den Sternen vom späten Spektraltypus nicht erfüllen; die gemessene Strahlung gehört einem mehr oder minder eng begrenzten Spektralbereich an, in dem die Absorptionsstreifen verschieden dicht beieinander stehen. Auf den extrafokalen Aufnahmen Rosenbergs vermischen sich die Absorptionslinien mit dem kontinuierlichen Untergrund. Beim Übergang von den frühen zu den späten Spektralklassen treten neue Absorptionslinien auf, deren Zahl in der Regel mit abnehmender Wellenlänge wächst. Die dadurch in dem extrafokalen Sternspektrum hervorgerufene Absorptionswirkung besitzt einen Gang von der Form const/λ und hat eine Dehnung der Temperaturskale zur Folge. Farbtemperaturen, welche nicht auf einer sorgfältigen Auswahl von linienfreien Spektralbezirken beruhen, schweben im Grunde genommen in der Luft.

In welchem Ausmaß die Divergenz in den Temperaturskalen von Wilsing und von Rosenberg auf die selektive Absorption der besonders im Ultraviolett zahlreichen Absorptionslinien zurückzuführen ist — ein Faktum, welches für das Rosenbergsche Beobachtungsverfahren der extrafokalen Spektralaufnahmen sicherlich von Bedeutung ist —, läßt sich erst angeben, wenn man die Breite und die Intensität der in Betracht kommenden Linien kennt. Ob noch eine allgemeine mit der Wellenlänge veränderliche, in der Sternatmosphäre wirksame Absorption und Beugung vorhanden ist, und ob überhaupt das Plancksche Strahlungsgesetz in strenger Weise auf die Strahlung der Sterne anwendbar ist, bleibt vorläufig dahingestellt.

Verzichtet man auf die rechnerische Darstellung der Rosenbergschen Messungen im Ultraviolett jenseits λ 450 mμ durch das Plancksche Gesetz, so ist die Weite der Temperaturskalen von Wilsing und von Rosenberg einander gleich, wie man aus der gegenseitigen Lage der (·) und (×) in dem Spektralbereich λ 451 bis 571 mμ sieht (Fig. 2). Die Farbtemperaturen der Sterne vom frühen Spektraltypus liegen bei Wilsing tiefer als bei Rosenberg; vom Spektraltypus A O ab stimmen nach meiner Rechnung beide Temperaturskalen miteinander überein*. Die Divergenz zwischen der Wilsingschen und der Rosenbergschen Temperaturskale bei den frühen Spektraltypen läßt sich daraus erklären, daß ich bei den frühen Spektraltypen die Darstellung der Beobachtungen durch das Plancksche Gesetz im Widerspruch zu meiner Festsetzung selbst für Wellenlängen kleiner als 450 mμ anstrebte. Daß sogar in dem visuell wirksamen Wellenlängenbereich λ 451 bis 642 mμ die Temperaturskale sich nicht genau gleichbleibt, zeigt der Verlauf der relativen Farbenindexkurve eines B O- gegen einen M O-Stern (Fig. 2) in dem Wilsingschen Spektralbereich. Der Gradient der Kurve, welcher die Weite der Temperaturskale bestimmt, ist zwischen λ 550 und λ 642 mμ kleiner als zwischen λ 451 und λ 550 mμ.

Tabelle 1.

Spektrum	Wilsing I	Rosenberg I	Wilsing II	Rosenberg II	Mittelwert	King	Sampson	Brill
B O	10 500°	70 000°	12 300°	30 000°	23 800°	22 700°	25 000°	22 000°
B 5	10 000	45 000	11 450	18 000	16 300	15 200	16 400	17 700
A O	9 300	28 000	10 250	12 000	11 800	11 600	13 100	13 500
A 5	8 100	17 000	9 000	9 000	9 000	8 800	10 800	10 500
F O	7 000	11 000	7 950	7 850	7 900	7 900	8 900	8 550
F 5	6 100	8 000	6 880	6 930	6 900	7 000	7 400	7 350
G O	5 300	6 100	5 980	6 000	6 000	6 040	6 200	5 980
G 5	4 650	4 800	5 250	5 200	5 230	5 090	5 100	4 860
K O	3 900	3 600	4 570	4 570	4 570	4 570	4 200	4 370
K 5	3 300	2 850	3 860	3 840	3 850	3 640	3 500	3 460
M O	3 100	2 600	3 550	3 580	3 570	3 430	3 400	3 240

In der Tabelle 1 sind die Farbtemperaturen Wilsings und Rosenbergs in der ursprünglichen Skale (Spalte 2 und 3) und in meiner Neureduktion (Spalte 4 und 5) geordnet nach dem Spektraltypus zusammengestellt. Die Zahlen der Spalte 6 sind für die Spektraltypen A 5 bis M O Mittelwerte der in den beiden vorangehenden Spalten aufgeführten

* A. Brill, Spektralphotometrische Untersuchungen, Astr. Nachr. Nr. 5254, 1923; Referat in Naturwissensch. **12**, 699, 1924.

Temperaturen. Die Farbtemperaturen der frühen Spektraltypen BO, B5 und AO sind durch lineare Extrapolation erhalten; sie liegen zwischen den Zahlen der Wilsingschen und der Rosenbergschen Skale, und zwar näher der letzteren als der ersteren.

Die mit den Farbtemperaturen der Spalte 6 berechneten spektralen Intensitäten sind mit der beobachteten Energieverteilung auf Grund der Wilsingschen und der Rosenbergschen Messungen verglichen. In dem von Wilsing vermessenen Spektralbereich λ 451 bis 642 mμ sind, abgesehen von den frühen Spektraltypen, die Unterschiede Beobachtung minus Rechnung von geringem Betrag.

Auffällig sind die drei größeren Abweichungen im Sinne B. minus R. bei λ 642, 494 und 472 mμ; sie betragen — 0,14 m, — 0,12 m und — 0,05 m. Die Spektralstellen liegen nicht weit von den Wasserstofflinien H_α λ 656 und H_β λ 486 mμ; von den H_β benachbarten Spektralstellen gibt der ihr am nächsten liegende λ 494 mμ eine größere Abweichung als λ 472 mμ. Die Unterschiede sind entweder reell; dann besagen sie, daß das kontinuierliche Spektrum der Sterne in der Nähe der Wasserstofflinien in ziemlich breiter, sich nach beiden Seiten erstreckender Front eine merkliche Aufhellung besitzt, die von breiten, dem Wasserstoff zugehörigen Emissionslinien herrührt. Oder aber die Aufhellung zu beiden Seiten der Wasserstoffabsorptionslinien ist nur scheinbar und als subjektiver Auffassungsfehler, hervorgerufen durch Kontrasteinflüsse, zu betrachten. Die Tatsache, daß die Größe der Restfehler vom Spektraltypus des Sternes unabhängig ist, scheint mehr dafür zu sprechen, daß die Ursache der Fehlerquelle weniger im Spektrum des Sternes, als vielmehr in dem der Vergleichslampe zu suchen ist.

Bei Rosenberg sind die Restfehler im Spektralbereich λ 454 bis 571 mμ für alle Spektraltypen meist verschwindend klein. In dem Bereich λ 345 bis 454 mμ geben die Rosenbergschen Messungen für jeden Spektraltypus die Unterschiede gegen die berechnete Energiekurve und damit die Größe der durch die Absorption bedingten Senkung der Energiekurve im Ultraviolett.

3. Die Prüfung der Farbtemperaturskale nach den Kingschen Farbenindizes. Unebenheiten im Verlauf der Energiekurve, wie sie. abgesehen von den eigentlichen Beobachtungsfehlern, durch die Absorptions- und Emissionsstreifen im Spektrum bedingt sind — auch systematische Abweichungen von der schwarzen Strahlung kommen in Betracht —, geben, wenn der Spektralbereich schmal ist, einen unrichtigen Gradienten der Energiekurve und täuschen damit eine falsche Farb-

temperatur vor. Bei den Integralhelligkeiten der visuell und der photographisch wirksamen Strahlung werden die Störungen, wenn sie auf relativ kleine Spektralbereiche beschränkt sind, zum Teil ausgeglichen. Es scheint daher vorteilhafter zu sein, die Farbtemperatur aus der Differenz der photographischen und der visuellen Helligkeit, d. h. aus dem photographischen Farbenindex zu bestimmen. Da die visuelle und die photographische Helligkeit die Wirkung der Absorptionslinien einbegreifen, darf man nicht erwarten, daß die aus dem photographischen Farbenindex abgeleitete Farbtemperaturskale genau mit der aus den spektralphotometrischen Beobachtungen gefundenen übereinstimmt.

Die visuelle und die photographische Helligkeit kommen in der Weise zustande, daß sich die Intensitäten schmaler Wellenlängenbereiche additiv zu einem Gesamteindruck vereinigen. Bezeichnet man mit $f(\lambda)$ die Empfindlichkeitsfunktion des menschlichen Auges, mit $g(\lambda)$ die der photographischen Platte, so sind unter der Voraussetzung, daß die Strahlung der Sterne die Eigenschaften des schwarzen Körpers besitzt, die visuelle und die photographische Flächenhelligkeit durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$M_v = -2{,}5 \log \int_0^\infty \left[\frac{C\lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T} - 1}\right] f(\lambda) \cdot p(\lambda)\, d\lambda,$$

$$M_{ph} = -2{,}5 \log \int_0^\infty \left[\frac{C\lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T} - 1}\right] g(\lambda) \cdot p(\lambda)\, d\lambda,$$

$p(\lambda)$ ist der Transmissionskoeffizient der Erdatmosphäre; die Konstante C hat den Wert $3{,}696 \cdot 10^{-5}$.

Die Berechnung der Integrale erfolgt durch planimetrische Ausmessung der entsprechenden Flächenstücke; zu dem Zwecke sind gewisse Grundannahmen über die Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre, über die Farbenempfindlichkeit des menschlichen Auges und der photographischen Platte (einschließlich der Farbendurchlässigkeit der optischen Apparatur) zu machen*.

Der Nullpunkt der rechnerisch bestimmten visuellen oder photographischen Flächenhelligkeit ist durch die Annahme festgelegt, daß in der Wellenlänge der maximalen Empfindlichkeit die volle Strahlung sowohl im menschlichen Auge als auch in der photographischen Platte

* A. Brill, Die Strahlung der Sterne, Veröffentl. Univ.-Sternwarte Berlin-Babelsberg 1924.

wirksam ist. Der Nullpunkt der empirischen Größenskalen ist willkürlich festgelegt; man ist übereingekommen, den Sternen des Spektraltypus A O die gleiche visuelle und photographische Helligkeit zu geben.

Wenn sich die Sterne wirklich wie schwarze Strahler der in Spalte 6 der Tabelle 1 aufgeführten Farbtemperaturen verhalten, so unterscheiden sich die rechnerisch ermittelten und die beobachteten Farbenindizes um eine Konstante. Die Diskussion des Beobachtungsmaterials lehrt, daß die Differenzen einen merklichen Gang mit dem Spektraltypus besitzen.

Die Unstimmigkeit zwischen Rechnung und Beobachtung ist darauf zurückzuführen, daß die Energiekurve der Sterne von der Planckschen Strahlungskurve abweicht und daß die visuelle und die photographische Helligkeit als Integralhelligkeit die abschwächende Wirkung der Absorptionsstreifen einbegreifen. Die hauptsächlichste Abweichung der Sternstrahlung von der schwarzen Strahlung besteht in der Depression der Energiekurve im Ultraviolett, wie sie von mir empirisch aus den weit ins Ultraviolett sich erstreckenden Messungen Rosenbergs bestimmt ist. Die Berücksichtigung der Senkung der Energiekurve bei der planimetrischen Ausmessung führt zu einer verhältnismäßig guten Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung.

4. Die isophoten Wellenlängen der visuellen und der photographischen Helligkeit. Die beobachteten Farbenindizes entsprechen den auf Grund der Planckschen Strahlungsgleichung berechneten nur dann, wenn das System der visuellen und der photographischen Flächenhelligkeit, wie es durch die Rechnung festgelegt ist, dem der Beobachtungen vollkommen gleichartig ist. Die Integralstrahlung der visuellen und der photographischen Helligkeit läßt sich durch die monochromatische Helligkeit in einer bestimmten Wellenlänge ersetzen*. In meiner Bezeichnungsweise ist für die „isophote Wellenlänge" die spektrale Intensität in der Planckschen Energiekurve bis auf eine Konstante gleich der visuellen oder der photographischen Helligkeit. Damit die Skale der beobachteten Farbenindizes mit den auf Grund des Planckschen Gesetzes berechneten übereinstimmt, muß die Energiestufe, welche beiden Farbenindizes in der Planckschen Energiekurve entspricht, einander gleich sein. Die isophoten Wellenlängen der visuellen und der photographischen Helligkeit selbst können mehr oder minder voneinander abweichen.

---

* A. Brill, Spektralphotometrische Untersuchungen, Astr. Nachr. Nr. 5234, 1923, Referat in Naturwissensch. **12**, 699, 1924; Die Strahlung der Sterne, Veröffentl. Univ.-Sternwarte Berlin-Babelsberg 1924; Die Strahlung der Sterne, Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften III, 1924.

Von den beiden Systemen isophoter Wellenlängen stützt sich das eine, welches ich als das fundamentale bezeichnet habe, auf die Annahme, daß die Sterne nahezu wie schwarze Körper strahlen. Die Empfindlichkeitsfunktion des menschlichen Auges und der photographischen Platte ist in bestimmter Weise vorgeschrieben. Das andere System der isophoten Wellenlängen ist aus den Beobachtungen erhalten und bezieht sich auf die Plancksche Strahlungskurve, welche den Verlauf der beobachteten Energiekurve am besten darstellt. Die Energiestufe in der Planckschen Kurve zwischen den zusammengehörigen isophoten Wellenlängen liefert den absoluten photographischen Farbenindex in dem rechnerisch festgelegten und in dem durch die Beobachtungen bestimmten System. Mit den Unterschieden in der Größe der Energiestufe läßt sich die Skale der beobachteten Farbenindizes auf die mit der Planckschen Gleichung berechnete reduzieren.

Nach meinen Untersuchungen sind die isophoten Wellenlängen der visuellen Helligkeiten der Revised Harvard Photometrie und der photographischen Helligkeiten von King merklich verschieden von denjenigen der rechnerisch festgelegten fundamentalen photometrischen Systeme (Tabelle 2). Die Energiestufe, welche den Farbenindizes entspricht, ist dagegen nahezu von der gleichen Größe. Die Korrektionen, welche an die Kingschen Farbenindizes anzubringen sind, um sie auf das rechnerisch festgelegte System zu beziehen, erreichen im Maximum nicht den Betrag von 0,1 m.

Tabelle 2.

c_2/T	Δm_v	Δm_{ph}	$\Delta m_{ph} - \Delta m_v$
0,5	+ 0,10	+ 0,10	0,00
1,0	+ 0,08	+ 0,07	— 0,01
1,5	+ 0,06	+ 0,04	— 0,02
2,0	+ 0,04	+ 0,01	— 0,03
2,5	+ 0,01	— 0,03	— 0,04
3,0	— 0,02	— 0,07	— 0,05
3,5	— 0,05	— 0,11	— 0,06
4,0	— 0,09	— 0,15	— 0,06
4,5	— 0,13	— 0,20	— 0,07
5,0	— 0,18	— 0,26	— 0,08

Nunmehr läßt sich die Frage endgültig entscheiden, ob die aus den Farbenindizes abgeleitete Temperaturskale im Einklang steht mit der Farbtemperaturskale, welche die spektralphotometrischen Messungen von Wilsing und Rosenberg geben. Die Unterschiede zwischen den beobachteten und den berechneten Farbenindizes sind für die frühen und für

die mittleren Spektraltypen nahezu konstant und wachsen gegen das Ende der Spektralreihe. In der Spalte 7 der Tabelle 1 stehen die mit den Kingschen photographischen Farbenindizes erhaltenen Farbtemperaturen; diese sind für die späten Spektraltypen niedriger als die aus den spektralphotometrischen Messungen gewonnenen.

Mit den Farbtemperaturen der Spalte 7 ist strenggenommen die Größe der Absorptionswirkung im Ultraviolett nach den Rosenbergschen Messungen neu zu bestimmen. Da die Farbtemperaturen der späten Spektraltypen kleiner sind, als in der Veröffentlichung Berlin-Babelsberg 1924 zunächst angenommen wurde, ist auch der Einfluß der Absorption in den Sternspektren geringer. Um in Übereinstimmung mit den Kingschen Farbenindizes zu bleiben, sind demnach die Farbtemperaturen der späten Spektraltypen noch niedriger anzusetzen.

5. Der Wärmeindex im Lichte der Farbtemperaturskale. Pettit und Nicholson bezeichnen die Differenz der visuellen und der bolometrischen Helligkeit, wenn beide auf die zenitale Extinktion bezogen sind, als Wärmeindex. Die bolometrische Helligkeit ist im absoluten Maßsystem gegeben; der Nullpunkt der visuellen Größenskale ist willkürlich. Nach Übereinkunft wird in der Beobachtungspraxis der Wärmeindex wie der photographische Farbenindex für den Spektraltypus A0 gleich Null gesetzt.

Für die aus den Wilsingschen und Rosenbergschen Messungen abgeleiteten Farbtemperaturen in Spalte 6 der Tabelle 1 habe ich nach dem beim photographischen Farbenindex auseinandergesetzten Verfahren die Differenz der visuellen und der bolometrischen Helligkeit berechnet, unter der Voraussetzung, daß die Senkung der Energiekurve im Ultraviolett die einzige Abweichung der Sternstrahlung von der schwarzen Strahlung ist. Die Korrektion wegen der selektiven Reflexion der Sternstrahlung an den Silberspiegeln des Beobachtungsinstruments ist bei der Rechnung berücksichtigt, dagegen nicht die selektive Wasserdampfabsorption der Erdatmosphäre im Ultrarot.

Wenn die bolometrischen Helligkeiten im absoluten Maßsystem gemessen werden, sind der Nullpunkt und die Skale in dem durch die Beobachtung und in dem durch die Rechnung festgelegten System einander gleich. Der Nullpunkt der durch Rechnung bestimmten visuellen Helligkeit war durch die Annahme festgelegt, daß in der Wellenlänge der maximalen Empfindlichkeit die volle Strahlung im menschlichen Auge wirksam ist; der Nullpunkt der empirischen Größenskale war willkürlich. Da die visuellen photometrischen Systeme der Beobachtung

und der Rechnung nicht vollkommen gleichartig sind, hat man die beobachteten visuellen Helligkeiten nach den Angaben der Tabelle 2 auf das durch Rechnung festgelegte fundamentale photometrische System zu reduzieren.

Wenn sich die Sterne annähernd wie schwarze Strahler der in Spalte 6 der Tabelle 1 aufgeführten Farbtemperaturen verhalten, müssen die Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Wärmeindizes konstant sein. Die bisher veröffentlichten mittleren Wärmeindizes für die einzelnen Spektralklassen* lassen noch keinen sicheren Schluß zu, mit welcher Genauigkeit sie sich durch die spektralphotometrisch bestimmten Farbtemperaturen darstellen lassen. Die Sicherheit der bolometrischen, radiometrischen und thermoelektrischen Messungen reicht nicht im entferntesten an die der visuellen Beobachtungen heran. Wenn auch die Beobachtungen ziemlich stark auseinandergehen, so erkennt man doch, daß auch die Wärmeindizes niedrigere Temperaturen für die Sterne der späten Spektraltypen verlangen**.

6. Die Verbesserung der Farbtemperaturskale nach den spektralphotometrischen Messungen von R. A. Sampson. Sampson bestimmt die Energieverteilung in den Spektren von 64 Sternen aus Aufnahmen mit einem photovisuellen Refraktor, vor dessen Objektiv sich ein Prisma von 12° brechendem Winkel befindet***. Vergleichsstern ist α Ursae minoris. Die kleinen Spektren, welche den Bereich λ 385 bis 700 mμ umfassen, sind mit einem Kochschen Mikrophotometer ausgemessen. Die auf automatischem Wege erhaltene Registrierkurve spiegelt den Schwärzungsverlauf im Spektrum des Sternes wieder; die Absorptions- und Emissionslinien markieren sich durch Einsenkungen und Spitzen. Sampson verbindet die höchsten Punkte der Registrierkurve durch einen möglichst glatten Kurvenzug und gründet auf den geglätteten Verlauf die Bestimmung der Farbtemperatur. Den differentiellen Einfluß der Absorption in der Erdatmosphäre eliminiert Sampson nachträglich in wenig exakter Weise: Das Beobachtungsmaterial liefert eine Beziehung zwischen dem c_2/T-Wert und dem Spektraltypus. Die Abweichungen des einzelnen c_2/T-Wertes von dem zum

---

* Carnegie Institution of Washington, Annual Report of the Director of the Mount Wilson Observatory, 1922 und 1926/27.

** A. Brill, Die Strahlung der Sterne, Veröffentl. Univ.-Sternwarte Berlin-Babelsberg 1924.

*** R. A. Sampson, Effective temperatures of sixty-four stars, Monthl. Not. **85**, 212, 1925; Referat in Naturwissensch. **13**, 764, 1925.

Spektraltypus gehörigen Normalwert erklärt Sampson durch den Einfluß der Absorption in der Erdatmosphäre und damit als Zenitdistanzeffekt der Extinktion.

Die Energiekurven der Sterne zeigen erfahrungsgemäß eine mit fortschreitendem Spektraltypus zunehmende Depression im Ultraviolett. Hierdurch entstehen Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Farbtemperatur, wenn man die Messungen unter 450 mμ benutzen will. Sampson nimmt an, daß die Abweichungen der Sternstrahlung von der schwarzen Strahlung durch die Summation der von verschiedenen Zonen der Sternoberfläche zu uns dringenden Teilstrahlungen bedingt sind. Die zentrale Strahlung eines Sternes soll nach Sampson schwarz sein; die Abweichungen vom Planckschen Gesetz sind durch die zunehmende Rötung der Randzonen verursacht.

Nach Sampsons Beobachtungen ist die Strahlung der Sterne nahezu schwarz; in geringem Maße ist eine Senkung der Energiekurve bei den Sternen vom späten Spektraltypus für Wellenlängen kleiner als 400 mμ durch die Messungen angedeutet. Abnormale Fälle sind die Energiekurven von γ Cassiopeiae (Spektraltypus B0p) und α Cygni (Spektraltypus A2p); für Wellenlängen größer als 480 bzw. 450 mμ ist der Gradient der Energiekurve klein und nimmt nach den kurzen Wellenlängen stark zu.

Die Temperaturskale Sampsons (Spalte 8 der Tabelle 1) stimmt mit der von mir aus Wilsings nnd Rosenbergs Messungen abgeleiteten befriedigend überein; nur für die Sterne vom späten Spektraltypus liegen die Sampsonschen Temperaturen ein wenig tiefer, wie es auch die photographischen Farbenindizes und die Wärmeindizes verlangten.

Die zusammenfassende Betrachtung des gesamten Beobachtungsmaterials läßt erkennen, daß die in der letzten Spalte der Tabelle 1 aufgeführte Farbtemperaturskale den Beobachtungen am besten gerecht wird und daher als Grundlage für weitere Untersuchungen dienen kann.

7. Systematische Fehlerquellen bei Bestimmung der Temperatur aus der Form der Energiekurve. Die spektralphotometrischen Beobachtungen liefern je nach der Wahl des Spektralbereichs für die gleichen Sterne verschiedene Farbtemperaturen. Die mittleren Wellenlängen der Wilsingschen, der Sampsonschen und der Rosenbergschen Messungen liegen bei 530, 500 und 450 mμ; die zugehörigen Temperaturskalen zeigen mit der Verschiebung der mittleren Wellenlänge nach dem Ultraviolett eine zunehmende Verbreiterung. Indem ich auf die rechnerische Darstellung der spektralphotometrischen Beobachtungen von Rosenberg im Ultraviolett jenseits λ 450 mμ durch das

Plancksche Gesetz verzichtete, brachte ich die aus den Wilsingschen und Rosenbergschen Messungen abgeleiteten Temperaturskalen miteinander in Übereinstimmung. Die mittlere Wellenlänge der von mir benutzten Wilsingschen und Rosenbergschen Beobachtungen ist nur wenig größer als die der Sampsonschen.

In die Fig. 2 ist die relative Farbenindexkurve eines BO-Sternes gegen einen MO-Stern, berechnet auf Grund der neuesten Beobachtungsergebnisse mit der Farbtemperatur 22000° für den BO-Stern und mit der Farbtemperatur 3240° für den MO-Stern, eingetragen. Wie bereits oben erwähnt ist, mißt der Gradient der Farbenindexkurve die Weite der Temperaturskale. Für λ 530 mμ ist der aus den Beobachtungen abgeleitete Gradient kleiner als der durch Rechnung ermittelte; für λ 500 mμ stimmen die Gradienten in Beobachtung und Rechnung miteinander überein. Für λ 450 mμ ist im Einklang mit der Farbtemperaturskale Rosenbergs der beobachtete Gradient größer als der berechnete.

Die Unstimmigkeit zwischen den einzelnen Temperaturskalen ist teilweise bedingt durch die selektive Absorption in der Sternatmosphäre, die bei dem Rosenbergschen Verfahren der extrafokalen Sternaufnahmen eine Schwächung des kontinuierlichen Untergrundes hervorruft. Bis zu einem gewissen nur angenähert rechnerisch feststellbaren Betrage ist die Depression der Energiekurve im Ultraviolett eine Folge der Randverdunklung. Der Verlauf der aus den Beobachtungen abgeleiteten relativen Farbenindexkurve in dem Spektralbereich λ 451 bis 642 mμ deutet darauf hin, daß auch systematische Abweichungen von der schwarzen Strahlung vorhanden sind, von der Art, wie sie bereits an der Energiekurve der Sonne festgestellt wurden.

C. Die Strahlungstemperatur der Fixsterne.

1. Die Strahlungstemperatur nach den spektralphotometrischen Beobachtungen. Wenn die Sterne annähernd wie schwarze Körper strahlen, geben die Abweichungen der Energiekurve des Sternes von der des zugehörigen schwarzen Strahlers im visuellen oder photographisch wirksamen Wellenlängenbereich oder auch für das gesamte Spektrum die Strahlungstemperatur der visuellen, der photographischen und der bolometrischen Helligkeit. Rechnungen dieser Art sind von mir in der Veröffentlichung Berlin-Babelsberg 1924 auf Grund der Temperaturskale durchgeführt, welche sich aus Wilsings und Rosenbergs Messungen im Spektralbereich λ 451 bis 642 mμ ergab. Da die Abweichungen der Sternstrahlung von der schwarzen Strahlung im visuellen

Wellenlängenbereich unbedeutend sind, ist die Strahlungstemperatur der visuellen Helligkeit gleich der Farbtemperatur. Für Wellenlängen kleiner als 450 mμ geben die spektralphotometrischen Messungen eine mit fortschreitendem Spektraltypus zunehmende Depression der Energiekurve im Ultraviolett; die Strahlungstemperaturen der photographischen und der bolometrischen Helligkeit sind demnach niedriger als die Farbtemperatur oder die Strahlungstemperatur der visuellen Helligkeit.

Tabelle 3.

Spektrum	T	c_2/T	dm_{ph}	dc_2/T_{ph}	dm_b	dc_2/T_b
B0 . . .	23800°	0,60	0,00	0,00	0,00	0,00
B5 . . .	16300	0,88	0,06	0,02	0,10	0,04
A0 . . .	11800	1,22	0,10	0,04	0,15	0,07
A5 . . .	9000	1,59	0,11	0,04	0,10	0,05
F0 . . .	7900	1,82	0,14	0,05	0,09	0,05
F5 . . .	6900	2,08	0,15	0,06	0,06	0,04
G0 . . .	6000	2,39	0,17	0,07	0,05	0,03
G5 . . .	5230	2,74	0,20	0,08	0,04	0,03
K0 . . .	4570	3,14	0,22	0,09	0,02	0,02
K5 . . .	3850	3,73	0,25	0,10	0,01	0,01
M0 . . .	3570	4,02	0,28	0,11	0,01	0,01

Die Tabelle 3 gibt den Einfluß der Absorption im Sternspektrum, wenn angenommen wird, daß die Sterne der einzelnen Spektralklassen wie schwarze Körper der in Spalte 2 (gleich Spalte 6 der Tabelle 1) stehenden Farbtemperaturen strahlen. Die in Größenklassen ausgedrückte Intensitätsschwächung gilt in der 4. Spalte für die photographische, in der 6. für die bolometrische Helligkeit. Die entsprechenden Änderungen der Farbtemperatur, um die Strahlungstemperatur der photographischen und der bolometrischen Helligkeit zu erhalten, stehen in der 5. und 7. Spalte der Tabelle 3. Die Strahlungstemperatur der photographischen Helligkeit ist nur für die späten Spektraltypen merklich tiefer als die Farbtemperatur. Der Einfluß der Sternabsorption auf die bolometrische Helligkeit nimmt bei den frühen Spektraltypen schnell zu, um vom Spektraltypus A0 ab langsam auf 0,01 m abzunehmen.

Die Rechnung ist auf Grund der Annahme durchgeführt, daß die Depression im Ultraviolett die einzige Abweichung der Sternstrahlung von der schwarzen Strahlung ist, die noch im besonderen für die Sterne der Spektralklasse B0 verschwindet. Die Farbtemperaturen der einzelnen Spektralklassen sind aus den spektralphotometrischen Messungen von Wilsing und Rosenberg bestimmt. Da die Farbtemperaturen der Sterne vom späten Spektraltypus niedriger als in der Veröffentlichung Berlin-

Babelsberg 1924 anzusetzen sind, wird auch der Einfluß der Sternabsorption im Ultraviolett auf Grund der Rosenbergschen Messungen kleiner sein. Die Strahlungstemperaturen der photographischen, der bolometrischen und der visuellen Helligkeit werden sich also nur wenig voneinander unterscheiden.

2. Die Strahlungstemperatur nach dem photographischen Farbenindex. Unter der Annahme, daß die Strahlungstemperatur der visuellen Helligkeit gleich der Farbtemperatur ist, läßt sich auch aus den Kingschen Farbenindizes die Abweichung von der schwarzen Strahlungskurve im photographisch wirksamen Teil des Spektrums und damit die Strahlungstemperatur der photographischen Helligkeit bestimmen. Die Tabelle 4 enthält mit dem Argument c_2/T die Flächenhelligkeit M_v und M_{ph} in dem rechnerisch festgelegten System der visuellen und der photographischen Helligkeit. T ist die Strahlungstemperatur des schwarzen Körpers, welcher die gleiche visuelle Flächenhelligkeit hat wie der Stern. Der Nullpunkt der Zählung der durch Rechnung bestimmten Flächenhelligkeiten ist durch die Annahme bestimmt, daß in der Wellenlänge der maximalen Empfindlichkeit die volle Energiestrahlung sowohl im menschlichen Auge als auch in der photographischen Platte wirksam ist. Der Nullpunkt der scheinbaren visuellen Helligkeit ist empirisch in willkürlicher Weise festgelegt. Die Größenskale der scheinbaren photographischen Helligkeit ist an die der visuellen Helligkeit in der Weise angeschlossen, daß für die Sterne des Spektraltypus AO visuelle und photographische Helligkeit einander gleich sind. Da der Nullpunkt der rechnerisch festgelegten visuellen und photographischen Flächenhelligkeit nicht an diese Übereinkunft gebunden ist, weicht das System der Flächenhelligkeiten von dem der scheinbaren Helligkeiten in der visuellen und in der photographischen Größenskale um zwei voneinander verschiedene Konstanten ab. Diese werden aus den bekannten Daten des scheinbaren Halbmessers der Sonne, ihrer visuellen und ihrer photographischen Helligkeit und der zugehörigen Strahlungstemperaturen berechnet. Im visuellen System ist die Konstante gleich + 13,49 m, im photographischen gleich + 13,07 m; im System der photographischen Farbenindizes ist sie daher — 0,42 m.

Da die isophoten Wellenlängen der photometrischen Systeme in Beobachtung und in Rechnung voneinander abweichen, sind die beobachteten Helligkeiten bzw. die Farbenindizes mit den Größen Δm_v, Δm_{ph} bzw. $\Delta m_{ph} - \Delta m_v$ (Tabelle 2) auf die rechnerisch festgelegten fundamentalen photometrischen Systeme zu reduzieren.

Tabelle 4.

c_2/T	M_v	M_{ph}	$M_{ph}-M_v$	M_b	M_v-M_b	c_2/T	M_v	M_{ph}	$M_{ph}-M_v$	M_b	M_v-M_b
0,40	— 29,55	— 30,39	— 0,84	— 30,88	+ 1,33	2,80	— 24,17	— 23,89	+ 0,28	— 26,23	+ 2,06
0,50	— 29,29	— 30,09	— 0,80	— 30,63	+ 1,34	2,90	— 23,98	— 23,64	+ 0,34	— 26,10	+ 2,12
0,60	— 29,03	— 29,79	— 0,76	— 30,38	+ 1,35	3,00	— 23,78	— 23,39	+ 0,39	— 25,96	+ 2,18
0,70	— 28,78	— 29,49	— 0,71	— 30,14	+ 1,36	3,10	— 23,58	— 23,14	+ 0,44	— 25,83	+ 2,25
0,80	— 28,52	— 29,19	— 0,67	— 29,90	+ 1,38	3,20	— 23,38	— 22,89	+ 0,49	— 25,69	+ 2,31
0,90	— 28,27	— 28,90	— 0,63	— 29,67	+ 1,40	3,30	— 23,18	— 22,64	+ 0,54	— 25,56	+ 2,38
1,00	— 28,02	— 28,60	— 0,58	— 29,44	+ 1,42	3,40	— 22,98	— 22,39	+ 0,59	— 25,43	+ 2,45
1,10	— 27,77	— 28,31	— 0,54	— 29,21	+ 1,44	3,50	— 22,78	— 22,14	+ 0,64	— 25,30	+ 2,52
1,20	— 27,52	— 28,02	— 0,50	— 28.98	+ 1,46	3,60	— 22,58	— 21,88	+ 0,70	— 25,17	+ 2,59
1,30	— 27,28	— 27,73	— 0,45	— 28,76	+ 1,48	3,70	— 22,38	— 21,63	+ 0,75	— 25,05	+ 2,67
1,40	— 27,04	— 27,44	— 0,40	— 28,54	+ 1,50	3,80	— 22,18	— 21,38	+ 0,80	— 24,93	+ 2,75
1,50	— 26,81	— 27,16	— 0,35	— 28,34	+ 1,53	3,90	— 21,98	— 21,13	+ 0,85	— 24,81	+ 2,83
1,60	— 26,59	— 26,90	— 0,31	— 28,15	+ 1,56	4,00	— 21,79	— 20,89	+ 0,90	— 24,70	+ 2,91
1,70	— 26,38	— 26,64	— 0,26	— 27,97	+ 1,59	4,10	— 21,59	— 20,64	+ 0,95	— 24,59	+ 3,00
1,80	— 26,18	— 26,39	— 0,21	— 27,80	+ 1,62	4,20	— 21,40	— 20,39	+ 1,01	— 24,49	+ 3,09
1,90	— 25,98	— 26,14	— 0,16	— 27,63	+ 1,65	4,30	— 21,21	— 20,15	+ 1,06	— 24,39	+ 3,18
2,00	— 25,78	— 25,89	— 0,11	— 27,46	+ 1,68	4,40	— 21,02	— 19,91	+ 1,11	— 24,29	+ 3,27
2,10	— 25,57	— 25,64	— 0,07	— 27,29	+ 1,72	4,50	— 20,82	— 19,66	+ 1,16	— 24,19	+ 3,37
2,20	— 25,37	— 25,39	— 0,02	— 27,13	+ 1,76	4,60	— 20,63	— 19,42	+ 1,21	— 24,10	+ 3,47
2,30	— 25,17	— 25,14	+ 0,03	— 26,97	+ 1,80	4,70	— 20,44	— 19,18	+ 1,26	— 24,01	+ 3,57
2,40	— 24,97	— 24,89	+ 0,08	— 26,81	+ 1,84	4,80	— 20,25	— 18,94	+ 1,31	— 23,92	+ 3,67
2,50	— 24,77	— 24,64	+ 0,13	— 26,66	+ 1,89	4,90	— 20.06	— 18,70	+ 1,36	— 23,83	+ 3,77
2,60	— 24,57	— 24,39	+ 0,18	— 26,51	+ 1,94	5,00	— 19,87	— 18,47	+ 1,40	— 23,74	+ 3,87
2,70	— 24,37	— 24,14	+ 0,23	— 26,37	+ 2,00	5,10	— 19,68	— 18,23	+ 1,45	— 23,65	+ 3,97

Die Größe der Abweichungen der Energiekurve des Sternes von der schwarzen Strahlungskurve läßt sich nunmehr mit den mittleren Kingschen Farbenindizes berechnen, wenn man den einzelnen Spektralklassen die Farbtemperaturen der letzten Spalte in Tabelle 1 zuordnet.

Tabelle 5.

Spektrum	T_v	J	ΔJ	T_{ph}
B0	22000°	— 0,33	— 0,01	22000°
B5	17700	— 0,17	+ 0,07	17300
A0	13500	0,00	+ 0,13	13000
A5	10500	+ 0,21	+ 0,18	10000
F0	8550	+ 0,33	+ 0,16	8250
F5	7350	+ 0,47	+ 0,15	7140
G0	5980	+ 0,67	+ 0,13	5860
G5	4860	+ 0,93	+ 0,10	4800
K0	4370	+ 1,12	+ 0,11	4320
K5	3460	+ 1,58	+ 0,12	3420
M0	3240	+ 1,73	+ 0,12	3200

Die Senkung der Energiekurve im Ultraviolett bzw. der Einfluß der selektiven Absorption ist bei den Sternen der späten Spektraltypen kleiner, als in der Veröffentlichung Berlin-Babelsberg 1924 angegeben ist (vgl. 4. Spalte der Tabelle 3). Im Gang der Reste (Spalte 4 der Tabelle 5) prägt sich die kontinuierliche Wasserstoffabsorption aus, welche bei den Sternen des Spektraltypus A 5 ihr Maximum erreicht. Die negative Korrektion — 0,01 m verlangt eine nur wenig höhere Strahlungstemperatur der photographischen Helligkeit für die B0-Sterne. Man darf nach den bisherigen Beobachtungsergebnissen annehmen, daß die B0-Sterne wie schwarze Körper strahlen, so daß Farbtemperatur, Strahlungstemperatur der visuellen, der photographischen und der bolometrischen Helligkeit einander gleich sind. In der letzten Spalte der Tabelle 5 steht die Strahlungstemperatur der photographischen Helligkeit, die sich von der Strahlungstemperatur der visuellen Helligkeit nur wenig unterscheidet.

Wenn die Reste in Spalte 4 der Tabelle 5 typisch für die einzelnen Spektralklassen sind, wird man bei einem Einzelstern die für die betreffende Spektralklasse geltende Korrektion mit umgekehrtem Vorzeichen an den Kingschen Farbenindex anbringen, um dann nach den Tabellen 2 und 4 die Farbtemperatur oder die Strahlungstemperatur der visuellen Helligkeit zu erhalten.

Bestimmt man mit den Farbtemperaturen der letzten Spalte in Tabelle 1 nach den Angaben der Tabelle 4 die Wärmeindizes, so liegen

Tabelle 6.

Spektrum	T_v	$m_v - m_b$ M. W. 1922	$m_v - m_b$ M. W. 1926/27	$B - R$ M. W. 1922	$B - R$ M. W. 1926/27
B0	22000°	— 0,1		0,00	
A0	13500	0,0	0,0	+ 0,02	+ 0,02
F0	8550	+ 0,3	+ 0,1	+ 0,14	— 0,06
G0	5980	+ 0,7	+ 0,5	+ 0,25	+ 0,05
K0	4370	+ 1,2	+ 1,0	+ 0,16	— 0,04
K5	3460		+ 1,6		— 0,17
M0	3240	+ 2,3	+ 1,8	+ 0,25	— 0,2

die berechneten Werte, wie die beiden letzten Spalten der Tabelle 6 zeigen, bei den späten Spektraltypen zwischen den beiden Reihen der beobachteten Wärmeindizes.

3. Die Strahlungstemperatur der Sterne, berechnet aus der scheinbaren Helligkeit und aus dem scheinbaren Halbmesser. Die Strahlungstemperatur der visuellen, photographischen und bolometrischen Helligkeit läßt sich auf direktem Wege berechnen, wenn man den scheinbaren Halbmesser des Sternes kennt. Für sieben Sterne hat Pease auf dem Mt. Wilson-Observatorium den scheinbaren Halbmesser interferometrisch bestimmt. Bezeichnet man mit m die scheinbare Helligkeit eines Sternes (bolometrisch, visuell oder photographisch gemessen), mit M die entsprechende Flächenhelligkeit, so sind m und M mit dem scheinbaren Halbmesser ϱ des Sternes durch die Gleichung verknüpft:

$$M = M_0 + m + \Delta m + 5 \log \varrho.$$

Die Konstante M_0 drückt aus, daß der Nullpunkt der Größenskale der scheinbaren Helligkeiten nicht mit dem der Flächenhelligkeiten identisch ist. Die Größe Δm, welche sich mit der Farbe des Sternes ändert, deutet an, daß die photometrischen Systeme der scheinbaren und der Flächenhelligkeiten nicht vollkommen gleichartig sind.

Tabelle 7.

Stern	Sonne	α Bootis	α Tauri	α Orionis	α Scorpii	β Pegasi	α Herculis	o Ceti	
Spektrum	G 0	K 0	K 8	M 1	M 2	M 3	M 8	M 7 e	
ϱ	961,2″	0,0100″	0,0100″	0,0235″ (0,0170″)	0,0200″	0,0105″	0,0150″	0,0280″	
								Max.	Min.
m_v	−26,90	+ 0,24	+ 1,06	+ 0,92	+ 1,22	+ 2,61	+ 3,48	+ 3,5	+ 9,9
m_{ph}	−26,12	+ 1,38	+ 2,66	+ 2,65	+ 3,03	+ 4,40	+ 5,02		
T_v	6075°	4170°	3740°	3060° (3310°)	3080°	3080°	2620°	2300°	1500°
T_{ph}	5835°	4150°	3620°	3070° (3270°)	3050°	3060°	2740°		

Tabelle 8.

Stern	Spektrum	Wilsing *	Rosenberg **	Sampson ***	Yü ****	Abbot †	Coblentz ††	King †††	Bottlinger ††††	Pettit §	T_v §§	$T_{p\,h}$ §§
β Centauri .	B 1							32 000°		10 600°		
Achernar . .	B 5							34 000		13 000		
Rigel . . .	B 8 p		20 500°	14 500°		16 000°	10 000°	21 800	18 400°	9 400		
Wega . . .	A 1 s	9400°	22 000	11 400	16 000°	14 000	8 000	15 600	11 600	11 000		
Sirius . . .	A 2 s		27 500	12 600	13 300	11 000		9 800		—		
Canopus . .	F 3							8 150		7 700		
Procyon . .	F 3	7200	7 000	8 150	8 300	8 000	6 000	8 050	7 640	7 280		
Capella . .	G 0	7100	4 500	5 400		5 800	6 000	5 310	5 360	5 460		
Arkturus . .	K 0	3700	3 100	4 130	4 180		4 000	4 320	3 960	4 060	4170°	4150°
Aldebaran .	K 8	3500	2 150	3 330		3 000	3 500	3 440	3 400	3 560	3740	3620
Beteigeuze	M 1	3000	2 200	3 330		2 600	3 000	3 240	3 190	2 910	3060	3070
Antares . .	M 2							3 130		2 950	3080	3050
γ Crucis . .	M 3							2 960		2 900		
α Herculis .	M 6	3000				2 500					2620	2740

* Spektralphotometrische Okularbeobachtungen von Wilsing, Scheiner und Münch, Publ. Astrophys. Obs. Potsdam Nr. 74, 1919.

** Extrafokale Aufnahmen mit Objektivprisma von Rosenberg, Abh. Kais. Leop.-Carol. Deutsch. Akademie **101**, Nr. 2, 1914.

*** Fokale Aufnahmen mit Objektivprisma von Sampson, Monthl. Not. **85**, 212, 1925.

**** Fokale Aufnahmen mit Reflektor und Spektrograph von Ch'ing-Sung Yü, Lick Obs. Bull. Nr. 375, 1926.

† Radiometermessungen in Sternspektren von Abbot, Astrophys. Journ. **60**, 87, 1924.

†† Thermoelektrische Messungen mit Farbfiltern von Coblentz, Scient. Pap. Bur. Stand. Nr. 438, 1922.

††† Die Kingschen Farbenindizes (Harvard Annals **76**, Nr. 6, 1915) sind nach der Tabelle 5 wegen der systematischen Abweichung der Sternstrahlung von der schwarzen Strahlung berichtigt und nach den Angaben der Tabelle 2 mit der Reduktionskonstanten — 0,42 m auf das rechnerisch festgelegte System der Farbenindizes (Tabelle 4) gebracht.

†††† Aus der graphischen Darstellung der Beziehung zwischen dem Bottlingerschen lichtelektrischen und dem Kingschen photographischen Farbenindex für 134 Sterne (Astr. Nachr. Nr. 5335, 1924) ist der dem Bottlingerschen Farbenindex (Veröff. Berlin-Babelsberg 1923) entsprechende Kingsche Farbenindex entnommen, Reduktion wie in †††.

§ Die von Pettit und Nicholson (Publ. Astr. Soc. Pacific Nr. 235, 1928) gemessenen Wärmeindizes sind nach Korrektion der visuellen Helligkeit (Tabelle 2) mit der Reduktionskonstanten + 1,37 m auf das durch Rechnung festgelegte System (Tabelle 4) gebracht.

§§ Die Strahlungstemperatur der visuellen und der photographischen Helligkeit nach Interferometermessungen von Pease.

Für die scheinbare bolometrische und die zugehörige Flächenhelligkeit sind M_0 und Δm gleich Null, wenn beide im absoluten Maßsystem gegeben sind. Die im Harvardsystem beobachtete visuelle oder photographische Helligkeit wird mit der Größe Δm_v bzw. Δm_{ph} der Tabelle 2 auf das rechnerisch festgelegte fundamentale photometrische System bezogen. Die Konstante M_0 ist im visuellen System gleich + 13,49 m, im photographischen gleich + 13,07 m. In den beiden letzten Reihen der Tabelle 7 stehen die nach obiger Gleichung mit Zuhilfenahme der Tabelle 4 berechneten Strahlungstemperaturen der visuellen und der photographischen Helligkeit. Die Strahlungstemperatur der photographischen Helligkeit ist im allgemeinen ein wenig kleiner als die der visuellen; nur für α Herculis ist erstere merklich größer, was durch starke Absorptionsbanden im visuell wirksamen Spektralbereich erklärt wird. Die Strahlungstemperatur der visuellen Helligkeit des veränderlichen Sterns o Ceti ist durch Extrapolation aus der Tabelle 4 erhalten. Der scheinbare Halbmesser von α Orionis schwankt nach den Messungen von Pease zwischen 0,0235″ und 0,0170″.

D. Die Temperaturen von 14 hellen Fixsternen.

In der Tabelle 8 sind zum Vergleich die Temperaturen von 14 hellen Fixsternen einander gegenübergestellt. Beobachtungsinstrument und Beobachtungsmethode sind von Fall zu Fall verschieden.

Berlin-Babelsberg, Universitätssternwarte.

Die K-Strahlung der leichtesten Elemente (Al bis Be).

Von **Martin Söderman** in Uppsala.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 21. November 1928.)

Es wird eine Wellenlängenbestimmung der K-Serie der Elemente Al bis Be beschrieben. Die Röntgenspektren sind mit einem optischen Glasgitter zu 220 Linien pro Millimeter aufgenommen. Das Resultat wird schließlich mit den älteren Wellenlängenbestimmungen im langwelligen Röntgengebiet und kurzwelligen Ultraviolett zusammengestellt.

Einleitung. Die von Compton und Doan vorgeschlagene Methode, Röntgenspektren mit einem gewöhnlichen Liniengitter darzustellen*, bietet der Kristallmethode gegenüber zwei große Vorteile. Sie erlaubt erstens eine absolute Bestimmung der Röntgenwellenlängen; zweitens kann man auf eine einzige Platte ein großes Wellenlängengebiet aufnehmen, wodurch auch die langwelligen Röntgenspektren bequem zu messen sind.

Auf Vorschlag des Herrn Professor Manne Siegbahn fing ich im Sommer 1928 mit einer Untersuchung der langwelligen Röntgenstrahlung an. Mit einem in der Werkstätte des Institutes hergestellten Apparat, der für dies Gebiet beabsichtigt war, habe ich die K-Serie von Aluminium an erforscht und sie bis Beryllium verfolgt.

Kapitel I. Der Apparat (Fig. 1) besteht aus einer Metallröntgenröhre R, die von einer Dynamomaschine gespeist wird, welche bei einer Spannung von 3000 Volt mit 10 bis 100 mA belastet werden kann. Die Kathode K ist geerdet und besteht aus einem oxydbedeckten Platindraht, der mit einem Transformatorstrom von 2 bis 3 Amp. geheizt wird. In die Antikathode A, die aus Kupfer besteht und durch einen Glaskonus A' isoliert wird, kann man leicht ein Metallblech einschleifen. Der ganze Apparat, dessen Volumen etwa 3 Liter beträgt, wird mit einer Vorpumpe und einer Molekularpumpe in zwei Minuten evakuiert. Die Röntgenstrahlen gehen erst durch einen Spalt S_1 vom gewöhnlichen Siegbahntypus, der etwa 1 cm von der Antikathode entfernt ist. Der zweite Spalt S_2 besteht aus einer Stahlschneide und ihrem von dem Gitter G reflektierten Bilde, eine Anordnung, die von Bäcklin vorgeschlagen wurde** und sehr scharfe Einstellung erlaubt. Der Abstand zwischen den beiden Spalten beträgt etwa 200 mm und der Abstand der

* A. H. Compton und R. L. Doan, Proc. Nat. Acad. Amer. **11**, 598, 1925.
** Erik Bäcklin, Absolute Wellenlängenbest., Upps. Univ. Årsskr. 1928.

Platte P vom zweiten Spalt 300 mm. Er wurde mit Hilfe eines Fühlhebels in einer Teilmaschine durch fünf Messungen bestimmt, welche mit höchstens 0,07 mm vom Durchschnittswert abweichen.

Kapitel II. Die Justierung des Apparates. Um den zweiten Spalt mit dem ersten parallel zu machen, wurde das Gitter durch eine planparallele Glasplatte ersetzt und der erste Spalt beleuchtet. In einem

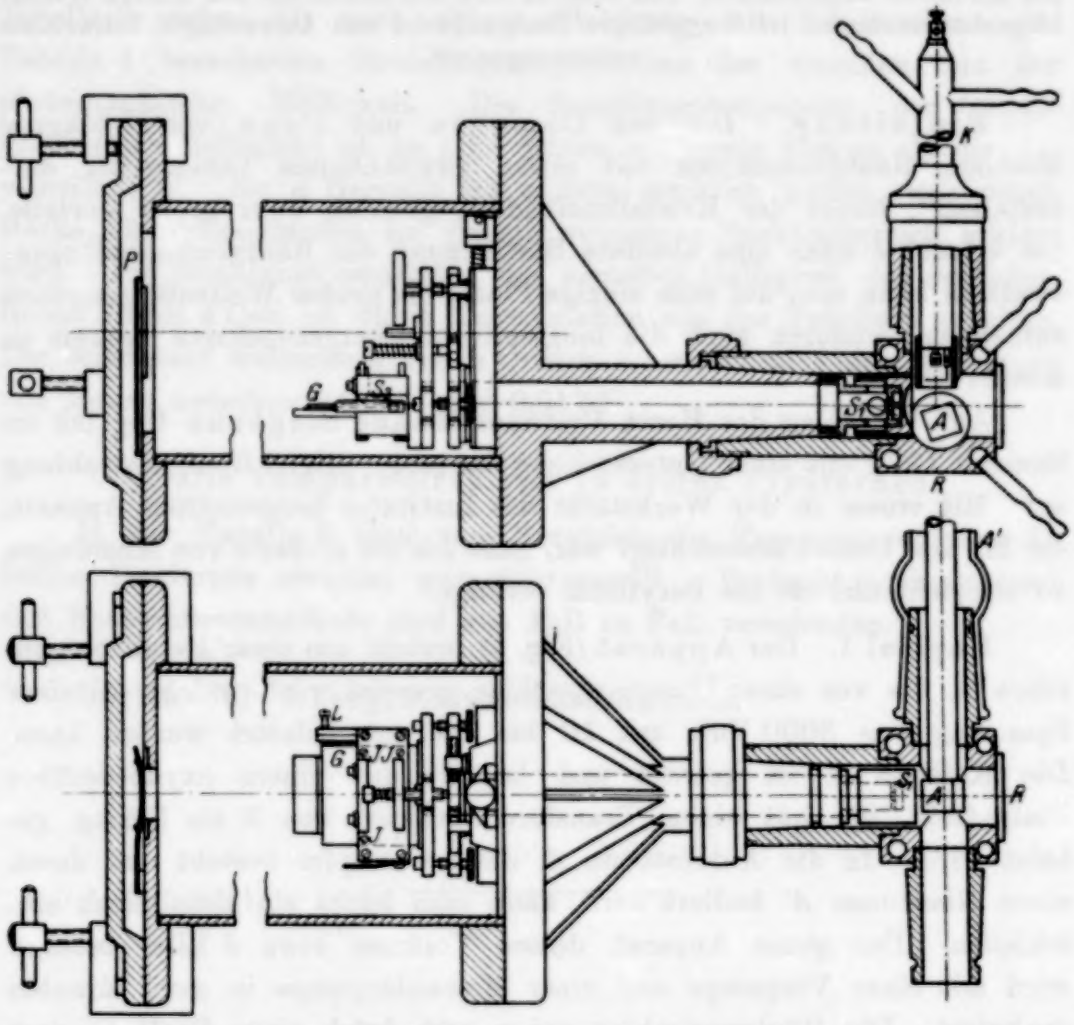


Fig. 1. R = Röntgenröhre, K = Kathode, A = Antikathode, S_1 = Erster Spalt, S_2 = Zweiter Spalt (Schneide), G = Gitter, J und L = Justierungsschrauben, P = Platte.

Mikroskop wurden das direkte und das reflektierte Bild des ersten Spaltes gleichzeitig betrachtet, und der Gittertisch wurde so gestellt, daß die beiden Bilder bei verschiedenen Einfallswinkeln einander parallel waren. Auf dem Komparator konnte dann die Stahlschneide mit der Glasplatte parallel gerichtet werden, und schließlich wurde die Glasplatte durch das Gitter ersetzt, dessen Abstand von der Stahlschneide mit den Justierungs-

schrauben J des Gittertisches geändert werden konnte. Die Parallelität der Schneide mit den Gitterstrichen wurde auch auf dem Komparator durch Verstellen der Schraube L justiert.

Die Spaltöffnungen, die ich benutzt habe, sind etwa 0,05 mm und die Breite des Zentralbildes in der Entfernung 300 mm wird dabei von der Größe 0,2 mm. Das Gitter war aus Glas hergestellt, und der Einfallswinkel wurde so gewählt, daß er so gut wie möglich mit dem Totalreflexionswinkel von Aluminium übereinstimmte, wodurch die Intensität am größten wurde*. Ich habe auch mit einem platinierten Glasgitter versucht, um dadurch größere Totalreflexionswinkel zu bekommen, aber die Intensität war in dieser Weise nicht zu steigern. Die beim Glasgitter benutzten Einfallswinkel sind etwa $1^0\,10'$**.

Kapitel III. Die Aufnahme der Platten. Die Expositionsdauer war im Durchschnitt etwa eine Stunde. Sie schwankte zwischen zehn Minuten, nach welcher Zeit die ersten zwei Ordnungen von Aluminium vermeßbar waren, und vier Stunden (Platte 194). Bei Benutzung von „Agfa Contrast"-Platten wurden die Linien noch schärfer als auf den gewöhnlichen „Eclipse"-Platten, aber die Expositionsdauer mußte dabei verdoppelt werden, und ich habe es deshalb vorgezogen, die ganze Serie hindurch die „Eclipse"-Platten zu benutzen.

Die K-Strahlung von Aluminium und Magnesium wurde mit Metallblechen auf der Antikathode erzeugt. Kohlenstoff und Beryllium wurden in die Antikathode eingerieben. Bei den übrigen Elementen benutzte ich möglichst schwer zu verflüchtigende Salze, wie Natriumfluorid und Borstickstoff. Die winzige Oxydmenge, die sich immer während der Exposition auf der Antikathode bildete, genügte, um die Sauerstofflinie auf jeder Platte zu erzeugen.

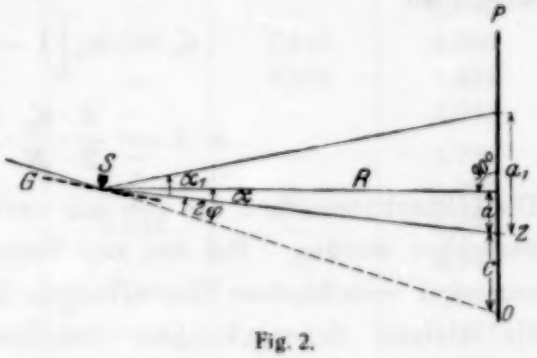


Fig. 2.

Kapitel IV. Die Behandlung der Meßresultate. Um die geometrischen Verhältnisse bei der angewandten Apparatur zu untersuchen, betrachten wir ein paralleles Strahlenbündel (Fig. 2), das unter dem Einfallswinkel φ gegen das Gitter einfällt. Nehmen wir an, daß der

* Jean Thibaud, Phys. ZS. **29**, 241—261, 1928.
** Vgl. Erik Bäcklin, a. a. O. S. 26.

Winkel zwischen dem reflektierten und dem abgebeugten Strahl α_1 ist, so gilt für die Wellenlänge λ der n-ten Ordnung die Gitterformel

$$n \cdot \lambda = 2 d \sin \frac{2\varphi + \alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_1}{2}, \tag{1}$$

wo d die Gitterkonstante ist. Nehmen wir weiter an, daß der Strahl, welcher normal gegen die Platte einfällt, sie in einem Abstand a vom Zentralbild trifft, so erhalten wir nach der Fig. 1:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{R}, \\ \operatorname{tg} (\alpha - \alpha_1) &= \frac{a - a_1}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Entwickelt man tg Θ und sin Θ nach der Formel von Maclaurin, so erhält man, wenn Θ ein kleiner Winkel ist,

$$\left.\begin{aligned} \sin \Theta &= \Theta - \frac{\Theta^3}{3!}, \\ \operatorname{tg} \Theta &= \Theta + \frac{\Theta^3}{3}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Um die auf der Platte vermessenen Abstände a_1, a_2 usw., welche also tg-Funktionen sind, zu sin-Funktionen zu machen, muß man sie mit einem Korrektionsfaktor $\left(1 - \frac{\Theta^2}{2}\right)$ multiplizieren. Die so erhaltenen korrigierten Abstände wollen wir mit a_1', a_2', C' usw. bezeichnen. Die Gitterformel wird also

$$a_n' = a_n \left[1 - \frac{(a_n - C')^2}{2 R^2}\right], \tag{4}$$

$$n \cdot \lambda = \frac{d}{2} \cdot \frac{a_n'}{R} \cdot \frac{C' + a_n'}{R}. \tag{5}$$

Die Gitterkonstante d des von mir verwendeten Gitters war schon früher* berechnet worden. Bei den zur Vermessung gelangten Platten habe ich nur zwei verschiedene Einstellungen des Einfallswinkels benutzt, und um die kleinen Schwankungen desselben zu eliminieren, welche durch Temperaturänderungen u. a. verursacht werden, habe ich alle Werte so reduziert, daß der Abstand zwischen dem Zentralbild und der Linie OK_{α_I}, die auf allen Platten vorkommt, innerhalb jeder Serie überall denselben Wert bekommt. Der Bezugsabstand ist neben jeder Messung in der Kolumne „Ref." angegeben.

* Erik Bäcklin, a. a. O. S. 50.

Die Bestimmung erfolgte in der Weise, daß ich den Wellenlängenwert von Al K_α und die auf den Al-Platten vermessenen Abstände $a_1, a_2 \ldots$ in die Formel

$$n\,\lambda = \frac{d}{2} \cdot \frac{a_n}{R} \cdot \frac{C + a_n}{R}$$

eintrug. Aus der Änderung der C-Werte konnte ich dann a berechnen. Die Abstände wurden nach der Gleichung (4) korrigiert und schließlich der endgültige C'-Wert aus Gleichung (5) berechnet. Die Wellenlängen der übrigen Elemente erhielt ich dann durch Eintragen der korrigierten Abstände in die Formel (5).

Die auf den Platten vermessenen Abstände gehen aus der folgenden Tabelle hervor; der Komparator, den ich benutzt habe, ist in der Werkstätte des Instituts gebaut worden und wurde diesen Frühling von Bäcklin* mit einem Normalmeter verglichen. Es zeigte sich dabei, daß die vom Komparator herrührenden Fehler den Wert 0,001 mm nicht übersteigen und deshalb ohne Einwirkung auf das Resultat sind. Die in der folgenden Tabelle 1 zusammengestellten Abstände sind in Millimetern angegeben.

Tabelle 1.

	Nr.	I	II	III	IV	Ref.
Al. .	145	2,576	4,515	6,136	—	5,901
	149	2,576	4,513	6,134	—	5,893
	153	2.574	4,515	—	—	5,898
	154	2,572	4,508	—	—	5,891
	155	2,569	4,510	—	—	5,888
	160	2,571	4,507	6,125	7,540	5,883
	161	2,569	4,507	—	7,539	5,884
	168	2,570	—	—	—	5,885
	182	2,507	4,421	—	—	5,785
	186	2,507	4,435	—	—	5,798
	187	2,510	4,437	6,042	—	5,798
	191	2,500	4,415	—	—	5,768
	192	2,502	4,407	—	—	5,768
	193	2,501	4,411	—	—	5,771
	194	2,490	4,409	—	—	5,760
Mg. .	147	2,971	5,150	6,953	—	5,887
	148	2,970	5,144	6.953	—	5,880
	157	2,966	5,138	6,945	—	5,878
	162	2,974	5,148	—	—	5,886
	169	2,969	5,145	6,952	8,502	5,880

* Erik Bäcklin, a. a. O. S. 42.

Tabelle 1 (Fortsetzung).

	Nr.	I	Ref.		Nr.	I	Ref.
Na . .	154	3,450	5,891	Na . .	156	3,458	5,897
	155	3,448	5,888		159	3,450	5,895

	Nr.	I	Ref.		Nr.	I	Ref.
F . .	153	4,857	5,898	F . .	159	4,857	5,895
	154	4,857	5,891		160	4,847	5,883
	155	4,852	5,888		161	4,848	5,884

	Nr.	I (Ref.)	II		Nr.	I (Ref.)	II
O . .	145	5,901	—	O . .	156	5,897	9,649
	147	5,887	9,645		157	5,878	9,638
	148	5,880	9,640		158	5,889	9,636
	149	5,893	—		159	5,895	9,632
	150	5,891	9,647		160	5,883	9,624
	152	5,891	9,630		161	5,884	9,624
	153	5,898	9,636		162	5,886	9,631
	154	5,891	9,637		168	5,885	—
	155	5,888	9,639		169	5,880	9,624

	Nr.	I (Ref.)	II	III	IV	V
O . .	182	5,785	9,516	—	—	—
	184	5,791	9,520	—	—	—
	185	5,783	9,519	—	—	—
	186	5,798	9,526	—	15,154	—
	187	5,798	9,520	—	—	—
	191	5,768	9,489	12,448	15,116	—
	192	5,768	9,491	—	—	17,432
	193	5,771	9,496	12,474	15,127	17,398
	194	5,760	9,480	12,446	15,112	17,340
		VI	VII	VIII	IX	X
O . .	194	19,476	21,413	23,196	24,969	26,510

	Nr.	I	Ref.
N . .	184	7,189	5,791
	185	7,181	5,783
	186	7,205	5,798

Tabelle 1 (Fortsetzung).

	Nr.	I	II	III	IV	Ref.
C . .	152	9,266	—	—	—	5,891
	158	9,272	—	—	—	5,889
	162	9,257	—	—	—	5,886
	163	9,251	14,622	—	—	5,883
	168	9,255	14,660	18,92	22,49	5,885
	169	9,259	—	—	—	5,880
	185	9,148	—	—	—	5,783
	186	9,165	—	—	—	5,798
	190	9,166	—	—	—	5,791
	191	9,128	—	—	—	5,768
	192	9,116	—	—	—	5,768
B . .	150	12,236	—	—	—	5,891
	152	12,255	—	—	—	5,891
	162	12,251	18,998	24,27	28,84	5,886
	184	12,174	18,955	—	—	5,791
	185	12,168	18,940	—	—	5,783
	186	12,183	18,961	—	—	5,798
Be . .	191	16,873	—	—	—	5,768
	192	16,876	—	—	—	5,768
	193	16,884	—	—	—	5,771
	194	16,823	25,738	—	—	5,760

Die in dieser Tabelle angegebenen Werte sind als Mittel aus 2 bis 6 Messungen erhalten. Die Anzahl dieser Messungen habe ich so gewählt, daß eine Linie um so mehr beobachtet wird, je schärfer sie ist, und dem erhaltenen Abstand wird dann ein Gewicht zugeteilt, das der Anzahl der Ablesungen proportional ist.

Kapitel V. Die Berechnung der Wellenlängen. Die genaueste Wellenlängenbestimmung der Linie Al K_α ist von Larsson ausgeführt worden und ist noch nicht veröffentlicht, aber er hat mir den erhaltenen Wert liebenswürdigerweise zur Verfügung gestellt. Er beträgt

$$\text{Al } K_\alpha \qquad \lambda = 8{,}3229 \text{ Å}.$$

Ferner ist $d = 45160 \pm 4$ Å*.

Der Abstand zwischen Schneide und Platte ist $R = 309{,}33 \pm 0{,}05$ mm.

In der nachstehenden Tabelle 2 sind die korrigierten Abstände und die aus den oben angegebenen Werten berechneten Wellenlängen für die verschiedenen Ordnungen zusammengestellt.

* E. Bäcklin, a. a. O. S. 50.

Tabelle 2.

	I	II	III	IV	
Al					
λ = 8,323 Å	2,571	4,507	6,127	7,545 mm	C_1' =
C_1'	11,146	11,143	11,140	11,142	11,143 mm
	2,505	4,420	6,024 mm	—	C_2' =
C_2'	11,572	11,540	11,541	—	11,551 mm
Mg_1	2,972	5.149	6,958	8,514 mm	—
λ	9,904	9,909	9,917	9,886 Å	—
Na_1	3,447 mm	—	—	—	—
λ	11,88 Å	—	—	—	—
F_1	4,851 mm	—	—	—	—
λ	18,32 Å	—	—	—	—
O_1	5,887	9,636 mm	—	—	V
λ	23,65	23,65 Å	—	—	—
O_2	5,784	9,503	12,477	15,124	17,414 mm
λ	23,69	23,63	23,61	23,83	23,84 Å
N_2	7,178 mm	—	—	—	—
λ	31,77 Å	—	—	—	—
C_1	9,263	14,660	18,92	22,48 mm	—
λ	44,66	44,69	44,79	44,65 Å	—
C_2	9,148 mm	—	—	—	—
λ	44,72 Å	—	—	—	—
B_1	12,251	18,996	24,25	28,80 mm	—
λ	67,72	67,64	67,60	67,90 Å	—
B_2	12,147	18,890 mm	—	—	—
λ	68,02	67,93 Å	—	—	—
Be_2	16,887	25,744 mm*	—	—	—
λ	113,4	113,4 Å	—	—	—

	VI	VII	VIII	IX	X
O_2	19,509	21,440	23,216	24,981	26,513 mm
λ	23,86	23,86	23,84	23,96	23,85 Å

Folgende Tabelle 3 enthält das endgültige Resultat der Untersuchung. Die angegebenen Fehler sind Durchschnittsfehler der einzelnen Messungen, aber sie sind an zwei Stellen (bei O und B) etwas höher gemacht worden, um die aus den verschiedenen Ordnungen erhaltenen Werte zur Deckung zu bringen.

Die K_α-Linie des Kohlenstoffs breitet sich über ein Gebiet von etwa 1 Å aus, diejenige von Bor ist noch etwas breiter, und die Berylliumlinie

* Siehe unten.

Tabelle 3.

	λ Å	V Volt	$\frac{\nu}{R}$	$\sqrt{\frac{\nu}{R}}$
12 Mg . .	9,904 ± 0,02	1247	94,15	9,592
11 Na . .	11,88 ± 0,02	1039	76,71	8,758
9 F . .	18,32 ± 0,04	673,8	49,74	7,053
8 O . .	23,77 ± 0,08	519,3	38,34	6,192
7 N . .	31,77 ± 0,06	388,6	28,68	5,356
6 C . .	44,70 ± 0,09	276,2	20,39	4,515
5 B . .	67,80 ± 0,2	182,1	13,44	3,666
4 Be . .	113,4* ± 0,3	108,8	8,036	2,835

liegt über dem ganzen Gebiet zwischen 111 und 122 Å, zeigt aber bei der in der Tabelle angegebenen Wellenlänge 113,4 Å ein deutliches Maximum. Auch ein zweites Maximum dieser Linie tritt auf allen Platten bei 119 und 238 Å auf, aber ich habe nicht entscheiden können, ob dies wirklich dem Beryllium angehört, oder ob die Schwärzung von der Linie O $K_{a\,\mathrm{V}}$ bzw. O $K_{a\,\mathrm{X}}$ herrührt. Die Verbreiterung der Linien C bis Be dürfte auf eine Feinstruktur zurückzuführen sein, und ich bin jetzt damit beschäftigt, diese Linien durch Verwendung kleinerer Spaltöffnungen und größerer Dispersion in ihre Komponenten aufzulösen.

Kapitel VI. Vergleichung der Resultate mit früheren Bestimmungen. Die Schwierigkeiten der Wellenlängenbestimmungen im Gebiet zwischen der Röntgenstrahlung und der optischen Strahlung sind bis in die letzte Zeit sehr groß gewesen. Von der ultravioletten Seite aus nach kürzeren Wellenlängen arbeiteten Millikan, Bowen und Sawyer**, die mit einem Konkavgitterspektrographen über 5000 Linien im Gebiet zwischen 2000 und 130 Å registrierten. Unterhalb dieser Grenze wurde die Dispersion mit dem Millikanschen Apparate zu klein. Unter den von ihm berechneten Wellenlängen ist aber nur eine einzige bei der Besprechung der K-Serie von Interesse, nämlich die Wellenlänge der ersten Wasserstofflinie in der Lymanserie, die er zu 1215,7 Å bestimmt hat. Da diese Linie vom Übergang aus der L-Schale in die K-Schale herrührt, ist sie als die K_a-Linie von H anzusehen.

Von dem Röntgengebiet aus gegen größere Wellenlängen arbeitete Thoraeus***, der nach der Kristallmethode unter anderen Wellenlängen

* Erstes Maximum.

** R. A. Millikan und I. S. Bowen, Phys. Rev. **23**, 1, 1924 und Nature **113**, 218, 1924; R. A. Millikan, I. S. Bowen und R. A. Sawyer, Astrophys. Journ. **53**, 150, 1921.

*** R. Thoraeus, Phil. Mag., Februar 1926.

die der Linie F K_α zu 18,30 Å bestimmte. Als Kristall benutzte er Palmitin- und Laurostearinsäure. Später gelang es Dauvillier*, der mit Honigsteinsäure arbeitete, die Wellenlängen C K_α und B K_α zu bestimmen. Die Schwierigkeiten sind indessen sehr groß, einen Kristall mit genügend großer Gitterkonstante zu finden und diese Gitterkonstante genau zu bestimmen. Es treten außerdem Verwicklungen auf, weil die Strahlung in den Kristall eindringt, was aber dadurch eliminiert werden kann, daß man mit sehr dünnen Kristallschichten arbeitet. Die bisherigen Resultate der Kristallmessungen oberhalb 20 Å sind deshalb ziemlich unsicher.

Tabelle 4.

	K-Grenze	L-Grenze	K_α ber.		K_α gef.	Bemerkungen
	Volt	Volt	Volt	Å	Å	
1 H .	13,5	—	—	—	—	
2 He .	25,4	—	—	—	—	
2 He .	25,23	—	—	—	—	
2 He .	21,85	—	—	—	—	
3 Li .	42,4	12,1	30,3	407	—	
4 Be .	104,3	28,8	75,5	164	113,4	Le-Cl**
5 B . .	147,5	42,2	105,3	117	67,80	
5 B . .	148	24,5	123,5	100		Hughes***
5 B . .	186	—	—	—	—	Mo-Fo****
5 B . .	147	—	—	—	—	Holtzmann
6 C . .	215	34,5	180,5	68,5		Hughes
6 C . .	289,4	32,9	256,5	48,0		Kurth†
6 C . .	286	—	—	—	44,70	Ri-Ba††
6 C . .	272	—	—	—		Mo-Fo
6 C . .	259,3	33,00	226,3	54,5		Le-Cl
6 C . .	287	—	—	—	—	Holtzmann
7 N . .	374,0	—	—	—	—	Le-Cl
7 N . .	374	—	—	—	—	Mo-Fo
8 O . .	517,7	49,6	468,1	26,4		Kurth
8 O . .	478	—	—	—	23,77	Mo-Fo
8 O . .	498,0	49,72	448,3	27,5		Le-Cl
12 Mg .	1298,16	46,24	1251,92	9,85	9,904	Coster
12 Mg .	1296,0	—	—	—	—	Le-Cl

* A. Dauvillier, Journ. de phys. **8**, 1, 1927.

** J. C. McLennan und M. L. Clark, Proc. Roy. Soc. (A) **102**, 389, 1923.

*** A. L. Hughes, Phil. Mag. **43**, 145, Januar 1922.

**** F. L. Mohler und P. D. Foote, Scient. Pap. Bur. of Standards Nr. 425, 1922.

† E. H. Kurth, Phys. Rev. **18**, 461, 1921.

†† O. W. Richardson und C. B. Bazzoni, Phil. Mag. **42**, 1015, Dez. 1921.

Die Plangittermethode wurde von Bäcklin* für eine absolute Wellenlängenbestimmung benutzt. Nach der Plangittermethode arbeitete auch Jean Thibaud**, der sowohl Messungen der K- und der L-Serie im langwelligen Röntgengebiet als auch Untersuchungen der Funkenspektren im äußersten Ultraviolett mit gutem Erfolg unternahm.

Die meisten älteren Bestimmungen im Zwischengebiet sind nach indirekten Methoden ausgeführt worden. Diese gehen entweder darauf aus, die Absorptionsgrenzen zu bestimmen, oder man berechnet die Anregungsspannung der Strahlung nach photoelektrischen Methoden. In beiden Fällen erhält man aber nur die Grenze der Strahlung und nicht die Werte der Emissionslinien. Wenn die Strahlungsverhältnisse bei den leichten Elementen denjenigen der schweren ähnlich wären, was freilich bei den Elementen H bis Ne, wo die L-Schale noch nicht völlig besetzt ist, ziemlich unsicher sein dürfte, sollte die Energie der K_α-Strahlung aus der Gleichung $V_{K_\alpha} = V_{K\text{-Gr.}} - V_{L\text{-Gr.}}$ berechnet werden können. Diese Berechnung ist in der Tabelle 4 für solche Elemente ausgeführt worden, wo gleichzeitig Beobachtungen der K- und der L-Grenze vorliegen.

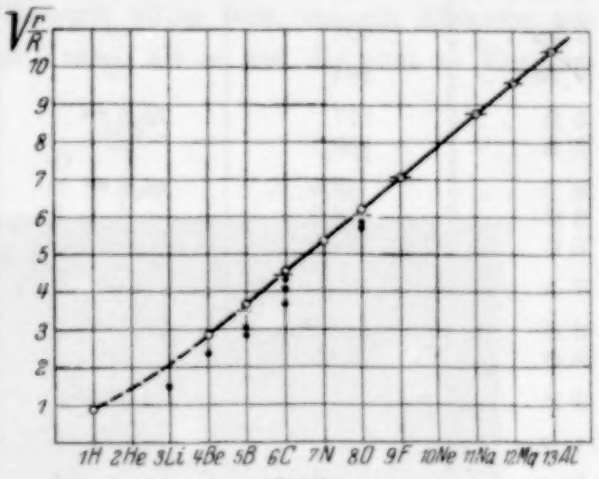


Fig. 3.

Eine möglichst vollständige Übersicht der Wellenlängenbestimmungen der K_α-Strahlung von den leichten Elementen ist in der Tabelle 5 gegeben. Die $\sqrt{\frac{\nu}{R}}$-Werte der dort angegebenen Wellenlängen sind in der Fig. 3 graphisch dargestellt.

Aus der Tabelle 5 geht deutlich hervor, daß die Kristallmessungen oberhalb 20 Å zu hohe Werte der Wellenlängen gegeben haben. Der Unterschied ist bei O und C etwa 1 Å, bei B über 5 Å. Aus der Vergleichung der nach indirekten Methoden berechneten Wellenlängen mit den jetzt gemessenen dürfte nicht viel zu schließen sein, da, wie oben erwähnt wurde, die Methode der Berechnung etwas unsicher ist. Zu

---

* Erik Bäcklin, a. a. O.

** Jean Thibaud, Journ. de phys. **8**, 13, 1927; Phys. ZS. **29**, 241, 1928.

Tabelle 5.

	Ber. (Tabelle 4)	Kristall	Gitter	
1 H . .	1215,68 *	—	1215,7 †	—
2 He . .	—	—	—	—
3 Li . .	407	—	—	—
4 Be . .	164	—	—	113,4
5 B . .	117	73,5 **	68,0 ††	67,80
5 B . .	100	—	—	—
6 C . .	68,5	45,5 **	44,9 ††	44,70
6 C . .	48,0	—	—	—
6 C . .	54,5	—	—	—
7 N . .	—	—	31,8 ††	31,77
8 O . .	26,4	24,8 **	23,8 ††	23,77
8 O . .	27,5	—	—	—
9 F . .	—	18,32 ***	—	18,30
11 Na . .	—	11,883 ††††	—	11,88
12 Mg . .	9,85	9,868 ††††	—	9,904
13 Al . .	—	8,3229 ****	—	8,323 †††

Tabelle 6.

	λK_α Å	λ K-Grenze Å	$\lambda K_\alpha - \lambda$ K-Grenze Å
4 Be . .	113,4	118 (Le-Cl)	negativ
5 B . .	67,80	83,8 „	„
5 B . .	—	83,5 (Hughes)	„
5 B . .	—	66,5 (Mo-Fo)	1,3
5 B . .	—	84,2 (Holtzmann)	negativ
6 C . .	44,70	57,5 (Hughes)	„
6 C . .	—	42,7 (Kurth)	2,0
6 C . .	—	43,2 (Ri-Ba)	1,5
6 C . .	—	45,4 (Mo-Fo)	negativ
6 C . .	—	47,6 (Le-Cl)	„
6 C . .	—	43,0 (Holtzmann)	1,7
7 N . .	31,77	33,0 (Le-Cl)	negativ
7 N . .	—	33,0 (Mo-Fo)	„
8 O . .	23,77	23,8 (Kurth)	0
8 O . .	—	25,8 (Mo-Fo)	negativ
8 O . .	—	24,8 (Le-Cl)	„
12 Mg . .	9,90	9,5 (Coster)	0,4
12 Mg . .	—	9,5 (Le-Cl)	0,4

* Theoretisch. ** Dauvillier. *** Thoraeus. **** Larsson. † Millikan (Konkavgitter). †† Thibaud (Plangitter). ††† Bezugslinie. †††† E. Hjalmar, ZS. f. Phys. **1**, 456, 1920. Die übrigen Werte der Tabelle sind bei dieser Untersuchung bestimmt.

einem entschieden deutlicheren Resultat kommt man durch Vergleichung der in Tabelle 4 angegebenen K-Grenzen mit den jetzt erhaltenen Wellenlängen der Linie K_α. Diese sind in der Tabelle 6 zusammengestellt.

Die meisten älteren Bestimmungen haben also das Resultat ergeben, daß die Grenze der K-Strahlung weicher sein sollte, als die entsprechende K_α-Linie, d. h. es sollte mehr Energie nötig sein, um ein Elektron aus der K-Schale vollkommen zu entfernen, als es auf die nächste Energie-

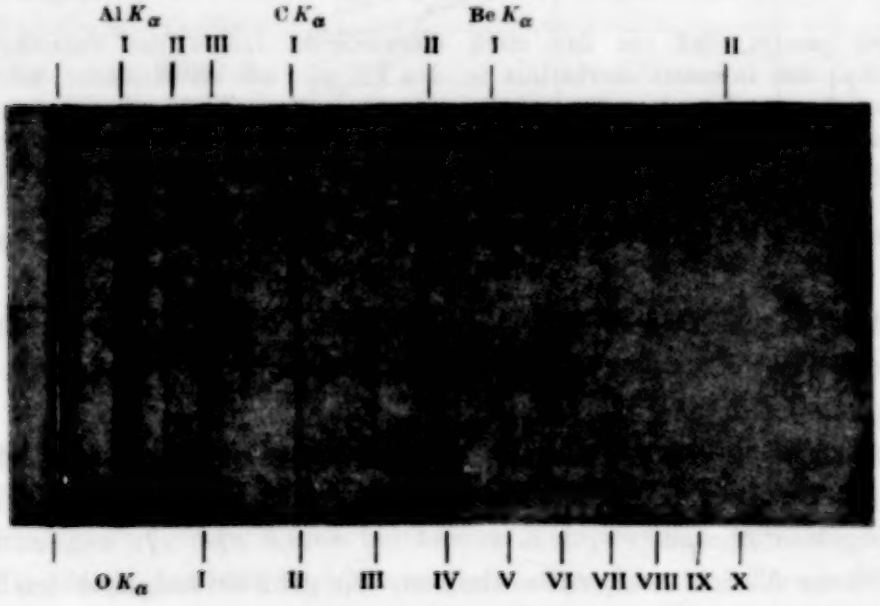


Fig. 4. (Platte 194.)

stufe zu bringen, was wohl kaum zu denken ist. Die bisherigen indirekten Methoden zur Wellenlängenbestimmung im Zwischengebiet dürften also als ziemlich unzuverlässig gelten.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Manne Siegbahn, der mir diese Arbeit vorgeschlagen hat, sage ich meinen besten Dank für seine wertvollen Ratschläge und für das Interesse, mit dem er der Arbeit folgte. Auch meinen Kollegen im Institut, besonders dem Herrn Privatdozenten Dr. Erik Bäcklin, bin ich für ihre freundliche Hilfe bei der Arbeit zu herzlichem Dank verbunden.

Uppsala, Physikalisches Institut, November 1928.

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Reichsuniversität Utrecht.)

Über das Intensitätsverhältnis in den Flügeln stark umgekehrter Multipletts.

Von **W. Bleeker** in Utrecht.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 15. November 1928.)

Es wird gezeigt, daß bei den stark umgekehrten Linien des Natriumdubletts ($1s - 2p$) das Intensitätsverhältnis in den Flügeln mit zunehmender Entfernung von dem Kerne sich dem theoretisch erwarteten Werte 2 : 1 nähert. Auch beim Kaliumdublett ($1s - 3p$) und beim Zinktriplett ($1p - 1s$) scheint dies der Fall zu sein. Beim Cäsiumdublett ($1s - 3p$) findet man in den Flügeln ein Verhältnis 5,5 : 1; dies ist eine Bestätigung der Messungen Samburskys. Mittels einer einfachen theoretischen Betrachtung kann man die Dichte des emittierenden Gases berechnen.

Bei Intensitätsmessungen soll man immer darauf achten, daß die Dichte des emittierenden Gases so klein wie möglich ist, damit keine Absorption auftritt.

Man darf annehmen, daß diese Selbstabsorption für die Wellenlängen des Kernes der Spektrallinie am größten ist und für die Wellenlängen des Flügels abnimmt.

Unsere Absicht war, zu bestimmen, wie groß bei umgekehrten Linien das Verhältnis der Intensitäten bei beiden Komponenten in äquivalenter Entfernung (äquivalent in bezug auf die Verbreiterung der Linien) von dem Kerne ist, und zu untersuchen, wie dies Verhältnis sich als Funktion dieser Entfernung ändert.

Man erwartet, daß das Verhältnis im Kerne der Linie am meisten von den Werten von Anderen bei geringer Dampfdichte gefunden verschieden ist und sich diesem Wert in den Flügeln allmählich annähert; langsam bei den größeren, rascher bei den kleineren Dampfdichten. Dies war bei den Dubletts und dem Triplett, welche wir untersuchten, auch wirklich der Fall.

Instrumentelles. Wir benutzten den Gitterspektrographen der heliophysikalischen Abteilung des Instituts (Plangitter; Dispersion 4 Å/mm in der ersten Ordnung). Schwärzungsmarken wurden mittels eines Zeissschen Stufenfilters angebracht, welches wir vor den Spalt des Spektrographen stellten; wenn nötig, wurde auf derselben Platte auch eine Aufnahme der Standardlampe gemacht, um nachher wegen der Farbenempfindlichkeit korrigieren zu können.

Die Platten wurden mit Hilfe des selbstregistrierenden Mikrophotometers ausgemessen und die Photogramme in gebräuchlicher Weise in Intensitäten umgerechnet. Nachher wurde das Profil der Linien (Intensität — Wellenlänge) gezeichnet und das Verhältnis in verschiedener Entfernung von dem Kerne bestimmt.

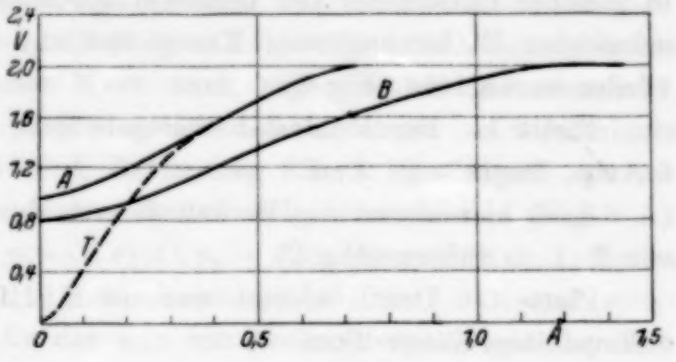


Fig. 1.

Natrium. Dublett $1s - 2p$. (λ 5890 Å, λ 5896 Å.)

Als Lichtquelle wurde ein 220 Volt-Bogen benutzt zwischen zwei Kohlestäben, deren unterer mit einem Gemisch von Na_2CO_3 und feiner Kohle gefüllt war.

Platte A. Der untere Kohlestab war mit einem Gemisch von 1 Teil Na_2CO_3 und 40 Teilen Kohle gefüllt. Stromstärke 4,5 Amp., Bogenlänge 1 cm.

Die Linien waren stark umgekehrt mit einer zentralen Einsenkung des Intensitätsprofils. Als äquivalente Entfernungen wurden gleiche Entfernungen aus dem Kerne bei beiden Komponenten gewählt.

Im Kerne hat das Verhältnis $(1s - 2p_{3/2}) : (1s - 2p_{1/2})$ den Wert 0,8 : 1; je nachdem man sich aus dem Zentrum entfernt, wächst es auf den Wert 2 : 1 (Fig. 1).

Platte B. Der untere Kohlestab war mit Na_2CO_3, 1 : 100, gefüllt. Stromstärke 5 Amp., Bogenlänge 4 cm (also viermal die Länge der Aufnahme A).

Hier war keine zentrale Einsenkung mehr zu beobachten; das Verhältnis war im Kerne 1 : 1, es wächst schneller als bei A auf den Wert 2 : 1 (Fig. 1).

Kalium. Dublett $1s - 3p$. (λ 4044 Å, λ 4047 Å.)

Die Lichtquelle war dieselbe wie bei Natrium, nur war jetzt die untere Kohle mit KCl gefüllt.

Da das Dublett das zweite der Serie ist, sind die Flügel hier sehr viel schwächer als bei dem untersuchten Na-Dublett. Die Expositionszeiten wurden darum sehr groß gewählt; jetzt aber war das Verhältnis im Kerne wegen der Überexposition nicht zu bestimmen.

Platte A. Der Kohlestab war mit reinem KCl-Salz gefüllt. Stromstärke 5 Amp., Bogenlänge 1 cm.

Obwohl man die Linien wegen der langen Exposition sehr weit verfolgen kann, ist es nicht möglich, weit genug zu kommen. Es ist aber deutlich zu sehen, daß das Verhältnis, bestimmt aus den Intensitäten in gleicher Entfernung von dem Kerne für beide Komponenten, mit zunehmender Entfernung vom Kerne erst ein wenig abnimmt, um dann wieder zu wachsen (Fig. 2).

Platte B. Der Kohlestab war mit KCl, 1 : 1, gefüllt. Stromstärke 5 Amp., Bogenlänge 1 cm.

Auch hier nimmt das Verhältnis erst ab, um sich dann einem Werte von 2 : 1 zu nähern (Fig. 2).

Platte C. Der Kohlestab war mit KCl, 1 : 1, gefüllt. Stromstärke 5 Amp., Bogenlänge 2 cm.

Wiederum erst eine Abnahme, dann eine rasche Zunahme (Fig. 2).

Cäsium. Dublett $1s - 3p$. (λ 4555 Å, λ 4593 Å.)

Als diese Messungen ausgeführt wurden, waren die Resultate der Untersuchungen Samburskys an diesem Dublett noch nicht bekannt*.

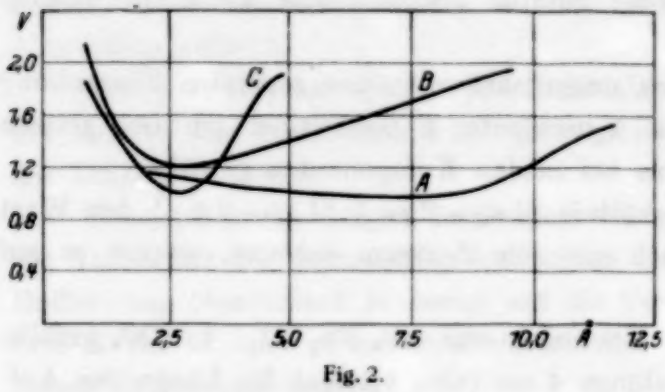


Fig. 2.

Die Abweichungen, die immer gefunden waren, wurden bisher auch der Selbstabsorption zugeschrieben. Wir erwarteten in der hier beschriebenen Weise für das Verhältnis in den Flügeln den theoretischen Wert 2 : 1.

Zwei Aufnahmen gaben uns aber in sehr großer Entfernung als mittleren Wert des Verhältnisses der Intensitäten in derselben Distanz von dem Kerne bei beiden Komponenten 5,5 : 1.

Nachher zeigte sich, daß dies in guter Übereinstimmung mit dem von Sambursky gefundenen Werte 5 : 1 steht*. Seine Untersuchung hat wohl sichergestellt, daß Selbstabsorption nicht die Ursache dieses abweichenden Verhältnisses ist, und man darf unsere Messungen als eine Bestätigung derselben betrachten.

Die Lichtquelle war dieselbe wie bei Natrium und Kalium, der untere Stab war mit Cäsiumchlorid, 1 : 1, gefüllt. Stromstärke 5 Amp., Bogenlänge 1 cm.

---

* S. Sambursky, ZS. f. Phys. **49**, 731, 1928.

Zink. Triplett $1p - 1s$. (λ 4810 Å, λ 4722 Å, λ 4680 Å.)

Als Lichtquelle diente ein 220 Volt-Bogen zwischen zwei Zinkstäben. Die Dampfdichte war also sehr groß und die Linien stark umgekehrt. Stromstärke 2,4 Amp., Bogenlänge 1 cm.

Das Verhältnis $(1p_2 - 1s) : (1p_0 - 1s)$, wofür man theoretisch den Wert 5 : 1 erwartet, welcher Wert auch experimentell gefunden ist*, ist, wenn man auch hier wieder gleiche Entfernungen als äquivalente Entfernungen wählt, in 10,0 Å Entfernung 2,7 : 1. Es nimmt mit zunehmender Entfernung vom Kerne ab und steigt dann wieder (Fig. 3 A).

Für das Verhältnis $(1p_1 - 1s) : (1p_0 - 1s)$, theoretisch 3 : 1, finden wir in 10 Å Entfernung 2 : 1, es nimmt erst ab bis 1,9 : 1 und steigt dann wieder (Fig. 3 B). In der von uns beobachteten maximalen Entfernung scheint bei solcher starken Selbstabsorption der Wert für unendlich dünne Schicht noch nicht erreicht zu sein.

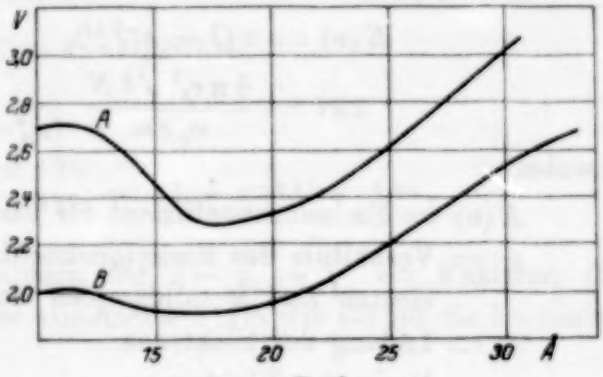


Fig. 3.

Bei dieser Untersuchung ist es von großer Bedeutung, die Intensität des kontinuierlichen Untergrundes mit großer Genauigkeit zu messen, um dafür korrigieren zu können. Am besten würde dieser Untergrund ziemlich stark sein, weil man dann nicht dazu gezwungen ist, im oberen fast horizontalen Teile der Schwärzungskurve Intensitäten abzulesen.

Beim Al-Dublett $1p - 1s$ (λ 3944 Å, λ 3962 Å) war dieser Untergrund immer zu wenig intensiv, und wir konnten keine zuverlässigen Resultate bekommen. Aus anderen Gründen war es uns nicht möglich, die Verhältnisse im Flügel des Mg-Tripletts $1p - 1s$ (λ 5184 Å, λ 5173 Å, λ 5168 Å) zu bestimmen. Die Flügel erstreckten sich so weit, daß sie sich überlagerten, und wir konnten die resultierende Profilkurve wegen der starken Asymmetrie der Linien nicht analysieren.

Theoretisches. Wenn man sich die Kurven, die wir für K und Zn (Fig. 2 und 3) erhalten haben, ansieht, wird man beobachten, daß mit zunehmender Entfernung vom Kerne immer erst eine Abnahme, dann eine Zunahme des Verhältnisses erfolgt.

---

* L. S. Ornstein, Proc. Phys. Soc. 1925, S. 47.

Bei Natrium (Fig. 1), wo die Dampfdichte sehr viel kleiner ist, wird die Abnahme nicht gefunden. Wir versuchten mittels einer einfachen theoretischen Betrachtung einen Einblick in die Ursachen zu bekommen, welche diesen fremdartigen Verlauf der Kurven bestimmen, und da die Erscheinungen bei großer Dampfdichte sehr verwickelt sind, werden wir nur versuchen, den allgemeinen Charakter der Na-Kurven zu beschreiben und die Anzahl der Na-Atome pro Kubikzentimeter zu berechnen.

Wir benutzen die Drudesche Dispersionstheorie und denken uns den aus einem leuchtenden und einem absorbierenden Kerne zusammengesetzten Bogen umgeben von einem Mantel, welcher nur absorbiert. Wir berechnen für den Kern die Emission in derselben Weise, wie es Ladenburg und Reiche machten für eine Natriumflamme*.

Man findet:

$$E(\nu) = \varepsilon\,(1 - e^{-2\,kl}),$$

$$2\,kl = \frac{4\,\pi\,e_e^2\,\nu'\,l\,N}{n_0\,c\,m}\;\frac{\nu^2}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2\,\nu'^2},$$

wobei

$E(\nu)$ = Emissionskoeffizient für die Frequenz ν,
ε = Verhältnis des Emissionskoeffizienten zum Absorptionskoeffizienten (bei Metalldämpfen fast unabhängig von ν),
e_e = Ladung des Elektrons,
m = Masse des Elektrons,
ν' = Dämpfungsfaktor,
c = Lichtgeschwindigkeit,
n_0 = Brechungsindex von Na-Dampf für Wellenlängen in großer Entfernung von der Linie,
N = Anzahl der Dispersionselektronen pro Kubikzentimeter,
l = Dicke der Schicht,
ν_0 = Frequenz des Kernes der Linie.

Nach Ladenburg** ist beim Na-Dublett die Anzahl der Dispersionselektronen für die eine Linie zweimal so groß wie für die andere; setzen wir also für die schwächere Komponente die Anzahl der Dispersionselektronen gleich N, so müssen wir für die stärkere Linie $2\,N$ annehmen.

Für die ausgestrahlte Energie finden wir bzw. pro Frequenzeinheit und pro Zeiteinheit:

$$\varepsilon\,(1 - e^{-2\,kl}) \quad \text{und} \quad \varepsilon\,(1 - e^{-4\,kl}).$$

---

* R. Ladenburg und F. Reiche, Ann. d. Phys. **42**, 181, 1913.
** R. Ladenburg, ZS. f. Phys. **4**, 451, 1921.

Das Intensitätsverhältnis ist:

$$\frac{\varepsilon(1-e^{-4kl})}{\varepsilon(1-e^{-2kl})} = 1 + e^{-2kl},$$

es nähert sich also bei unendlich dünner Schicht dem Werte 2:1. Es tritt aber auch Absorption im kälteren Mantel auf.

Wir nehmen an, daß die vom Mantel ausgestrahlte Energiemenge klein ist in bezug auf die Energie, die uns vom Kerne erreicht.

Sei die Dicke des absorbierenden Mantels l_1, so tritt eine Energiemenge heraus, die für die schwächere Linie pro Frequenzeinheit und pro Zeiteinheit:

$$\varepsilon(1-e^{-2kl})e^{-2kl_1}$$

beträgt und für die stärkere Linie:

$$\varepsilon(1-e^{-4kl})e^{-4kl_1}.$$

Das Intensitätsverhältnis ist:

$$\frac{\varepsilon(1-e^{-4kl})e^{-4kl_1}}{\varepsilon(1-e^{-2kl})e^{-2kl_1}} = (1+e^{-2kl})e^{-2kl_1}.$$

Diese Funktion hat ein Minimum für $\nu - \nu_0 \to 0$, ein Maximum für $\nu - \nu_0 \to \infty$; sie hat dieselbe allgemeine Form wie die für die Na-Linien gefundenen Kurven.

Wenn man die Kurven mittels der klassischen Dispersionstheorie beschreiben will, so ist es auch klar, daß man nur dann für die beiden Komponenten in derselben Entfernung messen darf, wenn die ν' für beide Komponenten gleich sind.

Dies trifft nach der neueren Theorie* in den von uns untersuchten Fällen zu.

Für verschiedene Verhältnisse $l:l_1$ und verschiedene Entfernungen vom Kerne haben wir mit Hilfe der Na-Kurve (Fig. 1 A) N berechnet. Wir finden:

$\lambda - \lambda_0$ \ $l:l_1$	0,25	1,00	4,00
0,0 Å	$0{,}5 \cdot 10^{12}$	$1{,}6 \cdot 10^{12}$	$0{,}9 \cdot 10^{12}$
0,3	$9{,}2 \cdot 10^{12}$	$28 \cdot 10^{12}$	$14{,}7 \cdot 10^{12}$
0,6	$2{,}3 \cdot 10^{12}$	$28 \cdot 10^{12}$	$31 \cdot 10^{12}$

* W. Pauli jun., Handbuch der Physik, Bd. XXIII: Quanten.

Bei unserer Berechnung ist vorausgesetzt:

$n_0 = 1$,	$c = 3 . 10^{10}$,
$\nu' = 1{,}4 . 10^{11}$ (der mittlere Wert von ν' für die beiden Na-Linien nach Voigt*),	$\frac{e_e}{m} = 5{,}31 . 10^{17}$,
	$e_e = 4{,}77 . 10^{-13}$.

Die Werte sind beim Verhältnis $l : l_1 = 1 : 1$ am wenigsten voneinander verschieden, besonders wenn man auf die Werte von 0,3 Å bis 0,6 Å Entfernung vom Kerne achtet.

Für $l : l_1 = N = 28 . 10^{12}$ ist noch bei verschiedenen anderen Werten von $\nu - \nu_0$ (oder $\lambda - \lambda_0$) das Verhältnis berechnet, und wir finden die Kurve T von Fig. 1.

Diese Kurve zeigt im zentralen Teile große Abweichungen von der experimentell gefundenen Kurve; es leuchtet aber ein, daß man bei einer so einfachen Betrachtung ein Zusammenfallen der Kurve nicht erwarten darf.

Unsere Annahme der zwei getrennten Schichten ist ja sehr einfach, und besonders starke Selbstumkehr im Kerne und andere Bedingungen (z. B. der Starkeffekt) werden die Erscheinungen viel verwickelter machen, als wir voraussetzten.

Dennoch ist die ziemlich gute Übereinstimmung im Bereiche von 0,3 Å bis 0,65 Å befriedigend.

Für die Na-Kurve der Platte B finden wir beim Verhältnis $l : l_1 = 1 :$

$\lambda - \lambda_0$	N
0,25	$6 . 10^{12}$
0,50	$60 . 10^{12}$
1,00	$75 . 10^{12}$

Nach Minkowski** ist die Zahl der Atome gleich der Zahl der Dispersionselektronen für die beiden D-Linien zusammen (also $3N$). Man kann unseren Rechnungen entnehmen, daß die Zahl der Na-Atome pro Kubikzentimeter unter den Umständen, unter welchen eben die zentrale Einsenkung der D-Linien hervortritt, ungefähr $1{,}5 . 10^{14}$ ist. Aus dem Verhältnisse der total ausgestrahlten Energiemengen der beiden Linien (in diesem Falle 1,39 : 1) kann man den Rechnungen von Ornstein und van der Held*** entnehmen, daß bei der Flamme unter diesen Umständen die Anzahl Atome von derselben Grenzenordnung ist.

Ich möchte Professor L. S. Ornstein und Dr. M. Minnaert für ihr reges Interesse an dieser Untersuchung verbindlichst danken.

* W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik.

** R. Minkowski, Ann. d. Phys. **66**, 206, 1921.

*** L. S. Ornstein und E. F. M. van der Held, Ann. d. Phys. **85**, 953, 1928.

Über die Bandenspektren von CO, nach Versuchen mit der elektrodenlosen Ringentladung (mit einem Anhang über die Swan- und Cyanbanden).

Von **Gerhard Herzberg** in Darmstadt.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 2. November 1928.)

In der elektrodenlosen Ringentladung wird ein neues Bandensystem des CO gefunden, das denselben Endzustand hat wie die Ångströmbanden. Der Anfangszustand ist ein ^1D-Zustand. Das Verhalten dieser Banden und der anderen Bandensysteme des CO in der elektrodenlosen Entladung wird beschrieben. Es werden eine Reihe von Beobachtungen über die Intensitätsverteilung in diesen Bandensystemen beschrieben, die in naher Analogie zu dem Verhalten des N_2 stehen. Das Zahlenmaterial über diese Banden wird, soweit es nicht schon in der Literatur geordnet ist, zusammengestellt (Kantenschemata). Außerdem werden die Dissoziationsvorgänge bei CO^+ und CN behandelt, die denen bei N_2^+ sehr ähnlich sind. Schließlich wird in einem Anhang das Verhalten der Swan- und CN-Banden in der elektrodenlosen Entladung beschrieben. Bei den letzteren ist besonders das Hervortreten der früher im Nachleuchten gefundenen einzelnen Bandenlinien der Banden $n' = 0$ bemerkenswert.

A. Einleitung.

In einigen früheren Arbeiten* habe ich die Bandenspektren und das Nachleuchten des Stickstoffs in der elektrodenlosen Ringentladung näher untersucht. Die dabei erhaltenen Ergebnisse ließen es lohnend erscheinen, auch die Bandenspektren des Kohlenoxyds, das ja bekanntlich dem Stickstoff wegen der gleichen Zahl von Außenelektronen sehr ähnlich ist, in derselben Entladung zu untersuchen. Die dabei erhaltenen Ergebnisse sollen zusammen mit einigen allgemeineren Überlegungen im folgenden beschrieben werden. Bei dieser Gelegenheit habe ich ferner das in der Literatur ziemlich verstreute** Zahlenmaterial über die verschiedenen Bandensysteme des CO zusammengestellt.

Die einzige mir bekannte frühere Untersuchung von CO in der elektrodenlosen Ringentladung ist die von Donaldson***, der jedoch

---

* G. Herzberg, Ann. d. Phys. **86**, 189, 1928; ZS. f. Phys. **49**, 512, 761, 1928.

** R. Mecke (Phys. ZS. **26**, 217, 1925; **28**, 479, 514, 1927) gibt in seinen zusammenfassenden Berichten über Bandenspektra nur eine kurze, vollständige Übersicht der Literatur, einige Kantenformeln und das Kantenschema der Kometenschwanzbanden; R. T. Birge (Phys. Rev. **28**, 1157, 1926) gibt in seiner Arbeit über die Bandenspektren von CO das Zahlenmaterial nur für die vierte positive Gruppe und die Ångströmbanden.

*** H. Donaldson, Phil. Mag. (6) **22**, 720, 1911.

nur wenige kurze Angaben macht, die das unten Folgende nicht berühren, zumal er nur visuell spektroskopiert hat.

Die von mir benutzte Anordnung war dieselbe wie bei meinen früheren Untersuchungen*. Wiederum wurde zum Teil eine Glasröhre von 4 cm Durchmesser, zum Teil die Quarzröhre von 6 cm Durchmesser, die schon bei den genannten Untersuchungen benutzt worden war, verwandt.

Das CO wurde aus Schwefelsäure und Ferrocyankali** entwickelt und über KOH und P_2O_5 aufbewahrt. Es war so rein, daß erst bei Überbelichtung der CO-Banden die CN- und N_2^+-Banden schwach auftraten. Da dies nicht störte, wurde von dem Versuch, noch größere Reinheit zu erzielen, abgesehen.

Das sichtbare Spektralgebiet wurde mit einem großen Steinheilschen Glasspektrographen langer Brennweite untersucht, und zwar mußten zwei verschiedene Justierungen angewandt werden. Die Dispersion war im Rot 50 Å.-E./mm, im Violett 5 Å.-E./mm. Im Ultraviolett wurde ein großer Steinheilscher Quarzspektrograph ebenfalls in zwei verschiedenen Justierungen (wegen der starken Krümmung der Bildebene) benutzt. Die Dispersion war 30 Å.-E./mm bei λ 4000 und 4 Å.-E./mm bei λ 2200. Im ganzen waren also, um das ganze Spektralgebiet von 2000 bis 8000 Å.-E. zu untersuchen, vier gleichartige Serien von Aufnahmen zu machen.

Vor der Besprechung der spektroskopischen Ergebnisse sei zunächst zur Erleichterung des Verständnisses eine kurze Übersicht über die verschiedenen Entladungsformen bei den verschiedenen Entladungsbedingungen gegeben.

B. Die verschiedenen Entladungsformen in der elektrodenlosen Ringentladung in CO.

a) Bei hohem Drucke besteht die Entladung in einem grünlichweißen, mehr oder weniger schmalen (je nach der Funkenlänge), lichtschwachen Ring.

b) Mit abnehmendem Drucke verbreitert sich zunächst dieser Ring, während am Rande ein blasser grüngelber Ring erscheint. Die Mitte ist dann grünlichblau. Diese Entladung ist schon wesentlich heller und wird mit zunehmender Anregung (abnehmender Druck bzw. wachsende Funkenlänge) noch heller. Der äußere Ring wird gleichzeitig breiter

* G. Herzberg, Ann. d. Phys. **84**, 553, 1927.

** Siehe M. W. Travers, Experimentelle Untersuchung von Gasen. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn, 1905.

und weißlicher. Diese Entladung steht in voller Analogie (siehe weiter unten) zu der N_2-Entladung bei schwacher Anregung (rötlicher Ring mit blauer Mitte), von der l. c. die Rede war. Bei der O_2-Ringentladung z. B. tritt ein entsprechender Zustand nicht auf. So zeigt sich auch schon rein äußerlich die Ähnlichkeit zwischen CO und N_2.

c) Mit weiter steigender Anregung erfolgt schließlich ziemlich unvermittelt, wie es auch bei fast allen anderen Ringentladungen beobachtet wurde, der Übergang zur hellen Ringentladung, die in diesem Falle zunächst in einem schmalen, sehr hellen, weißen Ringe besteht. Derselbe erscheint bei großer Funkenlänge (15 mm Abstand bei 5 cm-Kugeln) bei etwa 1 mm Druck.

d) Indem er sich verbreitert, löst dieser Ring sich bald in drei verschiedenfarbige Ringe (geschichtete Ringentladung) auf, einen rosafarbenen, einen weißen und einen hellgrünen, an welch letzteren sich schließlich noch ein dunkelgrüner anschließt. Alle Farben sind stark mit Weiß vermischt und die Trennung der Ringe ist nicht sehr scharf.

e) Mit weiter abnehmendem Drucke, wenn die Ringe sich so weit verbreitert haben, daß der innerste bis zur Mitte reicht, bildet sich dort ein weißer, axialer, leuchtender Faden, der mit abnehmendem Drucke immer breiter wird*.

f) Bei dem niedrigsten Drucke schließlich, bei dem noch eine Entladung möglich war, ist der Röhrenquerschnitt nahezu gleichmäßig von einem hellen, gelbgrünlich-weißen Leuchten erfüllt.

Zu bemerken ist, daß in der Quarzröhre die verschiedenfarbigen Ringe viel weniger deutlich ausgeprägt waren als in der Glasröhre, was mit der Verschiedenheit des Durchmessers der beiden Röhren zusammenhängen dürfte. Ebenso trat der leuchtende weiße Faden in der Mitte der Quarzröhre nicht oder nur sehr schwach auf. Auch in der Glasröhre traten die genannten Erscheinungen nicht auf, wenn die Funkenlänge nur klein war (< 10 mm), auch nicht bei entsprechend niedrigerem Drucke.

Es wurden auch Aufnahmen von Entladungen in Gemischen von Helium mit wenig CO gemacht, zum Vergleich mit den Untersuchungen von Merton und Johnson** und Johnson***. Die dabei auf-

---

* Ähnliches wurde auch bei H_2, N_2 und O_2 gefunden (siehe G. Herzberg, Ann. d. Phys. **84**, 561, 1927; Phil. Mag. **5**, 446, 1928), aber nicht so ausgeprägt wie hier.

** T. R. Merton und R. C. Johnson, Proc. Roy. Soc. London (A) **103**, 383, 1923.

*** R. C. Johnson, ebenda **108**, 343, 1925.

tretenden Leuchterscheinungen sind jedoch so verschiedenartig und nicht immer leicht reproduzierbar, daß sie hier nicht eingehender beschrieben werden sollen.

Bei allen Entladungsformen in reinem CO trat starke „Selbstevakuation" (cleaning up) auf, die, wenn nicht Gas nachgefüllt wurde, bis zum Hochvakuum ging, so daß es sich hier nicht um einen einfachen Zerfall von CO in C und O handeln kann, sondern offenbar um den Vorgang

$$2\,CO = C + CO_2,$$

was sich einerseits in einer Schwärzung der Wandung der Röhre, andererseits im Auftreten von fester Kohlensäure in der mit flüssiger Luft gefüllten Hg-Falle zeigte.

Wenn die Entladungsröhre selbst mit flüssiger Luft gekühlt wurde, war die Selbstevakuation bei den Entladungsformen a) und b) wesentlich rascher; immerhin doch so langsam, daß, wenn öfter nachgefüllt wurde, noch spektrographische Aufnahmen gemacht werden konnten. Sobald aber der Druck so niedrig war, daß die helle, weiße Ringentladung auftrat, trat fast momentan innerhalb weniger Sekunden eine Selbstevakuation bis auf Hochvakuum ein, so daß keine sichtbare Entladung mehr stattfand*.

Aus den eben genannten Beobachtungstatsachen geht nicht eindeutig hervor, ob die obengenannte Reaktion in einem Elementarakt vor sich geht, derart, daß ein angeregtes CO-Molekül mit einem normalen zusammenstößt, wobei das angeregte Molekül zerfällt, während sich das entstehende Sauerstoffatom sofort in demselben Elementarakt mit dem anderen CO-Molekül zu CO_2 verbindet, oder ob zunächst das angeregte CO-Molekül spontan zerfällt und dann erst beim nächsten Zusammenstoß des O-Atoms mit einem CO-Molekül die CO_2-Bildung erfolgt. In jedem Falle scheint auch in dieser Beziehung wieder das Verhalten des CO ganz ähnlich dem des N_2 zu sein. Wie bei CO erst mit Einsetzen der

* Wie beim Wasserstoff (siehe G. Herzberg, Ann. d. Phys. **84**, 553, 1927) und beim Stickstoff und Sauerstoff tritt bei Kühlung mit flüssiger Luft auch hier die helle Ringentladung erst bei viel geringerem Drucke auf als ohne Kühlung, bei gleicher Funkenlänge. Dies ist nicht, wie l. c. vermutet wurde, dadurch zu erklären, daß bei der tiefen Temperatur zur Lichterregung eine stärkere Anregung notwendig ist, sondern aus dem trivialen Grunde, daß bei der niedrigen Temperatur die Dichte in der Entladungsröhre entsprechend größer ist. Diese bestimmt ja die freie Weglänge der Elektronen, die ihrerseits wieder die Anregungsstärke bedingt. Auf die an sich selbstverständliche Tatsache, die aber doch in der Literatur, wie auch im obigen Falle, häufig übersehen wurde, daß nämlich nicht der Druck, sondern die Dichte der maßgebende Faktor bei elektrischen Entladungen ist, hat kürzlich wieder A. Güntherschulze (Naturw. **16**, 206, 1928) in einem Referat über Seeligers „Gasentladungen" hingewiesen.

hellen weißen Ringentladung ein starker Zerfall von CO einsetzt, so bei N_2 auch erst beim hellen Ringstrom, wobei dann das Nachleuchten auftritt*. Auch dort kann es sich um einen spontanen Zerfall oder um einen Zerfall durch Stoß zweiter Art handeln**. Ähnlich wie bei N_2 dürfte auch bei CO der Zerfall desselben damit zusammenhängen, daß für einige Elektronenzustände nur eine begrenzte kleine Zahl von Schwingungszuständen bzw. nur der schwingungslose Zustand vorhanden sind (siehe weiter unten).

Ganz analog wie bei N_2 ist schließlich auch das Verhalten des Linienspektrums. Vom Bogenspektrum der Kohle tritt bei den verschiedenen Entladungsformen im ganzen beobachteten Gebiet nur die intensive Linie λ 2478,6 auf, analog, wie in Stickstoff außer im Ultrarot keine Bogenlinien beobachtet wurden***. Das Funkenspektrum**** ist dagegen bei starker Anregung [Entladungsformen d), e), f)] sehr stark vorhanden, ähnlich wie das N II-Spektrum, nur relativ zu den Banden noch stärker. Auch bei schwacher Anregung [Entladungsformen a) und b)] ist es ebenso wie die genannte Bogenlinie, wenn auch in wesentlich geringerer relativer Intensität wiederum ebenso wie das N II-Spektrum in der N_2-Entladung vorhanden und schließlich ist es wie dieses relativ zu den Banden bei mittlerer Anregung (c) besonders schwach (nur die starke Linie λ 4267 ist deutlich erkennbar).

Sehr auffallend ist, daß im Gegensatz zu dem starken Auftreten des C II-Spektrums das O II-Spektrum, von dem intensive Linien im beobachteten Gebiet liegen müßten, nicht auftritt. Dies steht in Übereinstimmung mit dem oben Gesagten, daß etwa gebildete O-Atome sich sehr rasch mit CO zu CO_2 vereinigen.

---

* Siehe G. Herzberg, ZS. f. Phys. **49**, 512, 1928.

** Bemerkt sei, daß auch bei CO, ebenso wie beim Zerfall des N_2, außer den normalen auch angeregte Atome entstehen, die die ultraroten Bogenlinien aussenden, angeregte O-Atome zu entstehen scheinen, da im Spektrum nur die roten und ultraroten Bogenlinien auftreten. Diese letztere Beobachtung möchte ich jedoch nur mit Vorbehalt wiedergeben, da bei der Verschiedenheit der Rotempfindlichkeit verschiedener mit Neocyanin sensibilisierter Platten aus einem Vergleich der Intensitäten von Linien im Rot bzw. Ultrarot mit denen im übrigen sichtbaren Gebiet keine ganz sicheren Schlüsse zu ziehen sind, wenn nicht viele Aufnahmen vorliegen und da ich aus Zeitmangel diesen Punkt nicht eingehender verfolgen konnte. Sollte sich jedoch die genannte Beobachtung als richtig erweisen, so müßte man wohl wenigstens zum Teil einen spontanen Zerfall des CO annehmen.

*** Siehe G. Herzberg, ZS. f. Phys. **49**, 512, 1928.

**** Siehe A. Fowler und E. W. H. Selwyn, Proc. Roy. Soc. London (A) **120**, 312, 1928.

Durch die Verschiedenheit der Atome des CO-Moleküls ist ein wesentlicher Unterschied gegenüber dem Stickstoff bedingt, der auf der Möglichkeit der Bildung anderer Molekülarten beruht. Es treten daher die nicht dem CO angehörenden Swanbanden unter Umständen sehr intensiv auf (siehe den Anhang).

C. Die Banden des neutralen CO.

Die neuere Literatur über die Bandenspektren von CO ist von Birge und Mecke* vollständig zusammengestellt worden. Arbeiten, die nach dem Erscheinen des Berichts von Mecke erschienen sind, sind mir nicht bekannt geworden**. Auf Grund der Arbeiten von Birge*** und Johnson**** hat Birge† das Schema der Elektronenniveaus von CO mit dem von Mg verglichen. Letzteres hat bekanntlich ebenso wie CO eine vollbesetzte Achterschale und außerhalb derselben zwei Elektronen. Deshalb ist nach den von Birge, Mecke und Mulliken in die Bandenspektroskopie eingeführten Gedankengängen eine weitgehende Ähnlichkeit des Niveauschemas zu erwarten, die sich auch tatsächlich ergeben hat (siehe Birge, l. c.). Zum leichteren Verständnis des Folgenden sind die beiden Niveauschemata von CO und Mg nebenstehend in Fig. 1 noch einmal wiedergegeben, und zwar in etwas anderer Weise als bei Birge, ähnlich der Darstellung von Grotrian††. Dieselbe bedarf wohl keiner näheren Erklärung. Im Niveauschema von Mg sind nur die intensivsten Übergänge eingezeichnet. Die Dicke der Striche soll wie bei Grotrian ein rohes Maß für die Übergangswahrscheinlichkeit geben. Die Elektronenniveaus X, A, B, a, b von CO, die sich aus der Analyse der verschiedenen Bandenspektren ergeben haben, sind entsprechend der Klassifikation von Birge (l. c.) als $1\,^1S$, $2\,^1P$, $2\,^1S$, $2\,^3P$, $2\,^3S$ in das Schema eingetragen. Die Klassifizierung des Niveaus c war bisher noch unsicher, Birge vermutet $3\,^3D$, Mecke $3\,^3P$. Beide liegen bei Mg sehr nahe zusammen. Dazu kommt jetzt ein neuer, sicherlich dem Singulettsystem angehörender Elektronenzustand C, der Anfangszustand der von mir neu gefundenen

---

* Siehe Anmerkung ** S. 815.

** Da die kurzen Sitzungsberichte von Hopfield (Phys. Rev. **29**, 356, 1927) und Hopfield und Birge (ebenda S. 922), in denen über die Auffindung neuer ultravioletter Banden und entsprechender Elektronenterme berichtet wird, keine näheren Angaben enthalten, sind sie im folgenden nicht berücksichtigt worden.

*** R. T. Birge, ebenda **117**, 229, 1926.

**** R. C. Johnson, Nature **117**, 376, 1926.

† Derselbe, Phys. Rev. **28**, 1157, 1926.

†† W. Grotrian, Graphische Darstellung von Spektren, Berlin 1928.

Banden, die weiter unten ausführlich behandelt werden sollen*. Der Endzustand dieser Banden ist A (siehe weiter unten). Der Zustand C entspricht nun aber offenbar dem $3\,^1D$-Niveau bei Mg, da er seinem

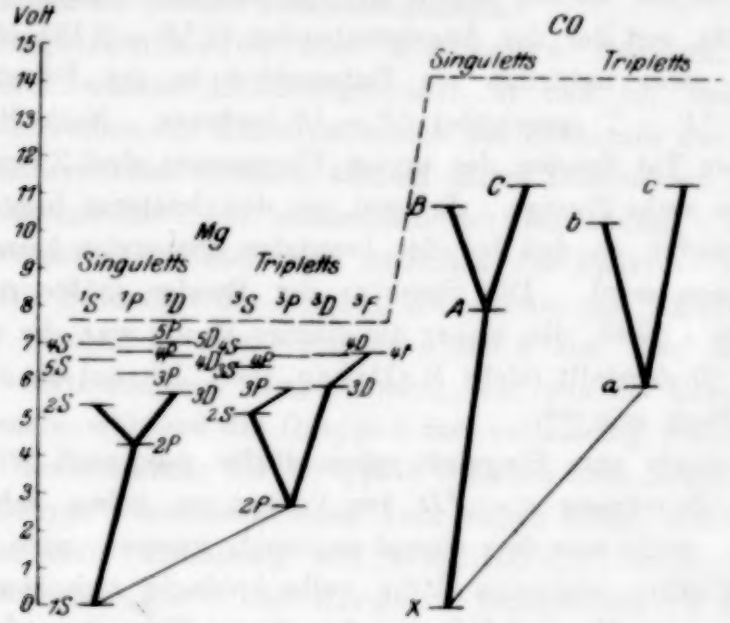


Fig. 1.

Tabelle 1.

Termbezeichnung		Termwert cm^{-1}	ω
X	$1\,^1S$	0	2149,7
A	$2\,^1P$	64 737	1497,3
B	$2\,^1S$	86 894	(2158)
C	$3\,^1D$	91 898	
a	$2\,^3P$	48 426 — 48 530	1724,8
b	$2\,^3S$	83 817	(2214)
c	$3\,^3D$	92 086	

Tabelle 2.

Termkombination		Name	Abschattierung
$A - X$	$1\,^1S - 2\,^1P$	4. positive Gruppe	Rot
$B - A$	$2\,^1P - 2\,^1S$	Ångströmbanden	Violett
$C - A$	$2\,^1P - 2\,^1D$	Neue Banden	"
$a - X$	$1\,^1S - 2\,^3P$	Cameronbanden	Rot
$b - a$	$2\,^3P - 2\,^3S$	3. positive Gruppe	Violett
$c - a$	$2\,^3P - 3\,^3D$	3 A Banden d. 3. pos. Gruppe	"

* Siehe die vorläufige Mitteilung in den Naturwissensch. **16**, 1027, 1928.

Werte nach (siehe Tabelle 1) zwischen B und c liegt und Überschneidungen bei der Zuordnung der Mg-Terme zu denen des CO wohl kaum anzunehmen sind*. Auch die Feinstruktur der neuen Banden scheint dafür zu sprechen, da sie, soweit sich das mit der benutzten Dispersion erkennen läßt, mit der der Ångströmbanden ($2\,^1P - 2\,^1S$) identisch ist. Nun müßte zwar natürlich ein Unterschied in der Feinstruktur des Überganges $^1P - {}^1D$ gegenüber $^1P - {}^1S$ bestehen. Nach Mulliken** haben in der Tat Banden des ersten Überganges drei Zweige, Banden des letzteren sechs Zweige. Je zwei von den letzteren liegen aber sehr nahe beieinander, so daß bei der benutzten Dispersion keine Trennung wahrgenommen wird. Die Struktur der Banden müßte mit der der Heliumbande λ 5733, die bisher die einzige Bande war, die einen Übergang $^1P - {}^1D$ darstellt (siehe Mulliken, l. c.), bis auf die ausfallenden Linien identisch sein***.

In Analogie zum Singulettsystem dürfte man auch beim Triplettsystem der Zuordnung $c = {}^3D$ den Vorzug zu geben haben. Dazu kommt, daß, wenn man dies einmal annimmt, nunmehr nach Auffindung des neuen Elektronenniveaus C die volle Analogie zwischen den Elektronenniveaus von Mg und CO aus der obigen Figur besonders deutlich hervorgeht. Den beobachteten Bandensystemen des CO entsprechen nunmehr gerade die intensivsten Linien von Mg. Sehr beachtenswert scheint mir dabei die Tatsache zu sein, daß entsprechend der verhältnismäßig geringen Intensität der Interkombinationslinie $1\,^1S - 2\,^3P$ von Mg auch die Cameronbanden**** ($a - X$), die diesem Übergang entsprechen, sehr schwach sind †. Alles dieses deutet darauf hin, daß die Auswahlregeln bei Bandenspektren meist denen bei Linienspektren ähnlich sind, wenn auch, wie schon bei CO^+, gewichtige Ausnahmen vorkommen (siehe unten).

---

* Anmerkung bei der Korrektur. Nach einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Prof. Birge fällt der Anfangszustand der neuen Banden mit einem der von Birge und Hopfield (s. o.) neu gefundenen Elektronenterme von CO zusammen. Dieser ist aber nach Birge sehr wahrscheinlich ein ^1S-Zustand.

** R. S. Mulliken, Phys. Rev. **28**, 1210, 1926.

*** Aufnahmen der fraglichen Heliumbande mit dem Glasspektrographen zeigen keinen merklichen Unterschied in der Feinstruktur gegenüber den neuen CO-Banden.

**** W. H. B. Cameron, Phil. Mag. **1**, 405, 1926.

† Dadurch dürfte auch das bisherige Fehlschlagen aller Versuche zu erklären sein, die Banden, die der Kombination des Endzustandes der ersten positiven Gruppe von N_2 mit dem Grundzustand entsprechen, aufzufinden, denn diese entsprechen ja den Cameronbanden (siehe H. Sponer, ZS. f. Phys. **41**, 611, 1926), während die bekannten ultravioletten Lyman-Birge-Hopfield-Banden des N_2 der vierten positiven Gruppe von CO entsprechen und daher wie diese viel leichter zu beobachten sind.

In den unter der Fig. 1 befindlichen Tabellen 1 und 2 sind die Terme* (Normalzustand $X = 0$) und die zwischen diesen Termen stattfindenden Übergänge, d. h. also die bisher eindeutig dem neutralen CO zugeordneten Bandensysteme zusammengestellt.

Die Ångströmbanden und die neuen Banden. Bei den ziemlich lichtschwachen Entladungsformen a) und b), besonders bei letzterer, beherrschen die Ångströmbanden das Spektrum des sichtbaren und nahen ultravioletten Gebiets, ähnlich ihrem Dominieren in gewöhnlichen Entladungsröhren bei unkondensierter Entladung. Es besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied zwischen den Spektren beider Entladungen. Die Entdecker der Banden, Ångström und Thalen, teilten nämlich die Banden in zwei Gruppen *a* und *b* ein. Bei meinen Aufnahmen der elektrodenlosen Ringentladung war nun die Gruppe *a* zwar ziemlich intensiv, während die Gruppe *b* fast vollständig fehlte bzw. erst bei starker Überbelichtung der Gruppe *a* schwach herauskam. Dasselbe Fehlen der Gruppe *b* konnte in einer 4 cm weiten Röhre mit Elektroden bei unkondensierter Entladung und etwa 0,5 mm Druck beobachtet werden. Nach Mecke** und Birge*** entsprechen die Banden der Gruppen *a* und *b* den zwei Werten $n' = 0$ und $n' = 1$ der Schwingungsquantenzahl des Anfangszustandes. Der einzige wesentliche Unterschied, der für die Erklärung der obigen Erscheinung in Frage kommt, dürfte die Stromdichte sein, die in der Geisslerröhre, wie sie offenbar von Ångström und Thalen benutzt wurde, im Gegensatz zu den beiden anderen Entladungsformen ja sehr groß ist. Auf jeden Fall kann hier wohl kaum die Elektronengeschwindigkeit zur Erklärung herangezogen werden, wie es in einem anderen Falle früher geschehen ist**** (siehe auch weiter unten). Man kann sich aber vorstellen, daß infolge der hohen Stromdichte die Temperatur des Gases, soweit man von einer solchen unter diesen Umständen noch reden kann, so hoch ist, daß im Grundzustand das erste Schwingungsquant schon in einer merklichen Zahl von Molekülen angeregt ist. Da die Kernschwingungsfrequenz im Grundzustand des CO etwa dieselbe ist wie im Anfangszustand der Ångströmbanden, so wird bei einem Elektronenübergang dann nach Franck auch das erste Schwingungsquant des angeregten Zustandes in einer größeren Zahl von Molekülen angeregt werden können. Bestätigend

---

* Vgl. R. T. Birge, l. c., Tabelle 1.

** R. Mecke, Phys. ZS. **26**, 217, 1925.

*** R. T. Birge, Phys. Rev. **28**, 1157, 1926.

**** G. Herzberg, ZS. f. Phys. **49**, 761, 1928.

hierfür ist, daß bei sehr niedrigem Druck auch in der gewöhnlichen Geisslerröhre die Intensität der b-Banden relativ zu den a-Banden stark abnimmt entsprechend der Abnahme der Stromdichte bzw. der Temperatur; d. h. ein CO-Molekül, das sich im ersten Schwingungszustand des Grundzustandes befindet, wird seine Schwingungsenergie in den meisten Fällen vor dem Zusammenstoß mit einem Elektron schon wieder verloren haben.

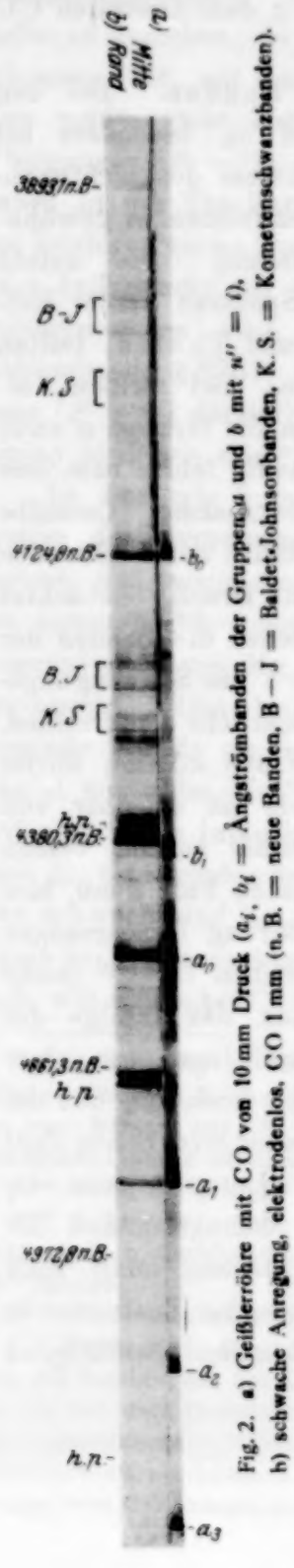


Fig. 2. a) Geißlerröhre mit CO von 10 mm Druck (a_1, b_1 = Ångströmbanden der Gruppen a und b mit $v'' = 0$), b) schwache Anregung, elektrodenlos, CO 1 mm (n. B. = neue Banden, B – J = Baldet-Johnsonbanden, K. S. = Kometenschwanzbanden).

Sobald nun die Gruppe b nur schwach oder überhaupt nicht vorhanden ist*, tritt im sichtbaren Gebiet in der Nähe der Stellen, an denen die Banden der Gruppe b sonst liegen, eine andere Gruppe von wohldefinierten Banden (vgl. Fig. 2) auf**. Dieselben zeigen in der elektrodenlosen Entladung genau dasselbe Verhalten wie die Banden der Gruppe a der Ångströmbanden, was Abhängigkeit von den Entladungsbedingungen und Intensitätsverteilung über den Röhrenquerschnitt anbetrifft. Außerdem zeigen sie, wie schon oben erwähnt, bei der benutzten Dispersion dieselbe Feinstruktur. Es liegt daher zunächst der Schluß nahe, daß sie zum System der Ångströmbanden gehören. Dies erweist sich jedoch nicht als richtig. Es zeigte sich zwar, daß die Differenzen der Wellenzahlen der zunächst gemessenen Banden $\lambda\lambda$ 4125, 4380, 4661, 4973 mit den Differenzen der Banden 5199,

* Das heißt also vor allem in der elektrodenlosen Ringentladung beim Zustand a) und b), aber auch in der weiten Entladungsröhre und in gewöhnlichen Geisslerröhren bei niedrigem Druck.

** Ganz schwach sind sie auch bei Aufnahmen mit der Geisslerröhre bei hohem Druck (mehrere Millimeter) vorhanden, wie nachträglich durch Vergleich zweier entsprechender Aufnahmen festgestellt wurde. Sie sind jedoch in den meisten Fällen stark überlagert durch die Banden der Gruppe b, deren Kanten größtenteils bei etwas größeren Wellenlängen liegen, und dadurch ist es wohl auch zu erklären, daß die neuen Banden bisher nicht gefunden wurden.

5610, 6080, 6620 der Gruppe *a* übereinstimmen. Die Bande λ 3893, die schon von Deslandres* als zu den Ångströmbanden gehörig gemessen wurde, aber von Birge nicht mit eingeordnet wurde, erweist sich durch Differenzbildung ebenfalls als zu den neuen Banden gehörig.

In Tabelle 3 sind die Wellenlängen, Wellenzahlen und Intensitäten dieser und noch dreier weiterer Banden (unter diesen auch die 0—0-Bande**) zusammengestellt. Aus der obengenannten Beziehung zu der Gruppe *a* der Ångströmbanden ergibt sich, daß die neuen Banden denselben Endzustand wie die Ångströmbanden haben. Der zweite Teil der von Birge für die Ångströmbanden gegebenen Kantenformel

$$\nu = 22156{,}6 + (2158\,n' - 76\,n'^2) - (1497{,}3\,n'' - 17{,}2\,n''^2)$$

gilt also auch für die neuen Banden, für die also

$$\nu = 27160{,}6 - (1497{,}3\,n'' - 17{,}2\,n''^2).$$

Die auf Grund dieser Formel berechneten Werte sind mit in die Tabelle 3 eingetragen. Die Differenzen der beobachteten und berechneten Werte liegen ganz innerhalb der Fehlergrenze. Wie Birge gefunden hat, sind die Banden $n'' = 0$ der Gruppen *a* und *b* gegen die durch die Formel gegebene Lage merklich verschoben, was von ihm als Oszillationsstörung im Endzustand gedeutet wird. Dementsprechend müßte diese Anomalie auch bei den neuen Banden vorhanden sein. Auf Grund der gegebenen Zahlen läßt sich dies jedoch nicht sicher sagen, da leider gerade der Wellenlängenwert der 0—0-Bande nicht so genau ist, wie die der

Tabelle 3.

$n' - n''$	J	λ	$\nu_{beob.}$	$\nu_{ber.}$	$\nu_{beob.} - \nu_{ber.}$
0—0	4	3680,9	27159,6	27160,6	— 1,0
0—1	7	3893,1	25679,2	25680,5	— 1,3
0—2	7	4124,8***	24236,8	24234,8	+ 2,0
0—3	7	4380,3	22823,1	22823,5	— 0,4
0—4	5	4661,3	21447,3	21446,6	+ 0,7
0—5	2	4972,8	20103,8	20104,1	— 0,3
0—6	1	5318,4	18797,4	18796,0	+ 1,4
0—7	0	5705,9	17520,9	17522,3	— 1,4

* Siehe H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie, Bd. V.

** Daß sie die 0—0-Bande ist, folgt einerseits daraus, daß sie der Bande λ 4511 der *a*-Banden entspricht, andererseits daraus, daß, obwohl sie recht intensiv ist, auf ihrer kurzwelligen Seite keine weiteren Banden gefunden wurden.

*** Diese Bande ist wohl unterschieden von der Bande λ 4123,4 der *b*-Banden, wie ein Vergleich der Spektrogramme der Fig. 2 zeigt. Die erstere liegt gerade an der Stelle, an der die letztere sich nach der Formel befinden sollte (siehe weiter unten).

übrigen Banden (möglicher Fehler $\pm 0{,}8$ Å.-E. gegenüber $\pm 0{,}3$ Å.-E.), da er mit dem Quarzspektrographen bestimmt werden mußte.

Wenn man annehmen würde, daß die neuen Banden zum System der Ångströmbanden gehörten, würde sich nach der obigen Formel von Birge für dieselben ein Wert von 2,5 für n' ergeben, was unmöglich ist. Aber selbst wenn man annimmt, daß die von Birge zur Bestimmung des Faktors des quadratischen Gliedes benutzten Banden mit $n' = 2$ nur zufällige Linienanhäufungen sind, was sehr wahrscheinlich ist*, ist eine Einordnung der neuen Banden in das Schema der Ångströmbanden nicht möglich, um so mehr, als ja die neuen Banden gerade dann auftreten, wenn die Banden $n' = 1$ fehlen. Deshalb muß man annehmen, daß der Anfangszustand der neuen Banden ein neuer von dem der Ångströmbanden abweichender Elektronenzustand des CO-Moleküls ist, der schon oben im Anschluß an die Bezeichnungsweise von Birge vorläufig mit C bezeichnet wurde. Er liegt bei 91898 cm^{-1}, wenn man den Normalzustand des CO-Moleküls als Nullniveau nimmt. Er ist also sicher verschieden von dem bei 92086 cm^{-1} liegenden Zustand c, dem Anfangszustand der $3\,A$-Banden der dritten positiven Gruppe**. Wie oben gezeigt, dürfte dieses neue Niveau als $3\,{}^1D$ zu identifizieren sein ***.

Außer der Gruppe $n' = 0$ wurden keine Banden des neuen Systems gefunden.

Bei den übrigen Entladungsformen der elektrodenlosen Entladung nimmt die Intensität der Ångströmbanden und der neuen Banden relativ zu den übrigen Banden in gleicher Weise mit zunehmender Anregung stark ab.

Die vierte positive Gruppe von CO. Die vierte positive Gruppe von CO bildet den Übergang vom Endzustand der Ångströmbanden und der neuen Banden zum Grundzustand. Es ist deshalb klar, daß sie bei Entladungsformen, bei denen die letzteren auftreten, ebenfalls vorhanden sein muß. Sie sind jedoch schwächer, als erwartet wurde. Dies liegt jedoch

---

* Auf meinen Aufnahmen des Geisslerrohrspektrums von CO sind sie jedenfalls nicht erkennbar. Von der Gruppe b sind auf diesen auch nur die ersten beiden Banden λ 4123 und λ 4393 als deutliche Banden vorhanden. Dadurch ist die mangelhafte Übereinstimmung der weiteren Banden mit der Formel bei Birge (l. c.) verständlich.

** Beide Zahlen beziehen sich wie die in der Tabelle 1 auf Kanten, nicht auf Nullinien.

*** Völlige Sicherheit kann hier natürlich erst eine Feinstrukturuntersuchung geben, die auch deshalb, weil diese Bande außer der Heliumbande λ 5733 die einzige mit der Struktur ${}^1P - {}^1D$ zu sein scheint (siehe oben), von Interesse wäre.

offenbar daran, daß die 0—0-Bande nach der Analyse von Birge (l. c.) sehr weit im Ultraviolett liegt und in dem beobachteten Gebiet (oberhalb 2300 Å.-E.) nur Banden mit verhältnismäßig großem n' und n'' liegen, die nicht sehr intensiv sind.

Die Annahme von Birge, daß die von Deslandres* für diese Banden gegebenen Wellenlängenwerte um 1 Å.-E. zu erhöhen sind, hat sich bei meinen Messungen nicht bestätigt. Der Fehler der letzteren in dem fraglichen Gebiet ist sicher kleiner als $\pm$ 0,5 Å.-E. und die gemessenen Werte liegen durchweg bis auf wenige Zehntel bei den von Deslandres gegebenen Werten, mit Ausnahme einer Bande bei λ 2365,7, die von Deslandres bei λ 2363,3 und von Birge bei 2367,8 angegeben wird.

Die dritte positive Gruppe und die 3 A-Banden von CO. Die dritte positive Gruppe einschließlich der 3 A-Banden (siehe unten) tritt mit besonders großer relativer Intensität im Entladungszustand c) auf (schmale, helle, weiße Ringentladung). Sie ist auch bei den übrigen Entladungsformen noch verhältnismäßig intensiv, aber besonders in den Entladungszuständen a), b) und f) von beträchlich geringerer relativer Intensität gegenüber den Banden von CO^+ und den Ångströmbanden, den neuen Banden und der vierten positiven Gruppe [letzteres für den Fall a) und b)]. Dieses Verhalten steht in einer sehr bemerkenswerten Analogie zum Verhalten der ersten und besonders der zweiten positiven Gruppe von Stickstoff** in der elektrodenlosen Ringentladung. Diese sind ebenfalls bei der hellen, weißen, schmalen Ringentladung besonders intensiv. Alle diese Gruppen gehören einem Triplettsystem an, während die Ångströmbanden und die neuen Banden, die dem Singulettsystem angehören, gerade bei schwacher Anregung relativ besonders stark sind. Die den letzteren Banden entsprechenden Banden von N_2 sind bisher noch nicht gefunden worden. Vielleicht kann die genannte Beobachtung einen Weg zu ihrer Auffindung weisen.

Nach Duffendack und Fox*** hat ein Teil der dritten positiven Gruppe als Ausgangszustand einen besonderen Elektronenzustand (c). Sie sind deshalb als 3 A-Banden bezeichnet worden. Der von den genannten Autoren hierfür angegebene Grund, daß sie erst bei einer etwas höheren Anregungsspannung erscheinen als die übrigen Banden, erscheint mir, da

---

* Siehe H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie, Bd. V, S. 233.

** Siehe G. Herzberg, ZS. f. Phys. **49**, 512, 1928.

*** O. S. Duffendack und G. W. Fox, Nature **118**, 12, 1926.

ja auch eine stufenweise Anregung der einzelnen Schwingungsquanten vorliegen kann, ähnlich wie es Brandt* und Sponer** bei Stickstoff gefunden haben, weniger beweisend, als der Umstand, daß man den 3 A-Banden, wenn sie zu der dritten positiven Gruppe gehörten, den Wert $n' = 4$ zuschreiben müßte, während Banden mit $n' = 2$ und 3 nicht vorhanden sind, was nicht anzunehmen ist.

Ob diejenigen der von Deslandres gefundenen Banden***, denen man später den Wert $n' = 1$ zugeschrieben hat, reell sind, ist mehrfach in Zweifel gezogen worden, indem man sie für zufällige Linienanhäufungen hielt. Auf meinen Aufnahmen waren nun die Banden mit $n' = 0$ (siehe Tabelle 4) vollzählig vorhanden mit den von den Deslandresschen etwas abweichenden Intensitäten 8, 10, 9, 6, 2, 1. Die Gruppe $n' = 1$ fehlte vollständig bzw. war relativ zur Gruppe $n' = 0$ sehr schwach, mit Ausnahme der Bande λ 2665,15 (1—0), die sehr deutlich vorhanden war**** (Intensität 3). Besonders auffallend ist dabei das Fehlen der Bande λ 2792,75, die bei Deslandres die Intensität der stärksten Banden (10) hat†. Die 3 A-Banden sind dagegen wieder vollzählig vorhanden, trotzdem sie bei Deslandres größtenteils kleinere Intensität haben als die Banden mit $n' = 1$. Es besteht also in dem Verhalten dieser Banden eine gewisse Analogie zu dem der Ångströmbanden und der neuen Banden. Bei dem ersteren fehlten ja auch in der elektrodenlosen Entladung die Banden mit $n' = 1$††. Auch dies spricht dafür, daß es sich um ganz ähnliche Termkombinationen, nur in einem anderen Termsystem handelt.

Die Formeln für diese Banden sind von Johnson††† und Birge (l. c.) gegeben worden. Da diese jedoch kein Kantenschema geben, sei ein solches in der Tabelle 4 wiedergegeben, da es bei der Untersuchung

---

* E. Brandt, ZS. f. Phys. **8**, 32, 1922.

** H. Sponer, ebenda **34**, 622, 1925.

*** Siehe H. Kayser, l. c.

**** Es erscheint ausgeschlossen, daß es sich bei dieser um eine zufällige Linienanhäufung handelt.

† Auf einer Verschiedenheit der Plattenempfindlichkeit kann dies nicht beruhen, da die fragliche Bande ganz in der Nähe der intensivsten Bande liegt.

†† Leider konnte das Verhalten der dritten positiven Gruppe in der Geißlerröhre bisher nicht untersucht werden. — Anm. b. d. Korr.: Inzwischen hat Herr Dr. Hirsch in Darmstadt dies freundlicherweise für mich nachgeholt. Deutliche Unterschiede im Verhalten der dritten positiven Gruppe in der Geißlerröhre gegenüber dem oben beschriebenen in der elektrodenlosen Entladung sind nicht gefunden worden.

††† R. C. Johnson, Nature **117**, 376, 1926.

Tabelle 4.

n' \ n''	0	1	2	3	4	5	6	7
0	**2832,0** 35 300 (10)	**2976,3** 33 589 (10)	**3134,6** 31 893 (8)	**3305,3** 30 246 (8)	**3492,7** 28 623 (6)	**3698,7** 27 029 (4)	— — —	— — —
1	**2665,2** 37 510 (8)	**2792,8** 35 797 (10)	— — —	**3079,9** 32 459 (4)	**3241,8** 30 838 (4)	**3418,4** 29 245 (2)	**3612,7** 27 672 (2)	**3825,1** 26 136 (2)
3A 0	**2295,2** 43 556 (2)	**2389,0** 41 846 (2)	**2489,9** 40 150 (2)	**2597,1** 38 493 (4)	**2711,4** 36 871 (4)	— — —	— — —	— — —

der Banden doch wesentlich bequemer ist als die Formel. Es sind die Wellenlängenwerte (fettgedruckt) von Deslandres eingetragen, außerdem die Wellenzahlen und die von Deslandres gegebenen Intensitäten (in Klammern).

Der Vollständigkeit halber seien die zugehörigen Formeln auch mit angegeben:

$$\nu = \nu_e - (1724{,}8\, n'' - 14{,}5\, n''^2),$$

wo $\nu_e = 35288$ für $n' = 0$, 37502 für $n' = 1$ und 43556 für die $3A$-Banden für jeweils die langwelligste Kante jeder der aus sechs Kanten bestehenden Banden.

Die Cameronbanden von CO. Die Cameronbanden (siehe oben), die nach Johnson (l. c.) dem Übergang vom Endzustand der dritten positiven Gruppe zum Grundzustand entsprechen, treten trotz der großen Intensität der dritten positiven Gruppe auf meinen Spektrogrammen nicht auf. Dies mag zum Teil daran liegen, daß das Gebiet der 0—0-Bande ähnlich wie bei der vierten positiven Gruppe nicht in das beobachtete Gebiet fällt, zum Teil aber auch daran, daß dieser Übergang an sich sehr schwach ist entsprechend der geringen Intensität des entsprechenden Überganges im Mg-Atom (siehe oben). Selbst bei den für das Auftreten dieser Banden besonders günstigen Bedingungen, die Cameron* benutzt hat, waren sie sehr schwach.

Da auch für die Cameronbanden in der Literatur (siehe oben) nur die Formel und nicht das Kantenschema aufgeführt wird, sei dieses hier ebenfalls zur Bequemlichkeit des Lesers wiedergegeben (Tabelle 5). Er-

* W. H. B. Cameron, Phil. Mag. (7) **1**, 405, 1926.

Tabelle 5.

n' \ n''	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	—	—	**2257,7**	**2369,0**	**2491**	—	—	—	—
	—	—	44 279	42 199	40 132	—	—	—	—
1	—	—	—	**2277,0**	**2388,8**	**2510,9**	—	—	—
	—	—	—	43 904	41 849	39 814	—	—	—
2	—	—	—	—	—	**2409,2**	**2531,9**	—	—
	—	—	—	—	—	41 495	39 484	—	—
3	—	—	—	—	—	—	**2430,3**	**2553,3**	—
	—	—	—	—	—	—	41 135	39 153	—
4	—	—	—	—	—	—	—	**2451,8**	**2575,3**
	—	—	—	—	—	—	—	40 774	38 819

wähnt sei, daß Hopfield* auch die Gruppe $n'' = 0$ von $n' = 0$ bis 4 in Absorption beobachtet hat. Die Formel ist nach Birge:

$$\nu = 48529{,}9 + (1724{,}78\,n' - 14{,}47\,n'^2) - (2149{,}74\,n'' - 12{,}70\,n''^2).$$

Die Formel und die in der Tabelle gegebenen Wellenlängen beziehen sich hier auf die kurzwelligste Kante jeder Bande.

Bisher nicht eingeordnete Banden von CO. Oberhalb von 0,5 mm Druck und mit wachsendem Druck relativ immer stärker treten die „high pressure"-Banden von Fowler** hervor bei allen Entladungsformen, die bei diesen Drucken noch zu erhalten sind, während sie in einer Geisslerröhre erst bei sehr viel höherem Druck (> 5 mm) auftreten. Nach Birge*** bilden die Banden eine Gruppe $n' = 0$ mit $n'' = 0$ bis 5. Aus der Tatsache, daß die Frequenzdifferenzen denen für den Anfangszustand der Kometenschwanzbanden (siehe unten) ähnlich sind, hat Birge gefolgert, daß dies der Endzustand der Banden ist. Es ist dazu jedoch zu bemerken, daß die Messungen der Banden (siehe Merton und Johnson, l. c.) sehr ungenau sind, wie Birge schon betonte, daß ferner der Dublettabstand nicht derselbe ist wie bei den Kometenschwanzbanden, daß die Struktur der Banden, soweit sie auf meinen Aufnahmen zu erkennen ist, von der üblichen Bandenstruktur erheblich abzuweichen scheint****, und daß schließlich das Verhalten der Banden durchaus anders

* J. J. Hopfield, Phys. Rev. **29**, 356, 1927.

** A. Fowler, Monthl. Not. **76**, 640, 1916; siehe auch T. R. Merton und R. C. Johnson, Proc. Roy. Soc. London (A) **103**, 383, 1923.

*** R. T. Birge, Nature **116**, 170, 1925.

**** Die Banden besitzen keine scharf ausgeprägten Kanten, worauf es beruht, daß Messungen der Kanten mit einer ganz beträchtlichen Ungenauigkeit behaftet sind. Den Versuch einer Neuausmessung derselben habe ich daher aufgegeben. Eine Feinstrukturuntersuchung dieser Banden mit großer Dispersion dürfte sehr interessant sein.

ist, als das aller anderen Banden von CO. Der Unterschied im Verhalten besteht besonders darin, daß sie bei nicht zu hohem Druck fast ganz auf die Mitte der Röhre beschränkt sind und am Rande fast völlig fehlen, während alle anderen Banden am Rande stärker sind als in der Mitte, mit Ausnahme der Banden von CO^+, die fast gleichmäßige Intensität über den ganzen Röhrenquerschnitt besitzen (siehe weiter unten). Sie treten also in der Mitte der Röhre nahezu ganz isoliert auf, ähnlich wie sie Merton und Johnson (l. c.) unter bestimmten Bedingungen auch isoliert erhalten haben. Dieser ausgeprägte Unterschied der „high pressure"-Banden von den übrigen kann vielleicht benutzt werden, um Schlüsse auf den Träger des Spektrums zu ziehen. Auf jeden Fall ist dieser Träger nicht das CO_2-Molekül, wie schon die Versuche von Merton und Johnson wahrscheinlich gemacht haben und wie auch aus der Tatsache folgt, daß diese Banden gerade dann hervortreten, wenn die Selbstevakuation durch CO_2-Bildung sehr gering ist. Schließlich zeigt sich auch keine Abnahme der Intensität dieser Banden bei Kühlung der ganzen Entladungsröhre mit flüssiger Luft, eher eine Zunahme. Aus dem Verhalten der Banden kann man schließen, daß der Träger gegenüber schnellen Elektronen sehr empfindlich ist. Man kann vielleicht annehmen, daß es sich um ein metastabiles CO-Molekül handelt oder wegen der komplexen Struktur der Banden um ein sehr wenig stabiles, komplexes Molekül*, etwa $(CO)_2$, das sich vielleicht in ähnlicher Weise aus angeregten CO-Molekülen gebildet hat, wie das He_2-Molekül aus angeregten He-Atomen.

Außer diesen Banden traten im langwelligen Teil des untersuchten Spektralgebietes noch sehr schwach eine Reihe von Banden auf, die keine ausgeprägten Kanten besitzen und die deshalb nicht ausgemessen wurden. Sicher handelt es sich nicht um die Triplettbanden von Merton und Johnson, die ausgeprägte Kanten besitzen. Ob es sich um die von McLennan, Smith und Peters** gefundenen Banden handelt, erscheint fraglich.

D. Die Banden von CO^+.

In der umstehenden Fig. 3 ist das Schema der Elektronenniveaus von CO^+ gezeichnet (siehe Birge, l. c.). Die eingezeichneten Übergänge entsprechen den heute bekannten drei Bandensystemen, der ersten negativen Gruppe von Deslandres ($B' - X'$ bzw. $^2S - ^2S$), den Kometen-

* Das hat auch schon Johnson, Nature **116**, 540, 1925, vermutet.

** J. C. McLennan, H. G. Smith und C. S. Peters, Proc. Trans. Roy. Soc. Canada (III) **19**, 39, 1925.

schwanzbanden ($A' - X'$ bzw. $^2S—^2P$) und den Baldet-Johnsonschen Kombinationsbanden ($B' - A'$ bzw. $^2P—^2S$).

Ganz ähnlich wie die negativen Stickstoffbanden in der elektrodenlosen Ringentladung bei allen Entladungsbedingungen relativ sehr intensiv sind*, trifft dies auch für die drei Bandensysteme des CO^+ zu. Insbesondere treten sie auch bei höherem [Druck 1 bis 2 mm, Entladungsform a) und b)] sehr intensiv relativ zu den übrigen Banden auf (siehe Fig. 1), ganz analog dem Verhalten der N_2^+-Banden in der elektrodenlosen Entladung, im Gegensatz aber zum Verhalten in gewöhnlichen Entladungsröhren („low pressure"-Banden von Fowler). Allerdings treten bei niedrigem Druck die bei hohem Druck sehr intensiven Ångströmbanden und die neuen Banden, wie erwähnt, stark zurück, so daß in dem mit Glasspektrographen zugänglichen Gebiet dann fast nur noch die Kometenschwanz- und Baldet-Johnsonbanden auftreten. Daneben sind allerdings die Funkenlinien von Kohle recht intensiv.

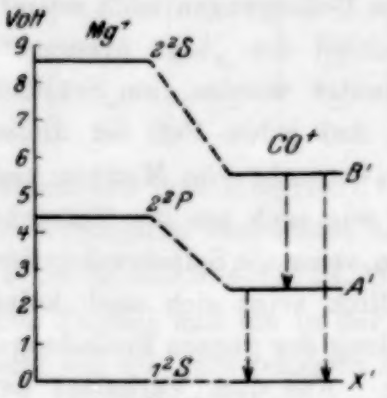


Fig. 3.

Genau wie die negativen Stickstoffbanden im Gegensatz zu den positiven Banden bei schwacher Anregung über den ganzen Röhrenquerschnitt gleiche Intensität besaßen**, sind auch die Banden von CO^+ durch denselben Umstand von den übrigen Banden charakteristisch unterschieden, wie oben schon kurz erwähnt wurde. Es dürfte dies in derselben Weise wie a. a. O. zu erklären sein.

Sehr auffällig und bemerkenswert ist schließlich, daß das Intensitätsverhältnis der stärksten Kometenschwanzbanden zu den Baldet-Johnsonbanden bei niedrigem und hohem Druck gerade umgekehrt ist. Bei ersterem sind die Kometenschwanzbanden weitaus die intensiveren, bei letzterem die Baldet-Johnsonbanden. Dieses stärkere Hervortreten der zuletzt genannten Banden bei höherem Druck (1 mm) ist schon von Baldet*** beobachtet worden, wenn sie bei ihm auch nicht gerade stärker als die Kometenschwanzbanden waren. Mulliken**** hat aus der Tatsache der Druckabhängigkeit der Baldet-Johnsonbanden auf die Möglichkeit ge-

* Siehe G. Herzberg, Ann. d. Phys. **86**, 189, 1928.
** Siehe G. Herzberg, ZS. f. Phys. **49**, 761, 1928.
*** F. Baldet, C. R. **180**, 1201, 1925.
**** R. S. Mulliken, Phys. Rev. **28**, 497, 1926.

schlossen, daß dieselben an sich einen verbotenen Übergang darstellen, der nur infolge starker intermolekularer Felder ermöglicht wird. Nun sind aber im Gegensatz zur gewöhnlichen Entladung gerade bei niedrigem Druck bei der hellen Ringentladung die intermolekularen Felder infolge der großen Ionenkonzentration sehr stark. Gerade dann sind aber die Baldet-Johnsonbanden geschwächt. Man muß daraus schließen, daß die Druckabhängigkeit nicht durch die Verschiedenheit der intermolekularen Felder, sondern durch die Verschiedenheit der Elektronengeschwindigkeit bzw. durch eine Verschiedenheit der Anregungsfunktion bedingt ist. Wenn dies richtig ist, bleibt das Auftreten der Baldet-Johnsonbanden also ein Zeichen dafür, daß die Auswahlregeln der Linienspektren bei Bandenspektren nicht streng gelten (siehe oben).

Die erste negative Gruppe von CO ist bekanntlich ganz analog gebaut wie die negativen Stickstoffbanden. Die Banden treten auch hier zu Gruppen $\Delta n = \text{const}$ zusammen, wenn diese sich auch im Gegensatz zu N_2^+ gegenseitig etwas überlagern. Anders als bei N_2^+ sind die Banden ebenso wie die Bandengruppen nach Rot abschattiert wegen $B' < B''$ und $\omega' < \omega''$.

Eine sehr genaue Ausmessung der Banden, die allerdings bisher noch nicht vollständig veröffentlicht ist, hat Blackburn* vorgenommen. Am weitesten hat bisher Johnson** die Banden ausgedehnt. Er benutzte schwach kondensierte Entladungen in He von 30 mm Druck mit Kohleelektroden. Bis auf die im äußersten Ultraviolett gelegenen Banden der Gruppen $\Delta n = -1$ und 0, die auch bei Johnson sehr schwach sind und die größtenteils nicht sehr gut in das Kantenschema hineinpassen, waren auf meinen Aufnahmen der Entladung bei starker Anregung (f) alle von ihm gemessenen Banden vorhanden. Die von mir gemessenen Werte stimmen mit seinen bis auf wenige $^1/_{10}$ Å.-E. überein***. Das Kantenschema der Banden ist von Blackburn und Johnson (l. c.) gegeben worden. Über die Kantenformel siehe weiter unten. Eine weitere Ausdehnung der Banden, wie sie bei den negativen Stickstoffbanden möglich war, konnte vorläufig nicht erzielt werden, da die günstigsten Bedingungen für ihre Erzeugung (möglichst niedriger Druck) nicht für

---

* C. M. Blackburn, Proc. Nat. Acad. Amer. **11**, 28, 1925.

** R. C. Johnson, Proc. Roy. Soc. London (A) **108**, 343, 1925.

*** Eine Ausnahme bildet die Bande λ 2536,7 (4—6), die Johnson bei λ 2534,8 mißt. Die Wellenzahl des letzteren Wertes weicht jedoch im Gegensatz zum ersteren, der keine Abweichung zeigt, um 30 Einheiten vom errechneten Wert ab.

längere Zeit aufrechterhalten werden konnten. Zu diesem Zweck müßte man die Durchströmungsmethode anwenden, was mir wegen meines Weggange vom Darmstadt vorläufig nicht möglich war. Eine solche Ausdehnung wäre zur genaueren Bestimmung der Dissoziationsvorgänge sehr interessant, siehe weiter unten.

Sehr auffällig ist die starke Abweichung der Intensitätsverteilung auf meinen Aufnahmen von der von Johnson gegebenen. Ich gebe daher in Tabelle 6 in Form eines Kantenschemas in der üblichen Weise

Tabelle 6*.

n'' / n'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	2 —	8 8	10 10	10 4	2 1	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —
1	1? —	1 —	7 8	10 12	10 7	7 2	2? 10**	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —
2	— —	1? —	0? —	4 4	10 7	9 8	6 4	1 0	1 —	— —	— —	— —	— —	— —
3	— —	— —	0? —	1? —	1 1	10 4	8 6	5 6	1 0	— —	— —	— —	— —	— —
4	— —	— —	— —	— —	1? —	— —	1 2	7 4	5 4	1 1	— —	— —	— —	— —
5	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	3 2	4 2	2 1,5	— —	— —	— —
6	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	1 —	3? 10**	3 2	— —	— —
7	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	1 1	2 —	— —
8	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	1 1	1 —
9	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	1 1	— —

die Intensitätsverteilung. Die oberen Zahlen jedes Quadrates bedeuten die von Johnson, die unteren die von mir geschätzten Intensitäten. Die Intensitäten verschiedener Diagonalreihen sind wegen der Variation der Plattenempfindlichkeit nicht vergleichbar. Man erkennt aber sofort, daß in den einzelnen Diagonalreihen in den beiden Fällen eine wesentlich

* Ein ? bedeutet, daß die Differenz zwischen beobachteten und berechneten Werten sehr groß ist.

** Siehe weiter unten.

verschiedene Intensitätsverteilung herrscht, insbesondere in den Reihen $\Delta n = 3$ und 4, in denen deutlich das Intensitätsmaximum in der elektrodenlosen Ringentladung gegenüber der von Johnson benutzten Anregung nach höheren n' gerückt ist. Im Gegensatz dazu rückt bei schwacher Anregung auch in der elektrodenlosen Entladung das Maximum nach kleineren n'. Dies ist zwar, weil ω' erheblich kleiner ist als ω'', nicht so ausgeprägt wie bei N_2^+*, wo bei schwacher Anregung nur die erste Bande jeder Gruppe mit merklicher Intensität auftritt, aber dennoch deutlich erkennbar**. Die Intensitätsverteilung nähert sich also dann der von Johnson gegebenen, wenn sie auch nicht mit ihr identisch wird. Die von Johnson gefundene Intensitätsverteilung scheint im Gegensatz zu der in der elektrodenlosen Ringentladung gefundenen (siehe l. c.) darauf zu beruhen, daß die Energie metastabiler He-Atome gerade gleich der Gesamtenergie des nullten Schwingungszustands von CO^+ $(J_m + E_e')$ ist*** oder daß die Geschwindigkeit der Elektronen durch das Helium derart begrenzt ist, daß nur die untersten Schwingungsniveaus angeregt werden können****.

Die von Deslandres angegebene Intensitätsverteilung (siehe Kayser, l. c.) liegt zwischen der von Johnson und mir gegebenen.

Sowohl Deslandres wie auch Johnson geben intensive Banden bei $\lambda\lambda$ 2897,2, 2895,5, 2883,6, 2882,3 an†. Johnson hat die erste und letzte dieser Banden mit eingeordnet an den Stellen 6—10 bzw. 1—6. Diese passen bei Johnson auch der Intensität nach in das Kantenschema hinein (siehe Tabelle 6). Auf meinen Aufnahmen bei starker Anregung sind sie dagegen ebenso wie bei Deslandres so intensiv wie die stärksten Banden, obwohl sie sich an einer Stelle des Kantenschemas befinden, wo so intensive Banden nicht zu erwarten sind (siehe die Tabelle). Außerdem sind sie trotz dieser großen Intensität vollkommen linienförmig.

---

* Siehe G. Herzberg, ZS. f. Phys. **49**, 761, 1928.

** Die Aufnahmen der schwachen Entladungen mit dem Quarzspektrographen, der mir nur eine begrenzte Zeit zur Verfügung stand, sind stark unterbelichtet und eignen sich daher nicht zur Reproduktion.

*** Man könnte aus dieser Annahme rückwärts eine obere Grenze für Ionisierungsspannung von CO errechnen. Es ergibt sich 19,77 — 5,67 = 14,10 Volt, während experimentell 14,2 Volt gemessen ist (siehe Birge und Sponer, Phys. Rev. **28**, 259, 1926).

**** Bemerkt sei, daß, während in einem Gemisch von He und CO in der elektrodenlosen Entladung bei starker Anregung die Intensitätsverteilung dieselbe ist wie in reinem CO, bei schwacher Anregung die Bevorzugung der Banden mit niedrigem n' noch stärker zu sein scheint, als ohne He-Zusatz.

† Deslandres gibt je zwei derselben als eine an.

Ferner sind sie bei schwacher Anregung relativ zu den übrigen Banden stark geschwächt*. Deshalb halte ich es für ganz ausgeschlossen, daß sie zu den negativen Banden von CO gehören, um so mehr, als die beiden mittleren der genannten „Banden" nicht eingeordnet werden können, obwohl sie sich ganz ebenso verhalten, wie die erste und letzte.

Über das Verhalten der Kometenschwanzbanden bei den verschiedenen Entladungsformen ist oben schon das Notwendige gesagt worden. Aus demselben Grunde, aus dem die erste negative Gruppe nicht weiter ausgedehnt werden konnte, konnten die Kometenschwanzbanden nicht sehr vollständig beobachtet worden. Dazu kommt, daß im sichtbaren Gebiet die Hauptintensität im Linienspektrum liegt im Gegensatz zum N_2**.

Am weitesten hat Baldet*** die Kometenschwanzbanden ausgedehnt. Da Mecke**** in seinem Bericht bei Aufstellung des Kantenschemas die Arbeiten von Baldet anscheinend nicht berücksichtigt hatte, möchte ich hier in Tabelle 7 das Kantenschema nochmals wiedergeben (mit Intensitäten in Klammern). Eingetragen ist jeweils die zweite und vierte Kante von kurzen Wellen aus gerechnet, da diese den beiden Q-Zweigen entsprechen und daher für sie am ehesten eine Konstanz der Quer- und Längsdifferenzen zu erwarten ist. Obwohl Baldet die meisten Werte auf hundertstel Å.-E. genau angibt, erweist sich diese Konstanz nicht als besonders gut, da Abweichungen von mehreren cm^{-1} vorkommen. Deshalb habe ich die Wellenlängen nur auf zehntel Å.-E. angegeben. Mecke hat als 0—0-Bande die Bande λ 4883,9 angenommen. Dies erscheint jedoch zweifelhaft, da sonst die vier weiteren Banden $\lambda\lambda$ 5286, 5769, 5976 und 6361, die Baldet mit allen vier Kanten gemessen hat, als nicht reell angenommen werden müßten. Andererseits ist keineswegs sicher, daß λ 6361 die letzte Bande der Reihe $n'' = 0$ nach Rot zu ist. In jedem Falle muß man die Möglichkeit offen halten, daß die Skale der n' eine Verschiebung erfahren kann. Über die Formel für die Banden siehe weiter unten. Eine Feinstrukturuntersuchung der

---

* Das entspricht der verhältnismäßig geringen Intensität bei Johnson.

** Dies rührt daher, daß anders als im N_2 nur selten eine Rekombination von dissoziiertem CO stattfindet, da die bei der Dissoziation gebildeten O-Atome größtenteils sich sofort mit einem anderen CO-Molekül zu CO_2 verbinden, das in die Hg-Falle übergeht, während das C sich an der Wand niederschlägt (s. oben).

*** F. Baldet, C. R. **180**, 271 und 820, 1925.

**** E. Mecke, Phys. ZS. **28**, 521, 1927.

Tabelle 7.

n' \ n''	0	1	2	3
0	6361 (½) 6412	— —	— —	— —
1	5769 (½) 5812	— —	— —	— —
2	5286 (½) 5321	5976 (½) 6021	— —	— —
3	4883,9 (3) 4914,5	5466,7 (2) 5504,5	6196,4 (5) 6245,0	— —
4	4542,6 (8) 4568,7	5043,7 (2) 5075,9	5658,1 (3) 5698,6	— —
5	4251,3 (10) 4273,9	4686,8 (6) 4714,5	5214 (½) 5248	5862,3 (3) 5905,7
6	3999,5 (9) 4019,8	4381,4 (4) 4406,2	4839,6 (3) 4869,0	5393,9 (1) 5430,5
7	3779,5 (8) 3797,4	4119,4 (3) 4140,4	4521,0 (5) —	— —
8	3585,7 (7) 3602,3	3890,5 (5) 3909,9	4246,2 (2) —	4668,0 (1) —
9	3414,6 (5) 3429,2	3689,8 (6) 3707,1	— —	4381.4 (1) —
10	3261,6 (3) 3275,2	3511,7 (4) 3527,0	— —	4132,5 (2) 4153,8
11	3124,5 (2) 3136,8	3352,9 (4) 3367,0	— —	— —
12	— —	3210,7 (2) 3223,5	— —	— —
13	— —	3082,7 (1) 3094,6	3302,1 (2) 3315,5	— —
14	— —	— —	3169,1 (2) 3181,3	— —

Banden haben Baldet* und Blackburn** ausgeführt. Keine derselben ist jedoch bisher ausführlich veröffentlicht.

Für die Baldet-Johnsonbanden gilt dasselbe, was für die Kometenschwanzbanden oben gesagt wurde. Es sei hier nur der Vollständigkeit halber auch noch das Kantenschema angegeben (Tabelle 8), in dem wiederum jeweils die zweite und vierte Kante, jetzt von Rot aus gerechnet, eingetragen ist. Entsprechend der Unbestimmtheit in den n' bei den Kometenschwanzbanden ist hier die Skale der n'' möglicherweise noch

* F. Baldet, C. R. **180**, 820, 1925.

** C. M. Blackburn, Phys. Rev. **25**, 888, 1925 (Kurzer Sitzungsbericht).

Tabelle 8.

n' \ n''	0	1	2	3	4	5
0	—	—	—	3973,7	4232,1	—
	—	—	—	3953,8	4209,5	—
1	—	—	—	3725,0	—	4201,5
	—	—	—	3707,6	—	4179,1
2	—	—	—	3511,7	—	—
	—	—	—	3496,7	—	—
3	—	—	—	3329,0	—	—
	—	—	—	3314,8	—	—

nach links oder rechts zu verschieben*. Es ist hier so aufgestellt, daß Übereinstimmung mit dem obigen Kantenschema der Kometenschwanzbanden besteht.

E. Dissoziationsvorgänge.

a) Bei CO^+. Auf Grund der Daten von Blackburn (l. c.) und Jevons** hat Birge*** für die erste negative Gruppe von CO die Kantenformel

$$\nu = 45655{,}4 + (1704{,}42\,n' - 29{,}3\,n'^2 + 0{,}7\,n'^3) - (2197{,}03\,n'' - 15{,}17\,n''^2)$$

gegeben. Wenn man dagegen die Messungen von Johnson (l. c.) benutzt, erhält man im Gegensatz zu dieser Formel als Term für den Anfangszustand B'

$$1693{,}2\,n' - 23{,}9\,n'^2.$$

Würde man jedoch die letzten beiden der von Johnson gegebenen $\Delta\nu$-Werte unberücksichtigt lassen, so würde man wieder die Formel von Birge erhalten. In diesem Falle ist dann die Übereinstimmung zwischen gemessenen und berechneten Werten erheblich besser als im ersten Falle, wo Abweichungen bis zu $10\,cm^{-1}$ vorkommen. Nun beruhen die letzten beiden $\Delta\nu$-Werte bei Johnson auf sehr schwachen Banden. Man kann daher nicht sicher sagen, welche Formel die richtigere ist.

Durch Extrapolation der Schwingungsquanten des Grundzustandes X' erhält man auf Grund der obigen Formel, wie schon Birge und Sponer (l. c.) angegeben haben, 9,82 Volt. Für den Anfangszustand der ersten negativen Gruppe B' erhält man aus der zweikonstantigen Formel durch

* R. S. Mulliken, Phys. Rev. **26**, 566, 1925.
** W. Jevons, Phil. Mag. (6) **47**, 580, 1928.
*** R. T. Birge, Nature **116**, 170, 1925.

lineare Extrapolation, wie sie die genannten Autoren ebenfalls schon ausgeführt haben, 9,30 Volt. (Reine Dissoziationsarbeit und Elektronenanregung.) Die dreikonstantige Formel führt zu keinem Schnitt der ω-Kurve mit der Achse $\omega = 0$. Wenn man jedoch die ω-Kurve unter Außerachtlassung der beiden letzten von Johnson gegebenen Punkte graphisch extrapoliert, erhält man 9,9 Volt in naher Übereinstimmung mit dem Werte für die Dissoziation vom Normalzustand aus. Dieser Wert ist wegen der positiven Krümmung der ω-Kurve wahrscheinlich zu klein.

Für die Kometenschwanzbanden hat Birge (l. c.) die Formel (kurzwelligste Kante) gegeben:

$$\nu = 20485{,}4 + (1550{,}4\,n' - 14{,}07\,n'^2 + 0{,}043\,n'^3) - (2198{,}6\,n'' - 15{,}00\,n''^2).$$

Entsprechend dem dreikonstantigen Ausdruck für den Anfangsterm halten Birge und Sponer wegen der positiven Krümmung der ω-Kurve den sich durch Extrapolation ergebenden Wert 9,55 Volt für die Dissoziationsspannung für sehr unsicher.

In der folgenden Tabelle 9 sind die ersten und zweiten Differenzen der Horizontalreihen des Kantenschemas der Kometenschwanzbanden (Tabelle 7) zusammengestellt, und zwar die Mittelwerte sowohl der ver-

Tabelle 9.

	$\Delta\nu_M$	$\Delta^2\nu$		$\Delta\nu_M$	$\Delta^2\nu$
0—1	1611,1		7— 8	1427,0	28,2
		25,8			28,0
1—2	1585,3	28,3	8— 9	1399,0	26,1
2—3	1557,0	21,2	9—10	1372,9	27,1
3—4	1535,8	28,8	10—11	1346,8	25,3
4—5	1507,0	24,7	11—12	1321,5	29,4
5—6	1482,3	27,1	12—13	1292,1	21,1
6—7	1455,2	28,2	13—14	1271,0	

schiedenen Banden wie auch jeder der beiden Kanten der Banden. Dabei weichen die Einzelwerte von den Mittelwerten bis auf 4 cm^{-1} ab. Auch diese Mittelwerte besitzen, wie der unregelmäßige Verlauf der zweiten Differenzen anzeigt, noch beträchtliche Fehler. Diese zweiten Differenzen zeigen nun aber keineswegs einen deutlichen Gang, wie es beim Vorhandensein einer positiven Krümmung sein müßte. Die nach der Formel von Birge berechneten Werte zeigen zwar meist eine gute Übereinstimmung mit den beobachteten Mittelwerten; immerhin kommen Abweichungen bis zu 2 cm^{-1} vor. Dazu kommt, daß die ersten drei

Werte aus einer gekrümmten Kurve vollkommen herausfallen würden. Die dreikonstantige Formel scheint mir daher in keiner Weise einen Vorzug vor einer zweikonstantigen zu besitzen (vgl. auch Fig. 4, in der die Kurve der Kernschwingungsfrequenz für den Zustand A' wiedergegeben ist). Als solche habe ich auf Grund aller $\Delta\nu$-Werte ermittelt:

$$\nu = \left.\begin{matrix}15\,716{,}5\\15\,591{,}5\end{matrix}\right\} + (1626{,}56\,n' - 13{,}30\,n'^2) - (2198{,}6\,n'' - 15{,}00\,n''^2).$$

Wenn man nun auf Grund dieser Formel extrapoliert, erhält man als Dissoziationsspannung über den Zustand A': $D' = 8{,}1$ Volt. Etwa denselben Wert erhält man, wenn man die Bande λ 4883 als 0—0-Bande

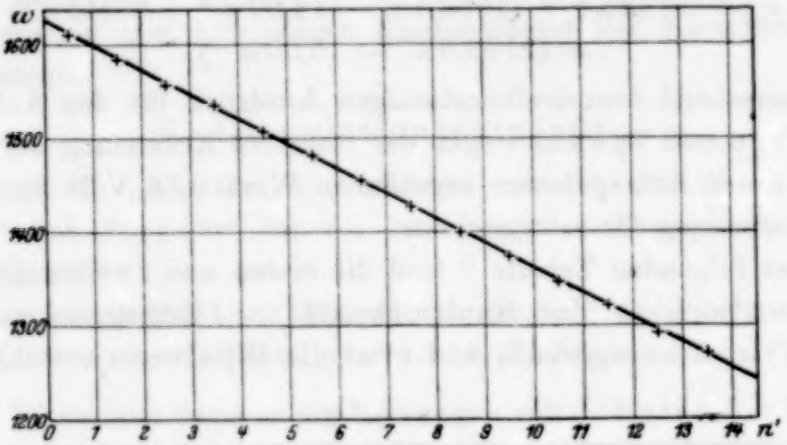


Fig. 4.

ansieht; dadurch wird nur der Schwingungsbestandteil der Summe, die D' bildet, kleiner, der Elektronenbestandteil größer, was sich gerade ungefähr kompensiert.

Birge und Sponer haben mit dem oben erhaltenen Wert 9,8 Volt für D' recht gute Übereinstimmung in der Gleichung

$$J_m + D' = D + J_a$$

erhalten bei Annahme einer Dissoziation von CO^+ in C und O^+ ($J_m = 14{,}2$ Volt, $J_a = 13{,}56$ und $D = 10{,}8$ Volt). Die Deutung der Dissoziationsvorgänge von X' und B' aus scheint damit bestätigt zu sein. Es fragt sich nun aber, welchem Vorgang die Dissoziation vom Zustand A' aus entspricht. Nach einer neueren Arbeit von Fowler und Selwyn* ist nun die Ionisierungsspannung von C 11,2 Volt. Wenn man annimmt,

* A. Fowler und E. W. H. Selwyn, Proc. Roy. Soc. London (A) **118**, 34, 1928.

daß vom Zustand A' aus CO^+ in C^+ und O dissoziiert, erhält man sehr gute Übereinstimmung*, nämlich:

$$14{,}2 + 8{,}1 = 10{,}8 + 11{,}2$$

oder

$$22{,}3 = 22{,}0.$$

Dabei kann natürlich die obige Deutung für die beiden anderen Niveaus X' und B' bestehen bleiben**.

In jedem Falle besteht auch hier wieder eine enge Analogie des CO zum N_2, insofern, als auch hier nicht bei der Dissoziation vom Grundzustand des Ions aus, sondern von einem angeregten Zustand aus, wenn auch von einem anderen als bei N_2^+, die Dissoziation in die Dissoziationsprodukte niedrigster Energie erfolgt und, wie man aus der so erhaltenen Dissoziationsspannung von N_2^+ rückwärts die von N_2 errechnen konnte***, kann man hier mit Hilfe derselben Gleichung die Ionisierungsspannung eines der Atome berechnen, in die das Molekülion dissoziiert und daraus schließen, welches der beiden Atome ionisiert ist.

b) Bei CN. Ganz ähnlich wie bei N_2^+ und CO^+ sind die Dissoziationsvorgänge auch bei CN, worauf ich in meiner Arbeit über die negativen Stickstoffbanden (l. c.) schon hingewiesen habe. Bezeichnet man die drei bekannten Elektronenniveaus des CN mit X, A, B und die verschiedenen Dissoziationsspannungen mit D (reine Dissoziationsenergie + Elektronenanregung) mit entsprechendem Index, so ergibt sich durch Extrapolation $D_X = 9{,}7$ Volt, $D_A = 8{,}6$ und $D_B = 8{,}1$ Volt. Zur Ableitung der beiden ersten Werte sind die ω-Kurven von Jenkins**** extrapoliert worden, der Wert für D_A ist aus der von Mecke† gegebenen Kantenformel für die roten CN-Banden errechnet worden. In normale Atome wird also das Molekül bei Dissoziation über den Zustand B zerlegt, den Anfangszustand der violetten CN-Banden. Die dazu notwendige Energie ist also etwa 8 Volt. Während es nun bei N_2^+ sehr wahrschein-

---

* Anm. b. d. Korr.: Darauf, daß die Dissoziation in C^+ und O wegen der Ähnlichkeit von CO^+ mit BO viel wahrscheinlicher ist als die in C und O^+, weist neuerdings auch Mulliken (Phys. Rev. **32**, 761, 1928) hin, ohne allerdings die bisherige Diskrepanz mit den experimentellen Werten beheben zu können.

** Anm. b. d. Korr.: Vgl. hierzu jedoch eine demnächst in dieser Zeitschrift erscheinende Arbeit von W. Heitler und dem Verfasser.

*** G. Herzberg, Nature **122**, 505, 1928. Zu demselben Schlusse sind auch Prof. Birge und Prof. Mulliken, Nature **122**, 842, 1928, gelangt. Beiden Herren möchte ich für die freundliche Übersendung ihrer Mitteilungen schon vor der Veröffentlichung herzlich danken.

**** F. A. Jenkins, Phys. Rev. **31**, 539, 1928.

† R. Mecke, Phys. ZS. **26**, 231, 1925.

lich ist, daß bei der Dissoziation vom Normalzustand aus ein normales N^+-Ion und ein mit 2,4 Volt angeregtes Atom (^2D) entsteht, ist bei CN nicht ganz sicher, welche Dissoziation erfolgt. Es besteht die Möglichkeit, daß auch hier ein gleich angeregtes N-Atom (^2D) und ein normales C-Atom entsteht. Die Differenz der Werte 9,7 und 8,1 weicht allerdings von 2,4 erheblich ab*.

Wie man sieht, besteht nicht allein in den Spektren bzw. in den Elektronentermen eine große Ähnlichkeit zwischen CO^+, N_2^+ und CN, sondern auch bezüglich der Dissoziationsvorgänge, wenn auch im einzelnen infolge der Verschiedenheit der Dissoziationsprodukte ein verschiedenes Verhalten zu konstatieren ist.

F. Anhang.

a) Die Swanbanden. Die Swanbanden sind vor einiger Zeit sehr ausführlich von Johnson** und Shea*** untersucht worden. In gewöhnlichen Entladungsröhren treten sie nur bei kondensierten Entladungen auf. Dementsprechend treten sie in der elektrodenlosen Ringentladung bei steigender Anregung zuerst mit Einsetzen der hellen, weißen Ringentladung [Entladungsform c)] auf, und zwar dann sehr intensiv, entsprechend der starken Selbstevakuation. Sie zeigen eine charakteristisch andere Intensitätsverteilung über den Röntgenquerschnitt als die CO-Banden; insbesondere bei der Entladungsform e), wo sich in der Mitte der Entladungsröhre eine helle, mehr oder weniger breite leuchtende Achse bildet, sind die Swanbanden und nur diese (wenn die Entladung in reinem CO stattfindet) in der Mitte sehr intensiv und am Rande sehr schwach. Sie sind dadurch besonders gut von den anderen Banden zu unterscheiden. Bei der Entladungsform f) sind die Swanbanden verschwunden.

Die Annahme von Johnson (l. c), daß der Träger der Swanbanden das C_2H_2-Molekül ist, ist mit meinen Ergebnissen nicht vereinbar, denn die Balmerlinien traten trotz starker Überbelichtung und trotz großer Intensität der Swanbanden auf den meisten Aufnahmen überhaupt nicht auf; ebensowenig, wie schon oben erwähnt, die Triplettbanden von Merton und Johnson, die anscheinend einer CH-Verbindung angehören. Man muß deshalb meines Erachtens mit Mecke**** und Shea annehmen, daß der Träger das C_2-Molekül ist.

---

* Anm. b. d. Korr.: Vgl. R. S. Mulliken (Phys. Rev. **32**, 761, 1928) und die obengenannte Arbeit von W. Heitler und dem Verfasser.

** R. C. Johnson, Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) **226**, 157, 1927.

*** J. D. Shea, Phys. Rev. **30**, 825, 1927.

**** R. Mecke, Phys. ZS. **28**, 521, 1927.

b) Die Cyanbanden. Schon bei geringem N_2-Gehalt in CO treten die CN-Banden ziemlich stark auf. Es wurde eine Reihe von Aufnahmen mit verschiedenen Mischungen bei verschiedener Anregung gemacht. Dabei traten nun die CN-Banden nur bei der hellen Ringentladung auf, nicht bei schwacher Anregung, entsprechend der Tatsache, daß nur bei ersterer eine starke Dissoziation von CO und N_2 stattfindet. Die CN-Banden zeigen dabei wiederum eine besondere Intensitätsverteilung über den Röhrenquerschnitt und sind daran ohne weiteres zu erkennen. Bei einer Entladung in N_2 mit wenig CO (es genügte auch schon der Kohlebelag, der sich an der Innenwand der Röhre gebildet hatte) war bei niedrigem Druck ähnlich wie in reinem CO ein helles, weißes Leuchten in der Mitte der Röhre, welches in reinem N_2 nicht auftrat. Es zeigte sich, daß auf dem Spektrogramm die CN-Banden hauptsächlich in der Mitte der Röhre besonders intensiv waren, während die anderen Banden und Linien nur am Rande sehr verstärkt waren. Unter diesen Umständen treten die sogenannten Schwanzbanden der CN-Banden (siehe Jenkins, l.c.) besonders deutlich hervor. Sie sind jedoch auch unter den anderen beschriebenen Bedingungen deutlich vorhanden.

Da es, wie erwähnt, nicht möglich war, bei schwacher Anregung in einem Gemisch von CO und N_2 die CN-Banden zu erhalten, wurde versucht, die CN-Banden dadurch einmal bei schwacher Anregung, bei der ein besonderes Verhalten erwartet wurde, zu erhalten, daß eine schwache Entladung durch $(CN)_2$* geschickt wurde. Nach Überwindung einer Reihe von Schwierigkeiten** wurden schließlich Aufnahmen bei schwacher Anregung erhalten, auf denen fast ausschließlich die CN-Banden vorhanden sind ohne N_2- und CO-Banden***. Diese Aufnahmen bei schwacher Anregung zeigten nun zwar nicht denselben zunächst erwarteten großen

---

* Das $(CN)_2$ wurde durch Erhitzen von $Hg(CN)_2$ entwickelt. Das entwickelte $(CN)_2$ wurde über P_2O_5 aufbewahrt.

** Es zeigte sich nämlich selbst bei schwacher Anregung eine so starke Selbstevakuation, trotzdem selbstverständlich an dem betreffenden abgeschlossenen Apparaturteil sich keine mit flüssiger Luft gekühlte Hg-Falle befand, daß zunächst die bei schwacher Anregung notwendigen langstündigen Belichtungen nicht möglich waren. Um eine bessere Konstanz zu erhalten, wurde deshalb ein 3 Liter-Gefäß an die Entladungsröhre angeschlossen. Trotzdem mußte noch sehr oft nachgefüllt werden. Die beschriebene Selbstevakuation beruht nicht etwa auf dem Zerfall von CN, denn dann müßte ja N_2 übrigbleiben, sondern darauf, daß sich das CN polymerisiert zu $(CN)_x$, dem sogenannten Paracyan, das ein fester Körper ist, der sich in erheblichen Mengen an der Rohrwand niederschlägt.

*** Das ist meines Wissens bisher nur bei Anregung mit aktivem Stickstoff, nicht aber in Entladungen beobachtet worden.

Unterschied gegenüber starker Anregung, wie er bei den N_2^+-Banden gefunden wurde (siehe l. c.), obwohl ja auch bei den CN-Banden keine starke Änderung der Kernschwingungsfrequenz eintritt. Dies dürfte dadurch zu erklären sein, daß die Anregungsspannung der CN-Banden sehr viel kleiner ist als die der N_2^+-Banden. Immerhin ist aber doch ein merklicher Unterschied vorhanden derart, daß die Schwanzbanden, die ja Banden mit hohem n' sind, bei schwacher Anregung viel schwächer sind als bei starker Anregung, wie aus Fig. 5 hervorgehen dürfte. Es muß allerdings bemerkt werden, daß auch bei einigen Aufnahmen mit starker Anregung die Schwanzbanden verhältnismäßig schwach sind. Sicher ist also nur, daß sie bei schwacher Anregung immer schwach sind entsprechend dem Verhalten der Stickstoffbanden.

Ein sehr auffälliger Unterschied der beiden reproduzierten Aufnahmen ist der große Unterschied in der Intensitätsverteilung in den einzelnen

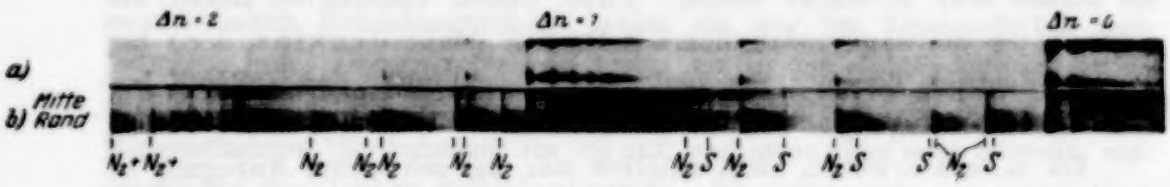


Fig. 5.

a) CN bei schwacher Anregung. b) CO + N_2 bei starker Anregung. S = Schwanzbande von CN.

Banden. Bei schwacher Anregung tritt die Nullücke besonders deutlich hervor und die stärksten Bandenlinien liegen zwischen diesen und der Kante, während bei starker Anregung die Kante fast linienförmig ist, d. h. das Intensitätsmaximum liegt bei höherem m. Ob dieser Effekt auf der Verschiedenheit der Elektronengeschwindigkeit oder der der Temperatur beruht, ist vorläufig nicht zu entscheiden. Bemerkt sei, daß schon Otsuka* das Hervortreten der Nullinie in den CN-Banden bei Aufnahmen der elektrodenlosen Entladung in Kr gefunden hat**. Bei seinen Aufnahmen scheint das Maximum bei noch niedrigerem m zu liegen Außerdem treten bei ihm nur die ersten Banden jeder Gruppe auf, was vielleicht durch die Begrenzung der Elektronengeschwindigkeit in Kr veranlaßt ist. In Gemischen von He mit CO und N_2 konnte etwas Derartiges von mir nicht beobachtet werden.

Besonders bemerkenswert ist nun noch, daß bei starker Anregung, wenn die CN-Banden nicht bis zur Mitte gehen, in der Mitte fast aus-

* O. Otsuka, ZS. f. Phys. **36**, 786, 1926.

** Bei Anregung mit aktivem Stickstoff ist dies ja schon viel früher durch Strutt und Fowler (Proc. Roy. Soc. **86**, 105, 1912) gefunden worden.

schließlich dieselben Bandenlinien der Banden $n' = 0$ [P ($5^1/_2$, $8^1/_2$, $16^1/_2$), R ($3^1/_2$, $6^1/_2$, $14^1/_2$)] zu sehen sind, die früher im Nachleuchten (l. c.) besonders verstärkt gefunden wurden*. Sie besitzen im Gegensatz zu den übrigen Bandenlinien über den ganzen Röhrenquerschnitt etwa gleiche Intensität und sind deshalb leicht zu beobachten. Ihre Intensität ist, absolut genommen, ganz erheblich größer als im Nachleuchten. In der erzeugenden Entladung des Nachleuchtens in reinem N_2 waren sie früher nicht beobachtet worden. Bei den Aufnahmen der Entladung in $(CN)_2$ bei schwacher Anregung treten sie ebenfalls nicht auf. Ein Nachleuchten tritt bei den Entladungsformen, bei denen die Linien auftreten, nicht oder nur sehr schwach auf. Jedenfalls sind aber immer, wenn sie auftreten, C- und N-Atome und ferner N_2- und CN-Moleküle vorhanden. Aus der gleichmäßigen Intensitätsverteilung über den Röhrenquerschnitt folgt, daß es sich nicht um die direkte Anregung durch Elektronenstoß handeln kann, sondern um Anregung durch Stoß zweiter Art, Dreierstoß oder optische Anregung. Aus der Tatsache, daß sie dann, wenn das Spektrum ausschließlich in den CN-Banden besteht, nicht verstärkt auftreten, folgt, daß freier Stickstoff in irgend einer Form bei ihrer Anregung beteiligt ist. Es läßt sich aber zurzeit noch nicht entscheiden, ob es sich hierbei wirklich um eine Art Resonanzfluoreszenz handelt, wie l. c. vermutet wurde, oder doch um eine sehr scharfe Resonanz bei Stößen zweiter Art.

Der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft und der Helmholtz-Gesellschaft danke ich herzlich für die Unterstützung dieser Arbeit durch Apparate (Glasspektrograph und Spektrokomparator).

Der Studienstiftung des Deutschen Volkes möchte ich wiederum für ihre Unterstützung meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Ganz besonderen herzlichen Dank schulde ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. H. Rau, für das ständige Interesse und die dauernde Unterstützung, die er mir stets in großzügiger Weise hat zuteil werden lassen.

* Auf einer im Bonner Institut gemachten Aufnahme einer Entladung in Argon, das N_2 und H_2 enthielt, die Herr Dr. Mecke mir freundlicherweise zur Verfügung stellte, fand ich ebenfalls eine solche Verstärkung der genannten Linien in den CN-Banden. Ferner teilt mir Herr Prof. Mulliken freundlicherweise brieflich mit, daß er bei Einwirkung von aktivem Stickstoff auf die verschiedensten Kohleverbindungen ebenfalls diese Linien sehr verstärkt gefunden hat.

(Untersuchungen zur Molekularstrahlmethode aus dem Institut für physikalische Chemie der Hamburgischen Universität, Nr. 9.)

Das magnetische Moment des Lithiumatoms.

Von **John B. Taylor***, zurzeit in Hamburg.

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 17. November 1928.)

Es wird das magnetische Moment des Lithiumatoms mit Hilfe der Molekularstrahlmethode gemessen. Die Diskussion der Versuchsergebnisse zeigt, daß ein etwa vorhandenes Kernmoment wohl kleiner als ein Drittel Bohrsches Magneton sein müßte.

Die magnetischen Momente der Alkalimetalle, Natrium und Kalium, sind schon nach der Molekularstrahlenmethode untersucht worden**. Beide Metalle zeigten eine Ablenkung im homogenen Magnetfeld, entsprechend einem Bohrschen Magneton in Übereinstimmung mit der Theorie. Man sollte dasselbe Resultat für Lithium erwarten. Aber in letzter Zeit sind spektroskopische Beobachtungen gemacht worden, die ein anderes Resultat möglich erscheinen lassen. Schüler*** hat eine Hyperfeinstruktur im Li^+-Spektrum gefunden, die durch die bisherigen Theorien nicht gedeutet werden kann. Heisenberg**** hat vorgeschlagen, dies Ergebnis durch ein Kernmoment von der Größenordnung eines Bohrschen Magnetons zu erklären.

Ein solches Moment braucht sich beim Zeemaneffekt nicht bemerkbar zu machen, falls seine Lage bei der Aussendung der Linie unverändert bleibt. Dagegen müßte sich ein solches Moment beim Molekularstrahlversuch in jedem Falle zeigen. Falls z. B. das Kernmoment zwei Lagen zum Felde haben kann, so wird im starken Magnetfeld das Kernmoment entweder dem Elektronenmoment hinzuzuaddieren oder davon zu subtrahieren sein.

Apparatur. Weil Lithium oberhalb seines Schmelzpunktes Glas stark angreift, wurde die Apparatur ganz aus Metall (Messing) konstruiert. Sonst ist sie der von Leu** (U. z. M. Nr. 4) gebrauchten sehr ähnlich.

---

* National Research Fellow in Chemistry.

** J. B. Taylor, Phys. Rev. **28**, 576, 1926; A. Leu, ZS. f. Phys. **41**, 551, 1927.

*** H. Schüler, Ann. d. Phys. **76**, 292, 1925; ZS. f. Phys. **42**, 487, 1927. Neuerdings hat Schüler allerdings eine analoge Hyperfeinstruktur bei Natrium gefunden. Naturw. **25**, 512, 1928.

**** W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **39**, 516, 1926.

Ein metallischer Aufbau ist auch wegen seiner soliden Konstruktion vorteilhaft.

Wie man aus Fig. 1 sieht, besteht die Apparatur aus zwei Teilen, dem Ofenraum A und dem Auffangeraum B, die durch getrennte Quecksilberpumpen evakuiert wurden. In dieser Metallapparatur, mit heißem Ofen, konnte man ein Vakuum $< 10^{-6}$ mm im Auffangeraum und $< 10^{-5}$ mm im Ofenraum erreichen. Die Ansatzstellen wurden entweder hart oder mit reinem Zinn gelötet.

Der Ofen (1) aus Wolframstahl sitzt mit einer schlechtleitenden Stange (2) aus Konstantan auf einer Messingplatte (3), die in den

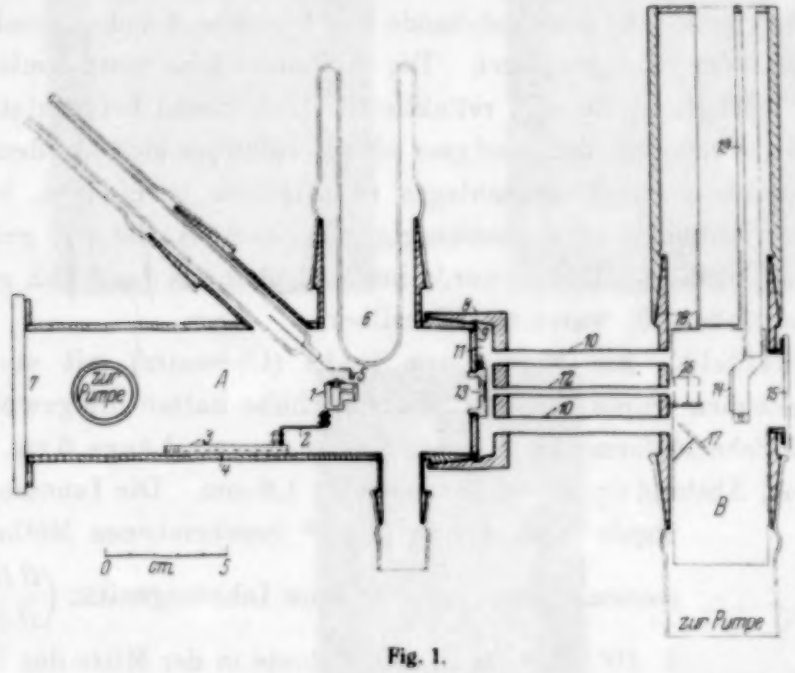


Fig. 1.

Schwalbenschwanz (4) gut paßt. Mittels eines Stabes konnte der Ofen herausgezogen und hineingeschoben werden. Der Schwalbenschwanz sicherte immer dieselbe Lage des Ofenspaltes. Für Temperaturen bis 450° C wurde der Ofen durch Wärmestrahlung von der Wolframspirale (5) erhitzt. Für höhere Temperaturen wurde außerdem Elektronenbombardement benutzt.

Der Ofenraum wurde von einem eng anliegenden Bleirohr mit durchfließendem Wasser gekühlt. Das Gefäß (6) mit flüssiger Luft diente zur Verbesserung des Vakuums. Das offene Ende des Ofenraumes war durch eine Glasplatte (7) geschlossen. Durch diese Platte konnte man den Verlauf der Verdampfung und die Lage der Spirale gut sehen.

Der Metallschliff (8) sitzt mit Fett gedichtet auf dem Ofenraumkonus (9) und trägt Röhren, die zum Auffangeraum führen. Die beiden größeren Röhren (10) dienen zum besseren Auspumpen des Zwischenraumes (11); das kleine Rohr (12), durch das der Strahl läuft, liegt zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten. Weil der Auffangeraum und der Ofenraum nur durch den engen Abbildespalt (13) Verbindung hatten und getrennt ausgepumpt wurden, konnten irgendwelche im Ofenraum abgegebene Gase nicht in das Strahlrohr und in den Auffangeraum mit dem empfindlichen Auffangeblech hineingelangen.

Der Strahl wurde auf einem mit flüssiger Luft gekühlten Nickelblech (14) niedergeschlagen. Durch das Glasfenster (15) wurde mit Hilfe eines Prismas (16) das entstehende Bild beobachtet und mikroskopisch ausgemessen oder photographiert. Die Auffangefläche wurde mit einem von einer Milchglasplatte (17) reflektierten Lichtstrahl beleuchtet.

Um zu vermeiden, daß Restgase oder Fettdämpfe sich auf dem Blech kondensieren und das Niederschlagen des Strahles verhindern, hat sich ein äußerer zylindrischer, unabhängig von dem Auffänger gekühlter Schirm (18) bewährt. Dieser wurde immer früher als das Blech gekühlt. Die Dewargefäße (19) waren aus Neusilber.

Magnetfeld. Ein Magnet von Kohl (Chemnitz) mit verschiebbaren Polschuhen wurde benutzt. Die Polschuhe hatten die gewöhnliche Spalt- und Schneideform und folgende Dimensionen: Länge 6 cm, Spaltbreite 3 mm, Abstand Spalt von der Schneide 1,8 mm. Die Inhomogenität wurde nach der bei Leu* beschriebenen Methode gemessen. Es ergab sich eine Inhomogenität $\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)$ von $5 \cdot 10^4$ Gauß/cm in dem Gebiete in der Mitte des Spaltes, wo $\frac{\partial H}{\partial S}$ ziemlich konstant bleibt. Es zeigte sich aber, daß bei den hier benutzten kleinen Spaltdimensionen die Messung ziemlich ungenau wurde. Die Fehlergrenze beträgt etwa 5 bis 10%. Dieser Fehler spielt insofern keine Rolle, als in der vorliegenden Arbeit Ablenkungen von zwei verschiedenen Substanzen (Kalium und Lithium) direkt verglichen werden. Die Lage des kleinen Rohres und des Strahles zwischen den Polschuhen sieht man aus Fig. 2. Der Strahl läuft durch ein Gebiet konstanter Inhomogenität von etwa 2×2 mm² Querschnitt. Innerhalb des Spaltes ist $\frac{\partial H}{\partial S}$ etwa

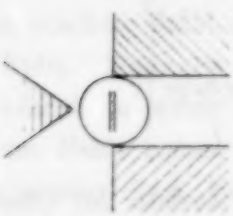


Fig. 2.

* Vgl. Anmerkung ** auf S. 846.

5% größer als gerade außerhalb der Spaltebene. Infolgedessen wurde der von der Schneide abgestoßene Strahl etwas stärker abgelenkt als der angezogene.

Verlauf eines Versuches. Der Apparat wurde zunächst evakuiert und der Ofen zum Entgasen ausgeglüht. Dann wurde die Glasplatte weggenommen, der Ofen gefüllt, wieder hineingeschoben, und mit wieder

Fig. 3.

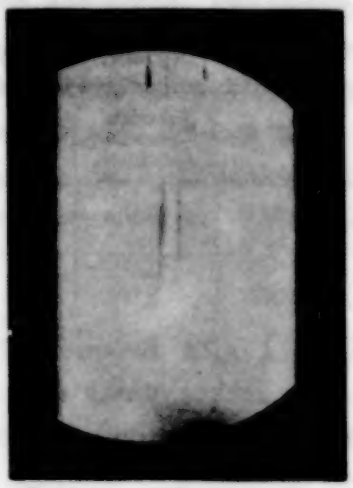


Fig. 4.

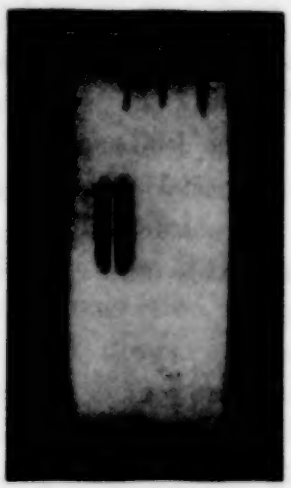


Fig. 5.

aufgesetzter Platte wurde der Apparat sofort ausgepumpt. Das Alkalimetall (Li oder K) wurde unter reinem Benzin in den Ofen gebracht. Kalium wurde bei einer Temperatur von etwa 600° K und Lithium bei 1000° K verdampft.

Resultate. Bei diesen Versuchen wurden Kalium und Lithium direkt verglichen. Fig. 3 bis 5 zeigen Photographien der erhaltenen Aufspaltungsbilder. Fig. 3 gibt eine Aufspaltung von Kalium und in der

Mitte einen Strich ohne Feld; der am Anfang niedergeschlagen wurde. Fig. 4 zeigt eine Aufspaltung von Lithium, kurz nach dem Erscheinen photographiert. Später werden die Striche breiter wie in Fig. 5. Hier sind auch Kernschatten deutlich zu sehen. Der Niederschlag ist so dick geworden, daß er metallisch reflektiert. Es ist interessant, zu bemerken, daß man die Momente aus Messungen der Breite der Kernschatten ebensogut wie aus der Breite der ganzen Striche ausrechnen kann.

Tabelle 1.

Versuch mit	T^0 K	Inhomogenität Gauß/cm	l_1 cm	l_2 cm	a in μ	S_1 in μ	S_2 in μ	S_α in μ	μ
K . . .	580	5,0	6,0	3,0	95	154	975	1050	1,0
K . . .	580	5,0	6,0	3,0	95	180	770	1020	0,98
Li . . .	1020	5,0	6,0	3,0	95	103	502	625	1,04
Li . . .	1000	5,0	6,0	2,1	85	58	490	510	0,96

Tabelle 1 gibt Beispiele der Experimente. Die Versuche wurden zunächst wie früher unter der Annahme berechnet, daß alle Atome das gleiche Moment haben und die eine Hälfte parallel, die andere antiparallel zum Feld gerichtet ist. S_1, S_2 und a sind gemessene Dimensionen, nämlich die Grenzen der sichtbaren Striche, also Stellen gleicher Intensität (s. Fig. 6). S_α ist die Ablenkung der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit und wurde durch Formel (1) ausgerechnet (U. z. M. Nr. 5)*. Weil a nicht klein gegen S ist, kann mit der einfacheren Formel nicht gerechnet werden. Nach Formel (2) wurden die entsprechenden Momente ermittelt. l_1 ist der Weg im Felde und l_2 ist der Abstand der Auffangefläche vom Feldende.

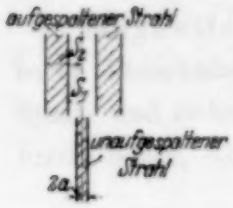


Fig. 6

$$\left[e^{-\frac{S_\alpha}{S_1+a}}\left(\frac{S_\alpha}{S_1+a}+1\right)-e^{-\frac{S_\alpha}{S_1-a}}\left(\frac{S_\alpha}{S_1-a}+1\right)\right]$$
$$=\left[e^{-\frac{S_\alpha}{S_2+a}}\left(\frac{S_\alpha}{S_2+a}+1\right)-e^{-\frac{S_\alpha}{S_2-a}}\left(\frac{S_\alpha}{S_2-a}+1\right)\right]. \qquad (1)$$

$$S_\alpha = \frac{\mu}{4RT}\cdot H\cdot\frac{\partial H}{\partial S}\cdot l_1^2\left(1+\frac{2l_2}{l_1}\right). \qquad (2)$$

Diskussion der Versuche im Hinblick auf den Nachweis eines Kernmomentes. Um zu einem Überblick zu gelangen, wie das Vorhandensein eines Kernmomentes die Intensitätsverteilung im Auf-

* O. Stern, ZS. f. Phys. **41**, 563, 1927.

spaltungsbild beeinflußt, wollen wir zunächst einen einfachen Spezialfall diskutieren. Wir nehmen an, daß das Kernmoment nur zwei Lagen im Felde haben kann, parallel und antiparallel. Da die Versuche in starken Magnetfeldern gemacht worden sind, in denen die Aufspaltung durch den Zeemaneffekt viel größer ist als die Aufspaltung der Hyperfeinstruktur, werden in unserem Falle Kern und Atom bzw. Valenzelektron unabhängig richtungsgequantelt. Jeder der beiden ohne Kernmoment entstehenden abgelenkten Strahlen wird dann nochmals in zwei aufgespalten, die den beiden magnetischen Momenten: Elektronmoment plus und minus Kernmoment entsprechen. Im Falle einheitlicher Geschwindigkeit müßten also als Aufspaltungsbild vier Striche erscheinen, die aber in Wirklichkeit nicht auftreten werden. Dagegen wird der Intensitätsverlauf im Aufspaltungsbild

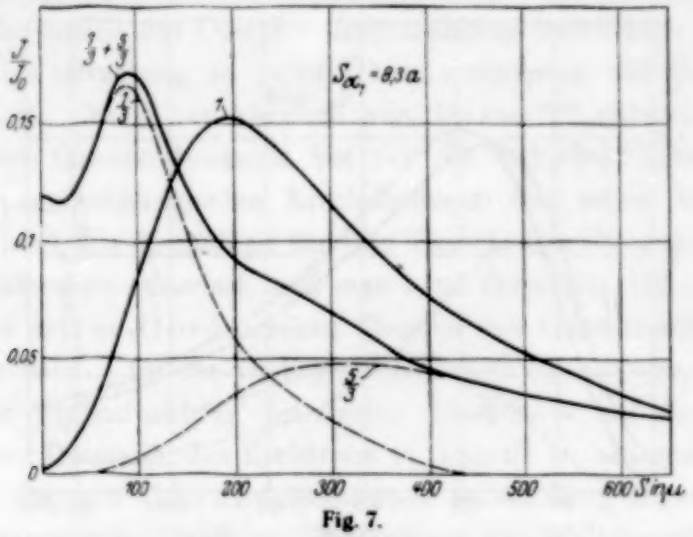


Fig. 7.

ein anderer als für den Fall von zwei Strichen (Kernmoment Null) sein. Es handelt sich nun darum, festzustellen, wie groß das Kernmoment sein muß, damit die Abweichung von diesem Intensitätsverlauf in den obigen Versuchen noch hätte bemerkt werden müssen. Im folgenden soll die Änderung des Intensitätsverlaufs mit abnehmender Größe des Kernmoments diskutiert werden.

1. Kernmoment ein Bohrsches Magneton. In diesem Falle würden je ein Moment 2 von gleicher Intensität und ein Moment Null von doppelter Intensität auftreten. Dieser Fall ist, wie man ohne weiteres sieht, nach den obigen Messungen ausgeschlossen.

2. Kernmoment zwei Drittel Magneton. Auftretende Momente: $+\frac{5}{3}$, $+\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{3}$. Alle von gleicher Intensität. Der Intensitätsverlauf für diesen Fall ist in Fig. 7 zu sehen. Auch dieser Intensitätsverlauf ist nicht mit den Messungen vereinbar.

3. Kernmoment ein Drittel Magneton. Auftretende Momente: $+\frac{4}{3}$, $+\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{3}$. Der Intensitätsverlauf für diesen Fall ist in Fig. 8 dargestellt. Wie man sieht, ist er schon sehr ähnlich dem Intensitätsverlauf für den Fall Kernmoment Null. Immerhin hätte sich bei den obigen Messungen die Abweichung gerade noch bemerkbar machen müssen.

Dagegen würde für ein kleineres Kernmoment die Abweichung innerhalb der Versuchsgenauigkeit liegen.

Man kann also aus den obigen Versuchen schließen, daß das Kernmoment kleiner als ein Drittel Magneton sein muß. Dabei ist aber vorausgesetzt, daß das Kernmoment nur die beiden Lagen parallel und antiparallel zum Felde annehmen kann. Bei anderen Voraussetzungen

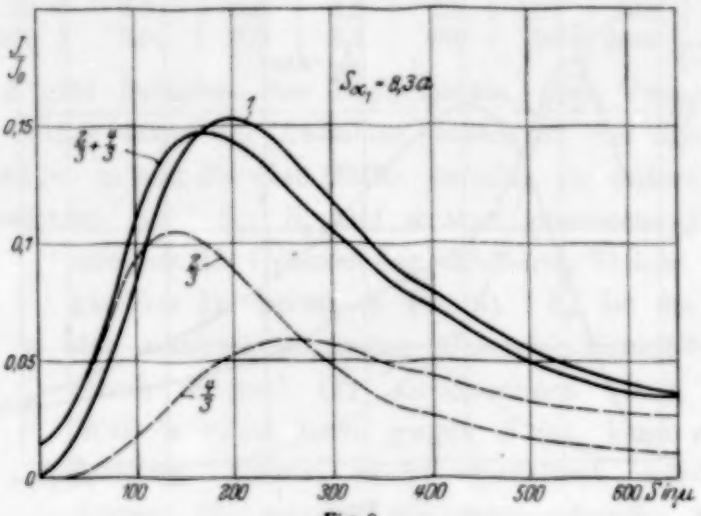


Fig. 8.

müßte natürlich eine der obigen entsprechende Diskussion eintreten. Es soll darauf verzichtet werden, solche Diskussionen für alle möglichen Fälle hier auf Vorrat durchzuführen. Sollte die Theorie Anhaltspunkte für eine bestimmte Richtungsquantelung des Kernmoments liefern, so ist diese Diskussion leicht zu liefern.

Für die experimentelle Methodik ergibt sich die Folgerung, daß zur Entscheidung der Frage nach der Zahl der vorkommenden Momente das Arbeiten mit Strahlen von nahezu einheitlicher Geschwindigkeit die wirkliche geeignete Methode ist.

Herrn Prof. Stern möchte ich an dieser Stelle für seinen wertvollen Rat und sein Interesse bei der Ausführung dieser Arbeit meinen Dank aussprechen.

Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac.

Von **O. Klein** und **Y. Nishina** in Kopenhagen.

(Eingegangen am 30. Oktober 1928.)

Auf Grund der neuen, von Dirac entwickelten relativistischen Quantendynamik wird die Intensität der Comptonstreustrahlung berechnet. Das Resultat zeigt Abweichungen von den entsprechenden Dirac-Gordonschen Formeln, die von der zweiten Größenordnung hinsichtlich des Verhältnisses der Energie des primären Lichtquants zu der Ruheenergie des Elektrons sind.

Einleitung. Auf Grundlage der älteren Form der relativistischen Quantenmechanik haben Dirac* und Gordon** eine Theorie der Intensität und Polarisation der Comptonstreustrahlung entwickelt, die für nicht zu kurzwellige Strahlung in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung zu sein scheint. Nach der kürzlich von Dirac*** entwickelten neuen relativistischen Quantendynamik, bei der die mit der Eigenrotation des Elektrons zusammenhängenden Erscheinungen von selbst berücksichtigt werden, hat sich die Grundlage für eine Theorie der Streuung des Lichtes an freien Elektronen geändert, und man kann erwarten, daß auch die Endresultate der Dirac-Gordonschen Theorie des Comptoneffekts hiervon beeinflußt werden. In der vorliegenden Arbeit haben wir versucht, das Problem der Streustrahlung bei freien Elektronen auf Grundlage von Diracs neuer Dynamik des Elektrons in Angriff zu nehmen. Wir haben uns hierbei der von Gordon gegebenen Behandlung angeschlossen, die auf einer korrespondenzmäßigen Verwertung der Wellenmechanik beruht. Man wird erwarten, daß die von Dirac gegebene Strahlungstheorie, die eine Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung erlaubt, in diesem Falle ein übereinstimmendes Resultat gibt, wenn es sich um die erste Näherung in bezug auf die Intensität der Primärstrahlung handelt.

In der vorliegenden Arbeit haben wir uns auf die Berechnung der Intensität der Streustrahlung in ihrer Abhängigkeit von Richtung und Wellenlänge beschränkt. Die Frage der Polarisation der Streustrahlung wird der eine von uns in einer nachfolgenden Arbeit behandeln****. Es

---

* P. M. A. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) **111**, 405, 1926, wird im folgenden als A zitiert.

** W. Gordon, ZS. f. Phys. **40**, 117, 1927.

*** P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) **117**, 610, 1928, wird im folgenden als B zitiert.

**** Y. Nishina, ZS. f. Phys. **52**, 869, 1929.

hat sich gezeigt, daß in dem Gebiet der harten γ-Strahlen die Abweichungen unserer Resultate von den Dirac-Gordonschen Formeln beträchtlich sind, so daß z. B. die Wellenlängenbestimmung der kosmischen durchdringenden Strahlung nach der vorliegenden Theorie bedeutend kürzere Wellenlängen liefern würde als nach der älteren Theorie. Gerade in diesem Gebiet scheinen aber die experimentellen Ergebnisse über den Comptoneffekt zu unsicher zu sein, um zurzeit eine Entscheidung für oder gegen die Theorie zu liefern. Hier wäre jedoch eine genaue experimentelle Prüfung sehr erwünscht, nicht am wenigsten im Hinblick auf die von Dirac hervorgehobene Schwierigkeit seiner neuen Theorie, die mit der Möglichkeit von negativen Energien zusammenhängt.

§ 1. Orientierende Bemerkungen über die Diracsche Wellengleichung. Nach Dirac* wird das quantenmechanische Problem bei einem Elektron mit der Ladung $-e$ und der Ruhemasse m, das sich in einem Kraftfeld bewegt, wo das elektrostatische Potential V und das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ ist, durch die folgende Hamiltonsche Form F bestimmt:

$$F = \frac{E + eV}{c} + \varrho_1 \left(\sigma, \mathfrak{p} + \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right) + \varrho_3 mc, \tag{1}$$

wo E die Energie des Elektrons und $\mathfrak{p}$ seinen Impulsvektor mit den Komponenten p_1, p_2, p_3 nach den Achsen x_1, x_2, x_3 eines rechtwinkligen Koordinatensystems bedeutet, während c die Vakuumlichtgeschwindigkeit bezeichnet. Ferner ist σ ein Matrixvektor mit den Komponenten σ_1, σ_2, σ_3, die folgende Relationen erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 &= i \sigma_3 = - \sigma_2 \sigma_1, & \sigma_1^2 &= 1, \\ \sigma_2 \sigma_3 &= i \sigma_1 = - \sigma_3 \sigma_2, & \sigma_2^2 &= 1, \\ \sigma_3 \sigma_1 &= i \sigma_2 = - \sigma_1 \sigma_3, & \sigma_3^2 &= 1, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und ϱ_1 und ϱ_3 sind zwei von drei Matrizen, die mit (2) identische Relationen erfüllen und außerdem mit den σ vertauschbar sind. Wie Dirac gezeigt hat, können alle diese Größen mittels Matrizen mit vier Zeilen und Kolonnen dargestellt werden. Dementsprechend bestehen die zu der Hamiltonschen Form F gehörigen zueinander adjugierten Eigenfunktionen φ und ψ, die wir als Funktionen der Koordinaten x_1, x_2, x_3 und der Zeit t betrachten wollen, aus je vier Komponenten φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 bzw. ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, indem ein Ausdruck wie $\mu \psi$, wo μ eine vierzeilige Matrix bedeutet, als Abkürzung für die vier Größen $\sum_{k=1}^{4} \mu_{ik} \psi_k \, (i = 1, 2, 3, 4)$

* P. A. M. Dirac, l. c. B.

zu verstehen ist, während $\varphi\mu$ die Größen $\sum_{k=1}^{4} \varphi_k \mu_{ki}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ bezeichnet, wo μ_{ik} die Matrixelemente von μ sind.

Die physikalische Verwertung der Gleichung (1) beruht auf der Annahme, daß, wenn φ und ψ zusammengehörige Wellenfunktionen der Hamiltonschen Funktion (1) sind — d. h. bei hermitischen Matrizen ϱ_1, ϱ_3 und σ, daß φ und ψ zueinander konjugiert komplex sind —, $\varphi\psi d\tau$ die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß das Elektron in dem Volumenelement $d\tau$ angetroffen wird. Hieraus folgt nach Dirac für die Wahrscheinlichkeit, daß das Elektron in der Zeit dt ein Flächenelement df durchquert, $-c\varphi\varrho_1\sigma_s\psi df dt$, wo σ_s die Komponente des Vektors σ in der Normalrichtung des Flächenelements bezeichnet, und wo $\varphi\mu\psi$, wenn μ wieder eine beliebige vierzeilige Matrix bedeutet, gleich $\sum_{i,k} \varphi_i \mu_{ik} \psi_k$ sein soll. Wenn wir die Größen $\varphi\psi$ und $-c\varphi\varrho_1\sigma\psi$ mit der Ladung $-e$ des Elektrons multiplizieren, bekommen wir die sogenannte wellenmechanische elektrische Dichte ϱ und den elektrischen Stromdichtevektor $\mathfrak{Z}$. Es gilt also

$$\varrho = -e\varphi\psi, \qquad \mathfrak{Z} = ec\varphi\varrho_1\sigma\psi. \tag{3}$$

§ 2. Eigenfunktionen der Diracschen Wellengleichung bei einem freien Elektron. Wir wollen zuerst ein freies Elektron betrachten, wo wir, wie in der Schrödingerschen Theorie, folgende zu je einem Werte von $\mathfrak{p}$ gehörigen Funktionen φ_0 und ψ_0 als Eigenfunktionen wählen können, nämlich

$$\varphi_0(p) = u(\mathfrak{p})\, e^{\frac{i}{h}[Et - (\mathfrak{p}\mathfrak{r})]}, \qquad \psi_0(p) = v(\mathfrak{p})\, e^{-\frac{i}{h}[Et - (\mathfrak{p}\mathfrak{r})]}, \tag{4}$$

wo h die durch 2π dividierte Plancksche Konstante und $\mathfrak{r}$ den Koordinatenvektor mit den Komponenten x_1, x_2, x_3 bezeichnet, während $u(\mathfrak{p})$ und $v(\mathfrak{p})$ von der Zeit und den Koordinaten unabhängige Größen sind, die aus vier Komponenten bestehen und folgende rein algebraische Gleichungen zu befriedigen haben:

$$\left.\begin{aligned} u(\mathfrak{p})\,\{E/c + \varrho_1(\sigma\mathfrak{p}) + \varrho_3 mc\} &= 0, \\ \{E/c + \varrho_1(\sigma\mathfrak{p}) + \varrho_3 mc\}\, v(\mathfrak{p}) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Zu einem gegebenen $\mathfrak{p}$ gehören nach diesen Gleichungen zwei Werte der Energie E, ein positiver und ein negativer, welche beide die Relation

$$E^2/c^2 = m^2c^2 + \mathfrak{p}^2 \tag{6}$$

erfüllen, die dem Zusammenhang zwischen Energie und Impuls in der Relativitätsmechanik Ausdruck gibt. Da die Gleichungen (5) Abkürzungen von Systemen mit je vier Gleichungen darstellen, so sollte man eigentlich

erwarten, daß zu einem gegebenen Werte von $\mathfrak{p}$ vier Energiewerte gehörten, was eben der Möglichkeit entspricht, neben den physikalisch nicht sinnvollen negativen Energiewerten die mit dem Eigenmagnetismus des Elektrons zusammenhängende Verdopplung der Anzahl der Eigenwerte zu berücksichtigen. Diese Entartung bei dem freien Elektron hat zur Folge, daß, wenn wir einen bestimmten Energiewert wählen — wir werden uns dabei selbstverständlich auf positive Werte beschränken —, die Verhältnisse der Komponenten von $u(\mathfrak{p})$ und ebenso von $v(\mathfrak{p})$ noch nicht festgelegt sind, sondern diese hängen von zwei frei wählbaren Größen ab. Bei der folgenden Berechnung der Intensität der Streustrahlung ist es notwendig, diese Entartung in Betracht zu ziehen.

Wir wollen zuerst den Fall eines ruhenden Elektrons betrachten. Hier ist $\mathfrak{p} = 0$, und wir setzen $E = mc^2$. Die Gleichungen (5) werden also einfach

$$u(0)(1 + \varrho_3) = 0, \qquad (1 + \varrho_3) v(0) = 0. \tag{7}$$

Wir wollen ϱ_3 als Diagonalmatrix wählen, indem wir setzen*:

$$\varrho_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Es folgt dann, daß die Gleichungen (7) befriedigt sind, wenn u_3, v_3, u_4, v_4 gleich Null sind, während u_1, v_1 und u_2, v_2 beliebig gewählt werden können. Wir können mit anderen Worten die allgemeine zu dem gegebenen Energiewert gehörige Lösung aus zwei unabhängigen Lösungen zusammensetzen, bei denen u_1, v_1 bzw. u_2, v_2 allein von Null verschieden sind.

Wir wollen nun ferner die Komponente σ_3 von σ nach der x_3-Achse als Diagonalmatrix wählen, indem wir setzen:

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Nach Dirac ist nun $u(\mathfrak{p})\sigma v(\mathfrak{p})$ proportional dem magnetischen Moment des Elektrons, das zu der Lösung $u(\mathfrak{p}), v(\mathfrak{p})$ gehört. Die erwähnten beiden Lösungen geben also ein gleich großes, aber entgegengesetzt gerichtetes magnetisches Moment des Elektrons nach der x_3-Achse.

---

* Wir haben für ϱ_3 das umgekehrte Zeichen gewählt wie Dirac, damit für positive Energie die zwei ersten anstatt der zwei letzten Komponenten von u und v endlich bleiben.

Wir können deshalb u_1, v_1 bzw. u_2, v_2 als die zu den beiden möglichen Stellungen des magnetischen Moments in bezug auf die x_3-Achse gehörigen Eigenfunktionen betrachten.

Den Fall eines beliebigen $\mathfrak{p}$-Wertes können wir leicht auf den Fall $\mathfrak{p} = 0$ zurückführen, indem wir eine mit der Lorentztransformation innig zusammenhängende Kontakttransformation vornehmen†. Es sei

$$S = \alpha + i\beta\varrho_2(\sigma\mathfrak{p}), \qquad S^{-1} = \alpha - i\beta\varrho_2(\sigma\mathfrak{p}), \tag{10}$$
$$\alpha^2 + \beta^2\mathfrak{p}^2 = 1,$$

wo wir α und β gleich näher bestimmen wollen. Wir setzen

$$F^* = S\left(E/c + \varrho_1(\sigma\mathfrak{p}) + \varrho_3 mc\right)S^{-1}. \tag{11}$$

Man hat nun

$$S\varrho_1 S^{-1} = \varrho_1\left(\alpha - i\beta\varrho_2(\sigma\mathfrak{p})\right)^2 = (\alpha^2 - \beta^2\mathfrak{p}^2)\varrho_1 + 2\alpha\beta\varrho_2(\sigma\mathfrak{p})$$

und also

$$S\varrho_1(\sigma\mathfrak{p})S^{-1} = (\alpha^2 - \beta^2\mathfrak{p}^2)\varrho_1(\sigma\mathfrak{p}) + 2\alpha\beta\mathfrak{p}^2\varrho_3.$$

Ferner

$$S\varrho_3 S^{-1} = (\alpha^2 - \beta^2\mathfrak{p}^2)\varrho_3 - 2\alpha\beta\varrho_1(\sigma\mathfrak{p}).$$

Es folgt also

$$F^* = E/c + (\alpha^2 - \beta^2\mathfrak{p}^2 - 2\alpha\beta mc)\varrho_1(\sigma\mathfrak{p}) + \left((\alpha^2 - \beta^2\mathfrak{p}^2)mc + 2\alpha\beta\mathfrak{p}^2\right)\varrho_3.$$

Wir wollen nun α und β so wählen, daß der Koeffizient von $\varrho_1(\sigma\mathfrak{p})$ in F^* verschwindet, d. h. wir verlangen

$$\alpha^2 - \beta^2\mathfrak{p}^2 - 2\alpha\beta mc = 0. \tag{12}$$

Ferner setzen wir

$$(\alpha^2 - \beta^2\mathfrak{p}^2)mc + 2\alpha\beta\mathfrak{p}^2 = m^*c \tag{13}$$

und haben dann

$$F^* = E/c + \varrho_3 m^* c. \tag{14}$$

Es folgt nun durch eine einfache Rechnung

$$m^{*2}c^2 = m^2c^2 + \mathfrak{p}^2, \tag{15}$$

und wenn wir im Einklang hiermit setzen

$$m^*c = +\sqrt{m^2c^2 + \mathfrak{p}^2}, \tag{16}$$

so bekommen wir leicht

$$\alpha = \sqrt{\frac{m^* + m}{2m^*}}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{m^* - m}{2m^*\mathfrak{p}^2}}, \tag{17}$$

wodurch die Bedingung (12) erfüllt ist.

---

† Die folgende Betrachtung steht in naher Beziehung zu Diracs Ausführungen über die Invarianz seiner Gleichungen gegenüber Lorentztransformationen, l. c. B. S. 615.

Setzen wir nun

$$u(\mathfrak{p}) = u^*(\mathfrak{p})\,S(\mathfrak{p}), \qquad v(\mathfrak{p}) = S^{-1}(\mathfrak{p})\,v^*(\mathfrak{p}), \tag{18}$$

wo $S(\mathfrak{p})$ und $S^{-1}(\mathfrak{p})$ die Größen (10) für einen bestimmten Wert von $\mathfrak{p}$ bedeuten, so folgt aus (11), daß u^* und v^* die Gleichungen

$$u^*(E/c + \varrho_3 m^* c) = 0, \qquad (E/c + \varrho_3 m^* c)\,v^* = 0$$

befriedigen, oder da nach (16) $E = m^* c^2$

$$u^*(1 + \varrho_3) = 0, \qquad (1 + \varrho_3)\,v^* = 0,$$

d. h. wir bekommen die Gleichungen (7) für den Fall $\mathfrak{p} = 0$. In dieser Weise können wir $u(\mathfrak{p})$ und $v(\mathfrak{p})$ mit Hilfe der unabhängigen Größen u_1^*, v_1^* und u_2^*, v_2^* darstellen, die jedoch weniger einfach als für $\mathfrak{p} = 0$ mit der Magnetisierung des Elektrons zusammenhängen.

Es sei nun für einen Augenblick $u(\mathfrak{p})$, $v(\mathfrak{p})$ eine Lösung, die einer der beiden unabhängigen Eigenfunktionen entspricht, wo also entweder u_1^*, v_1^* oder auch u_2^*, v_2^* allein von Null verschieden sind. Wir wollen diese Lösung so normieren, daß sie einem Elektron entspricht. Wenn $\varphi_0(\mathfrak{p})$ und $\psi_0(\mathfrak{p})$ die zugehörigen Eigenfunktionen im Koordinatenraum sind, so heißt dies bekanntlich bei kontinuierlichen Eigenwerten

$$\int \varphi_0(\mathfrak{p}')\,\psi_0(\mathfrak{p}'')\,d\tau = \delta(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}''), \tag{19}$$

wo $d\tau$ das Volumenelement bezeichnet und die Integration über den ganzen in Frage kommenden Raum zu erstrecken ist, während $\delta(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}'')$ die von Dirac eingeführte singuläre Funktion bedeutet, deren Integral hinsichtlich $\mathfrak{p}'$ über ein beliebiges Gebiet im Impulsraum, das die Stelle $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}''$ enthält, gleich Eins ist. Durch Einsetzung der Ausdrücke (4) für φ_0 und ψ_0 in (19) ergibt sich durch Vergleich mit dem Fourierschen Integraltheorem

$$u(\mathfrak{p})\,v(\mathfrak{p}) = (2\pi h)^{-3}. \tag{20}$$

Wir wollen schließlich die konjugiert komplexen Größen u_1^* und v_1^* bzw. u_2^* und v_2^*, die zu den beiden verschiedenen Eigenlösungen $u(\mathfrak{p})$, $v(\mathfrak{p})$ gehören, folgendermaßen durch reelle Größen darstellen:

$$\left.\begin{aligned} u_1^*(\mathfrak{p}) &= a_1 e^{i\delta_1(\mathfrak{p})}, & u_2^*(\mathfrak{p}) &= a_2 e^{i\delta_2(\mathfrak{p})}, \\ v_1^*(\mathfrak{p}) &= a_1 e^{-i\delta_1(\mathfrak{p})}, & v_2^*(\mathfrak{p}) &= a_2 e^{-i\delta_2(\mathfrak{p})}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Nach (20) gilt dann $a_1^2 = a_2^2 = (2\pi h)^{-3}$, so daß wir die Amplituden a_1 und a_2 so wählen können, daß sie von dem $\mathfrak{p}$-Wert unabhängig sind. Dagegen sind die Phasen $\delta_1(\mathfrak{p})$ und $\delta_2(\mathfrak{p})$ für jeden $\mathfrak{p}$-Wert vollständig frei wählbar.

§ 3. Lösung der Wellengleichung für ein Elektron in einem ebenen monochromatischen Strahlungsfeld. Wir wollen

hier ein Elektron betrachten, das mit einem ebenen monochromatischen Wellenzug beleuchtet wird. Diesen können wir mittels eines Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ von der folgenden Form beschreiben:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a}\, e^{i\nu\left(t-\frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{r})}{c}\right)} + \bar{\mathfrak{a}}\, e^{-i\nu\left(t-\frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{r})}{c}\right)}, \tag{22}$$

wo $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ zwei konstante, zueinander konjugiert komplexe Vektoren bezeichnen, die senkrecht auf dem Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ stehen, welcher die Fortpflanzungsrichtung der Wellen angibt. Der Ort, wo das Potential $\mathfrak{A}$ zur Zeit t gemessen wird, ist hierbei durch den von einem festen Punkte zu dem betreffenden Ort gezogenen Radiusvektor $\mathfrak{r}$ gekennzeichnet worden. Ferner bedeutet ν die mit 2π multiplizierte Schwingungszahl der Strahlung. Wir wollen unter Vernachlässigung höherer Potenzen als der ersten von $|\mathfrak{A}|$ Lösungen der zu F gehörigen Wellengleichungen von der Form

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{p}) &= \varphi_0(\mathfrak{p})\left\{1 + f(\mathfrak{p})\, e^{i\nu\left(t-\frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{r})}{c}\right)} + \bar{f}(\mathfrak{p})\, e^{-i\nu\left(t-\frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{r})}{c}\right)}\right\}, \\ \psi(\mathfrak{p}) &= \left\{1 + g(\mathfrak{p})\, e^{i\nu\left(t-\frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{r})}{c}\right)} + \bar{g}(\mathfrak{p})\, e^{-i\nu\left(t-\frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{r})}{c}\right)}\right\} \psi_0(\mathfrak{p}) \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

aufsuchen, wo $\varphi_0(\mathfrak{p})$, $\psi_0(\mathfrak{p})$ die in (4) gegebenen Eigenfunktionen des freien Elektrons sind, während $f, \bar{f}$ und $g, \bar{g}$ konstante vierzeilige Matrizen sind. Die allgemeine Lösung der Wellengleichungen ergibt sich in der betrachteten Näherung durch Superposition aller möglichen Lösungen von der Form (23). Zur Bestimmung der Größen $f, \bar{f}$, $g, \bar{g}$ ist es zweckmäßig, von den Gleichungen zweiter Ordnung auszugehen, die nach Dirac aus den zu F gehörigen Gleichungen erster Ordnung leicht abgeleitet werden können und die lauten:

$$\left.\begin{aligned} &\left\{\frac{h^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(-ih\nabla + \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)^2 + m^2c^2\right\}\psi + \frac{eh}{c}(\sigma\mathfrak{H})\,\psi \\ &\qquad + \frac{ieh}{c}\varrho_1(\sigma\mathfrak{E})\,\psi = 0, \\ &\left\{\frac{h^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(ih\nabla + \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)^2 + m^2c^2\right\}\varphi - \frac{eh}{c}\varphi(\sigma\mathfrak{H}) \\ &\qquad + \frac{ieh}{c}\varphi\varrho_1(\sigma\mathfrak{E}) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

wo ∇ den Vektoroperator mit den Komponenten $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ bedeutet, während $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die zu $\mathfrak{A}$ gehörige elektrische bzw. magne-

tische Feldstärke sind. Durch Einsetzen der Ausdrücke (23) in (24) findet man

$$\left.\begin{aligned} f(\mathfrak{p}) &= \frac{e}{2h\nu\left(E/c-(\mathfrak{n}\mathfrak{p})\right)}\{2(\mathfrak{a}\mathfrak{p})+h(\sigma\eta)-ih\varrho_1(\sigma\varepsilon)\},\\ \bar{f}(\mathfrak{p}) &= -\frac{e}{2h\nu\left(E/c-(\mathfrak{n}\mathfrak{p})\right)}\{2(\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{p})+h(\sigma\bar{\eta})-ih\varrho_1(\sigma\bar{\varepsilon})\},\\ g(\mathfrak{p}) &= -\frac{e}{2h\nu\left(E/c-(\mathfrak{n}\mathfrak{p})\right)}\{2(\mathfrak{a}\mathfrak{p})+h(\sigma\eta)+ih\varrho_1(\sigma\varepsilon),\\ \bar{g}(\mathfrak{p}) &= \frac{e}{2h\nu\left(E/c-(\mathfrak{n}\mathfrak{p})\right)}\{2(\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{p})+h(\sigma\bar{\eta})+ih(\sigma\bar{\varepsilon})\}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

wo ε und $\bar{\varepsilon}$ bzw. η und $\bar{\eta}$ folgendermaßen mit der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ bzw. der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ des Strahlungsfeldes zusammenhängen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \varepsilon e^{i\nu\left(t-\frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{r})}{c}\right)}+\bar{\varepsilon}e^{-i\nu\left(t-\frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{r})}{c}\right)},\\ \mathfrak{H} &= \eta e^{i\nu\left(t-\frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{r})}{c}\right)}+\bar{\eta}e^{-i\nu\left(t-\frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{r})}{c}\right)}; \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

da

$$\mathfrak{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t},\qquad \mathfrak{H}=\operatorname{rot}\mathfrak{A}.$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{i\nu}{c}\mathfrak{a}, & \bar{\varepsilon} &= \frac{i\nu}{c}\bar{\mathfrak{a}}.\\ \eta &= -\frac{i\nu}{c}[\mathfrak{n}\mathfrak{a}], & \bar{\eta} &= \frac{i\nu}{c}[\mathfrak{n}\bar{\mathfrak{a}}]. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

§ 4. **Berechnung des Streustrahlungsfeldes.** Die allgemeine Lösung der Wellengleichungen bei Gegenwart der einfallenden Strahlung können wir in der besprochenen Näherung folgendermaßen schreiben:

$$\Phi=\int\varphi(\mathfrak{p})\,d\mathfrak{p},\qquad \Psi=\int\psi(\mathfrak{p})\,d\mathfrak{p}, \tag{28}$$

wo $\varphi(\mathfrak{p})$ und $\psi(\mathfrak{p})$ die in (23) und (25) gegebene angenäherte Lösung der betreffenden Gleichungen bezeichnen — wobei vorerst keine Normierung vorausgesetzt werden soll —, während die Integration $\int d\mathfrak{p}$ als Abkürzung für die dreifache Integration $\int dp_1\int dp_2\int dp_3$ über alle vorkommenden Werte der Impulskomponenten p_1, p_2, p_3 zu betrachten ist. Die zu der allgemeinen Lösung gehörige elektrische Stromdichte ist gegeben durch

$$\mathfrak{Z}=ec\Phi\varrho_1\sigma\Psi=ec\int\int\varphi(\mathfrak{p})\,\varrho_1\sigma\psi(\mathfrak{p}')\,d\mathfrak{p}\,d\mathfrak{p}'. \tag{29}$$

In diesen Ausdruck wollen wir nun die Ausdrücke (23) für φ und ψ einführen und ihn in korrespondenzmäßiger Weise nach den verschiedenen

möglichen Strahlungsprozessen ordnen*. Unter Vernachlässigung von Größen der Größenordnung $|\mathfrak{a}|^2$ bekommen wir durch eine einfache Umformung:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_0 + ce\int\int d\mathfrak{p}\, d\mathfrak{p}' \{u(\mathfrak{p})[\varrho_1 \sigma g(\mathfrak{p}')] \\ + f(\mathfrak{p})\varrho_1\sigma]\, v(\mathfrak{p}')\, e^{\frac{i}{h}\left[(E+h\nu-E')t-\left(\mathfrak{p}+\mathfrak{n}\frac{h\nu}{c}-\mathfrak{p}'\right)\mathfrak{r}\right]} \\ + \text{konjugiert komplexes Glied}\},\end{aligned} \tag{30}$$

wo $\mathfrak{Z}_0$ die zu den ungestörten Eigenfunktionen φ_0, ψ_0 gehörige Stromdichte bezeichnet.

Es sei nun $\mathfrak{A}'$ das zu $\mathfrak{Z}$ gehörige Vektorpotential in einem Punkte, dessen Entfernung r sehr groß ist, verglichen mit den Dimensionen des Gebiets, das dem Elektron zur Verfügung steht, welche ihrerseits als groß zu betrachten sind im Vergleich mit den Wellenlängen des Lichtes und der de Brogliewellen. Diese Annahmen dürften eben den Beobachtungen des Comptoneffekts entsprechen. Es sei ferner $\mathfrak{n}'$ ein Einheitsvektor, der die Beobachtungsrichtung angibt, d. h. die Richtung eines Radiusvektors, der von einem Punkte des Gebiets des Elektrons nach dem Beobachtungspunkt gezogen wird. Es ergibt sich dann in wohlbekannter Weise**:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}' = \frac{e}{r}\int\int dp\, dp' \Big\{ e^{\frac{i}{h}(E+h\nu-E')\left(t-\frac{r}{c}\right)} \int d\mathfrak{r}\, u(\mathfrak{p})[\varrho_1\sigma g(\mathfrak{p}') \\ + f(\mathfrak{p})\varrho_1\sigma]\, v(\mathfrak{p}')\, e^{-\frac{i}{h}\left[\mathfrak{p}-\mathfrak{p}'+\mathfrak{n}\frac{h\nu}{c}-\mathfrak{n}'\frac{E+h\nu-E'}{c}\right]\mathfrak{r}} \\ + \text{konjugiert komplexes Glied}\Big\},\end{aligned} \tag{31}$$

wo $\int d\mathfrak{r}$ die Integration $\int dx_1 \int dx_2 \int dx_3$ über das ganze dem Elektron zur Verfügung stehende Gebiet andeutet. Dieses Integral können wir nach dem Vorgang von Gordon*** mit Hilfe des Fourierschen Theorems auswerten, indem wir anstatt $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ gewisse neue Vektoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ mit den Komponenten P_1, P_2, P_3, P_1', P_2', P_3' durch folgende Relationen einführen:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{p} + \mathfrak{n}\frac{h\nu}{c} - \mathfrak{n}'\frac{E+h\nu}{c}, \qquad \mathfrak{P}' = \mathfrak{p}' - \frac{E'}{c}\mathfrak{n}'. \tag{32}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}' = \frac{(2\pi h)^3}{r}\int \frac{d\mathfrak{P}}{\Delta\Delta'} \Big\{ e^{i\nu'\left(t-\frac{r}{c}\right)} u(\mathfrak{p})[\varrho_1\sigma g(\mathfrak{p} \\ + f(\mathfrak{p})\varrho_1\sigma]\, v(\mathfrak{p}') + \text{konjugiert komplexes Glied}\Big\},\end{aligned} \tag{33}$$

---

* Vgl. O. Klein, ZS. f. Phys. **41**, 407, 1927.

** Vgl. z. B. O. Klein, ebenda, l. c. S. 422.

*** W. Gordon, l. c. S. 129.

wo Δ bzw. Δ' die Funktionaldeterminanten der P_k nach den $\mathfrak{p}_k$ bzw. von den P_k' nach den $\mathfrak{p}_k'$ bedeuten, während $\mathfrak{p}'$ der spezielle Wert dieser Größe ist, der bei gegebenem $\mathfrak{p}$ aus der Relation $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$ folgt, d. h. aus

$$\mathfrak{p} + n\frac{h\nu}{c} = \mathfrak{p}' + n'\frac{h\nu'}{c}, \tag{34}$$

wo ν' gegeben ist durch die Relation

$$E + h\nu = E' + h\nu'. \tag{35}$$

Dies sind eben die wohlbekannten Comptonschen Relationen, die dem Zustand $\mathfrak{p}$ und dem einfallenden Lichtquant bei gegebener Beobachtungsrichtung einen bestimmten Endzustand zuordnen.

Aus (33) folgt nun nach Gordon* folgender Ausdruck für das zu einem Übergang von dem Zustand $\mathfrak{p}$ nach dem Zustand $\mathfrak{p}'$ gehörige Strahlungspotential $\mathfrak{A}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') = \frac{(2\pi h)^3}{r}\frac{1}{\sqrt{\Delta\Delta'}}\Big\{e^{i\nu'\left(t-\frac{r}{c}\right)}\, u(\mathfrak{p})\,[\varrho_1\sigma g(\mathfrak{p}') + f(\mathfrak{p})\,\varrho_1\sigma]v(\mathfrak{p}') + \text{konjugiert komplexes Glied}\Big\}, \tag{36}$$

wo $u(\mathfrak{p})$, $v(\mathfrak{p})$ und $u(\mathfrak{p}')$, $v(\mathfrak{p}')$ nunmehr als normiert zu betrachten sind.

Durch die Größe $\mathfrak{A}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ ist das Strahlungsfeld, das zu einem bestimmten Comptoneffekt gehört, vollständig bestimmt. Aus ihr folgt die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ durch die Relation

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') = \text{rot}\ \mathfrak{A}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'), \tag{37}$$

und aus dieser wiederum die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ durch die Beziehung

$$\mathfrak{E} = [\mathfrak{H}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'), \mathfrak{n}']. \tag{38}$$

Wir müssen nun die Größe $\mathfrak{A}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ oder besser $\mathfrak{H}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ auf eine Form bringen, die sich für eine numerische Berechnung der Intensität und Polarisation der Streustrahlung eignet. Zu diesem Zweck haben wir in (36) die durch (25) gegebenen Ausdrücke für $f, \bar{f}, g, \bar{g}$ einzusetzen und dann die von Dirac gegebenen Rechenregeln für die Matrizen ϱ und σ zu benutzen, um das Resultat in der Form von gewöhnlichen Zahlen zu erhalten. Hierbei werden wir der Einfachheit wegen annehmen, daß der mit $\mathfrak{p}$ bezeichnete Anfangszustand einem ruhenden Elektron entspricht. Die entsprechenden Werte für $\mathfrak{A}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ und $\mathfrak{H}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{H}_0$. Es soll also gelten

$$\mathfrak{p} = 0, \quad E = mc^2. \tag{39}$$

* W. Gordon, l. c. S. 130; siehe auch I. Waller, Phil. Mag. 4, 1228, 1927.

Mit Hilfe der Gleichungen (5) für u und v können wir alle in dem Ausdruck für $\mathfrak{A}_0$ vorkommenden Matrizen auf die Einheitsmatrix und den Matrixvektor σ reduzieren. Auf Grund der Relationen (2) ist es dann möglich, das Resultat als einen in den Komponenten von σ linearen Ausdruck darzustellen. Hierbei ist folgende von Dirac* herangezogene, mit der Quarternionenrechnung innig zusammenhängende Rechenregel von Nutzen, die man leicht mit Hilfe von (2) beweist:

$$(\mathfrak{B}\,\sigma)\,(\mathfrak{C}\,\sigma) = (\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}) + i\,(\sigma, [\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]), \tag{40}$$

sowie die aus ihr folgende

$$\sigma\,(\sigma\,\mathfrak{B}) = \mathfrak{B} + i\,[\sigma\,\mathfrak{B}],$$

wo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ zwei beliebige, mit σ vertauschbare Vektoren bedeuten.

Wie aus (5) hervorgeht, kommt in den Größen f und g außer der Matrix σ noch die Matrix $\varrho_1\,\sigma$ vor. In (36) werden diese Matrizen mit $\varrho_1\,\sigma$ multipliziert. Die resultierende Matrix ist nach (2) bzw. (40) eine lineare Kombination von der Einheitsmatrix, von ϱ_1, $\varrho_1\,\sigma$ und σ. Diese Matrix kommt dann zwischen $u\,(\mathfrak{p})$ und $v\,(\mathfrak{p}')$ zu stehen, und wir können zeigen, daß sowohl $u\,(\mathfrak{p})\,\varrho_1\,v\,(\mathfrak{p}')$ wie $u\,(\mathfrak{p})\,\varrho_1\,\sigma\,v\,(\mathfrak{p}')$ auf die Größen $u\,(\mathfrak{p})\,v\,(\mathfrak{p}')$ und $u\,(\mathfrak{p})\,\sigma\,v\,(\mathfrak{p}')$ zurückgeführt werden können. In der Tat folgt aus

$$u\,(\mathfrak{p})\,(1 + \varrho_3) = 0$$
$$\{E'/c + \varrho_1\,(\sigma\,\mathfrak{p}') + \varrho_3\,m\,c\}\;v\,(\mathfrak{p}'),$$

durch Multiplikation mit $\varrho_1\,v\,(\mathfrak{p}')$ bzw. $u\,(\mathfrak{p})\,\varrho_1$

$$u\,(\mathfrak{p})\,(\varrho_1 + i\,\varrho_2)\,v\,(\mathfrak{p}') = 0,$$
$$u\,(\mathfrak{p})\,\{E'/c\,\varrho_1 + (\sigma\,\mathfrak{p}') - i\,\varrho_2\,m\,c\}\;v\,(\mathfrak{p}') = 0,$$

oder durch Elimination von $v\,(\mathfrak{p})\,\varrho_2\,u\,(\mathfrak{p}')$

$$u\,(\mathfrak{p})\,\varrho_1\,v\,(\mathfrak{p}') = -\,\frac{u\,(\mathfrak{p})\,(\mathfrak{p}'\,\sigma)\,v\,(\mathfrak{p}')}{E'/c + m\,c}. \tag{41}$$

In ähnlicher Weise findet man

$$u\,(\mathfrak{p})\,\varrho_1\,\sigma\,u\,(\mathfrak{p}') = -\,\frac{u\,(\mathfrak{p})\,\sigma\,(\sigma\,\mathfrak{p}')\,v\,(\mathfrak{p}')}{E'/c + m\,c}, \tag{42}$$

eine Beziehung, die nach (40) auf einen in σ linearen Ausdruck reduziert werden kann. Wir wollen folgende Abkürzungen einführen:

$$\left.\begin{aligned} u\,(\mathfrak{p})\,\sigma\,v\,(\mathfrak{p}') &= \mathfrak{s}, \quad u\,(\mathfrak{p}')\,\sigma\,v\,(\mathfrak{p}) = \bar{\mathfrak{s}}, \\ u\,(\mathfrak{p})\,v\,(\mathfrak{p}') &= d, \quad u\,(\mathfrak{p}')\,v\,(\mathfrak{p}) = \bar{d}, \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

wo $\mathfrak{s}$ und $\bar{\mathfrak{s}}$ zwei zueinander konjugiert komplexe Vektoren bezeichnen, während d und $\bar{d}$ zwei konjugiert komplexe Skalare sind. Mit Hilfe der

* P. A. M. Dirac, l. c. B., S. 618.

Beziehungen (41) und (42) bekommen wir nun für das Potential $\mathfrak{A}_0$ einen in $\mathfrak{s}$, $\bar{\mathfrak{s}}$ und d, $\bar{d}$ linearen Ausdruck. Wir wollen diesen hier nicht hinschreiben, sondern uns mit der nach (27) zu berechnenden magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}_0$ begnügen, die sowohl für die Polarisation wie für die Intensität der Streustrahlung maßgebend ist. Es folgt nach einiger Rechnung, wobei die Relationen (34) und (35) herangezogen werden:

$$\mathfrak{H}_0 = \frac{(2\pi h)^3 e^2 \nu'}{2 m c^2 r \left(\nu - \nu' + \frac{2 m c^2}{h}\right)} \sqrt{\frac{E'' \nu'}{m c^2 \nu}} \left\{ d \left(\frac{1}{\nu} \mathfrak{n}' \varepsilon \right) (\nu' - \nu) [\mathfrak{n}' \mathfrak{n}] \right.$$

$$- \nu' \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu'}\right)^2 \frac{m c^2}{h} [\mathfrak{n}' \varepsilon] \Big) - i \left[\left(\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu}\right) \Big((\mathfrak{s}, \mathfrak{n}\nu - \mathfrak{n}'\nu') \big((\mathfrak{n}' \varepsilon) \mathfrak{n} \right.$$

$$- (\mathfrak{n}\mathfrak{n}') \varepsilon \big) + \Big(\nu - \nu' + \frac{2 m c^2}{h} \Big) \big((\mathfrak{s}\mathfrak{n}') \varepsilon - (\mathfrak{n}' \varepsilon) \mathfrak{s} \big) \Big)$$

$$+ \frac{2}{\nu} (\varepsilon \mathfrak{n}') \big((\mathfrak{n}' \mathfrak{s}) (\mathfrak{n}\nu - \mathfrak{n}'\nu') + (\nu' - (\mathfrak{n}\mathfrak{n}')\nu) \mathfrak{s} \big)$$

$$\left. - \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu'}\right) \Big(\big(\mathfrak{n} [\varepsilon \mathfrak{s}] \big) \nu [\mathfrak{n}' \mathfrak{n}] + \nu' \big(\mathfrak{n}' [\mathfrak{n} \varepsilon] \big) [\mathfrak{n}' \mathfrak{s}] \Big) \right] \Big\} e^{i\nu' \left(t - \frac{r}{c}\right)}$$

$$+ \text{konjugiert komplexes Glied,} \qquad (44)$$

wo wir die aus (32) mit Hilfe von (34) folgenden Werte von Δ und Δ' benutzt haben†, nämlich

$$\Delta = 1 - \frac{c}{E} (\mathfrak{n}' \mathfrak{p}) = 1, \quad \Delta' = 1 - \frac{c}{E''} (\mathfrak{n}' \mathfrak{p}') = \frac{m c^2 \nu}{E'' \nu'}. \qquad (45)$$

Wir wollen hier nicht auf die nähere Diskussion dieses Ausdrucks eingehen, sondern uns damit begnügen, die Intensität der in verschiedenen Richtungen gestreuten Strahlung zu untersuchen††. Zu diesem Zwecke bilden wir die Größe $\mathfrak{H}_0^2$. Hierbei wollen wir als Anfangszustand die eine der auf S. 856 erwähnten zu $\mathfrak{p} = 0$ gehörigen Eigenfunktionen wählen, d. h. für diesen Zustand seien entweder u_1, v_1 allein, oder u_2, v_2 allein von Null verschieden und nach (20) normiert. Wir betrachten also die Streustrahlung eines Elektrons, das von einem nach der x_3-Achse gerichteten Felde magnetisiert worden ist. Für den Endzustand haben wir hierbei sowohl u_1^*, v_1^* wie u_2^*, v_2^* von Null verschieden und normiert anzunehmen. Dies entspricht nach der allgemeinen wellenmechanischen Methode zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten der Möglich-

†) W. Gordon, l. c. S. 130.

††) Vgl. die nachfolgende Arbeit von Y. Nishina, wo die Frage der Polarisation der Streustrahlung diskutiert wird.

keit von sowohl solchen Übergängen, wo das magnetische Moment des Elektrons ungeändert bleibt, wie solchen, wo es seine Richtung ändert.

Bei der Bildung von $\mathfrak{H}_0^2$ bekommen wir nun einen bilinearen Ausdruck in den Größen d, $\mathfrak{s}$ und $\overline{d}$, $\overline{\mathfrak{s}}$, den wir über die Phasen δ_1 und δ_2 des Anfangs- und Endzustandes zu mitteln haben. Es handelt sich also um eine Summe von Gliedern von der Form $u(\mathfrak{p}')\,\alpha\,v(\mathfrak{p}).\,u(\mathfrak{p})\,\beta\,v(\mathfrak{p}')$, die wir nach den Phasen zu mitteln haben, wo α und β zwei Matrizen sind. Nehmen wir zuerst an, daß $u_1(\mathfrak{p})$ und $v_1(\mathfrak{p})$ von Null verschieden sind, so können wir hierfür schreiben

$$\sum_{i,k} u_i(\mathfrak{p}')\,\alpha_{i1}\,v_1(\mathfrak{p})\,u_1(\mathfrak{p})\,\beta_{1k}\,v_k(\mathfrak{p}').$$

Dies aber ist gleich $u_1(\mathfrak{p})\,v_1(\mathfrak{p}).\,u(\mathfrak{p}')\,\alpha\,\mu\,\beta\,v(\mathfrak{p}')$, wo μ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

vorstellt.

Wir können μ nach (8) und (9) folgendermaßen mit Hilfe von ϱ_3 und σ_3 darstellen:

$$\mu = \left(\frac{1+\sigma_3}{2}\right)\left(\frac{1-\varrho_3}{2}\right), \tag{46}$$

und es gilt also

$$u(\mathfrak{p}')\,\alpha\,v(\mathfrak{p}).\,u(\mathfrak{p})\,\beta\,v(\mathfrak{p}') = (2\pi h)^{-3}\,u(\mathfrak{p}')\,\alpha\,\mu\,\beta\,v(\mathfrak{p}'), \tag{47}$$

wo wir nach (20) $u_1 v_1 = (2\pi h)^{-3}$ gesetzt haben. Falls wir als Anfangszustand den zu u_2, v_2 gehörigen Zustand gewählt hätten, so wäre für μ die Größe $\left(\frac{1-\sigma_3}{2}\right)\left(\frac{1-\varrho_3}{2}\right)$ zu nehmen.

Wir wollen nun annehmen, daß $\alpha = (\mathfrak{C}\,\sigma)$ und $\beta = (\mathfrak{B}\,\sigma)$ ist, wo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ mit σ vertauschbare Vektoren sind. Es ist dann $u(\mathfrak{p}')\,\alpha\,v(\mathfrak{p}) = (\mathfrak{C}\,\overline{\mathfrak{s}})$ und $u(\mathfrak{p})\,\beta\,v(\mathfrak{p}') = (\mathfrak{B}\,\mathfrak{s})$, und wir haben

$$(\mathfrak{B}\,\mathfrak{s})\,(\mathfrak{C}\,\overline{\mathfrak{s}}) = (2\pi h)^{-3}\,u(\mathfrak{p}')\,(\mathfrak{C}\,\sigma)\,\mu\,(\mathfrak{B}\,\sigma)\,v(\mathfrak{p}').$$

Es gilt nun

$$(\mathfrak{C}\,\sigma)\left(\frac{1+\sigma_3}{2}\right) = \left(\frac{1-\sigma_3}{2}\right)(\mathfrak{C}\,\sigma) + C_3,$$

so daß

$$(\mathfrak{B}\,\mathfrak{s})\,(\mathfrak{C}\,\overline{\mathfrak{s}}) = (2\pi h)^{-3}\,u(\mathfrak{p}')\left(\frac{1-\varrho_3}{2}\right)\left\{\left(\frac{1-\sigma_3}{2}\right)(\mathfrak{C}\,\sigma)\,(\mathfrak{B}\,\sigma) + C_3\,(\mathfrak{B}\,\sigma)\right\}v(\mathfrak{p}'). \tag{48}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung stehen zwischen $u(\mathfrak{p}')$ und $v(\mathfrak{p}')$ Matrizen, die entweder von der Form $\frac{1-\varrho_3}{2}$ oder von der Form $\frac{1-\varrho_3}{2}\,\sigma$

sind. Wir können diese leicht in folgender Weise umformen. Aus den Gleichungen

$$u(\mathfrak{p}')\,\{E'/c + \varrho_1(\sigma\mathfrak{p}') + \varrho_3 mc\} = 0, \quad \{E'/c + \varrho_1(\sigma\mathfrak{p}') + \varrho_3 mc\}\,v(\mathfrak{p}') = 0$$

folgt ähnlich wie auf S. 863

$$u(\mathfrak{p}')\left(\frac{1-\varrho_3}{2}\right)v(\mathfrak{p}') = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{mc^2}{E'}\right)u(\mathfrak{p}')\,v(\mathfrak{p}'). \tag{49}$$

Ferner folgt

$$u(\mathfrak{p}')\left(\frac{1-\varrho_3}{2}\right)\sigma v(\mathfrak{p}') = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{E'}{mc^2}\right)u(\mathfrak{p}')\,\sigma v(\mathfrak{p}') - \frac{\mathfrak{p}'}{2mE'}\,u(\mathfrak{p}')\,(\sigma\mathfrak{p}')\,v(\mathfrak{p}'), \tag{50}$$

so daß die Größen $u(\mathfrak{p}')\left(\frac{1-\varrho_3}{2}\right)v(\mathfrak{p}')$ und $u(\mathfrak{p}')\left(\frac{1-\varrho_3}{2}\right)\sigma v(\mathfrak{p}')$ durch die Größen $u(\mathfrak{p}')\,v(\mathfrak{p}')$ und $u(\mathfrak{p}')\,\sigma v(\mathfrak{p}')$ ausgedrückt werden können. Da nun der durch $\mathfrak{p}'$ gekennzeichnete Endzustand die beiden unabhängigen Lösungen in gleicher Stärke enthalten soll, so ist es von vornherein klar, daß der Mittelwert von $u(\mathfrak{p}')\,\sigma v(\mathfrak{p}')$ nach den Phasen verschwinden muß. Dies folgt auch in der Tat aus der Darstellung, (18) und (21), der Größen $u(\mathfrak{p}')$, $v(\mathfrak{p}')$. Wir wollen also annehmen, daß

$$\overline{u(\mathfrak{p}')\,\sigma v(\mathfrak{p}')} = 0, \tag{51}$$

wo der Strich die Mittelwertbildung nach den Phasen $\delta_1(\mathfrak{p}')$ und $\delta_2(\mathfrak{p}')$ andeutet. Diese Annahme genügt nun, um alle vorkommenden Mittelwerte zu berechnen. Wir müssen zuerst den Wert von $u(\mathfrak{p}')\,v(\mathfrak{p}')$ haben. Es folgt aus (18) und (20)

$$u(\mathfrak{p}')\,v(\mathfrak{p}') = u^*(\mathfrak{p}')\,v^*(\mathfrak{p}') = 2\,(2\pi h)^{-3}. \tag{52}$$

Ferner folgt aus (48)

$$\overline{(\mathfrak{B}\mathfrak{s})\,(\mathfrak{C}\bar{\mathfrak{s}})} = \frac{1}{2}\,(2\pi h)^{-3}\,u(\mathfrak{p}')\left(\frac{1-\varrho_3}{2}\right)v(\mathfrak{p}')\,\{(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) + i\,[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]_3\}, \tag{53}$$

oder nach (49) und (52), wenn wir setzen

$$\gamma = \frac{1}{2}\,(2\pi h)^{-6}\left(1 + \frac{mc^2}{E'}\right), \tag{54}$$

$$\overline{(\mathfrak{B}\mathfrak{s})\,(\mathfrak{C}\bar{\mathfrak{s}})} = \gamma\,\{(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) + i\,[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]_3\}. \tag{55}$$

Wir können uns leicht von der speziellen Koordinatenwahl befreien. Wenn $\mathfrak{l}$ ein Einheitsvektor in der Richtung des magnetischen Moments

des magnetisierten Elektrons im Anfangszustand ist, so gilt offenbar allgemein

$$\left.\begin{aligned} \overline{(\mathfrak{B}\,\mathfrak{s})\,(\mathfrak{C}\,\mathfrak{s})} &= \gamma\,\{(\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}) + i\,(\mathfrak{l}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}])\} \\ \text{und ebenso} \\ \overline{[\mathfrak{B}\,\mathfrak{s}]\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{s}]} &= \gamma\,\{2\,(\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}) + i\,(\mathfrak{l}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}])\}, \\ \text{weiter} \\ \overline{(\mathfrak{B}\,\mathfrak{s})\,\bar{d}} &= \overline{d\,(\mathfrak{B}\,\bar{\mathfrak{s}})} = \gamma\,(\mathfrak{l}\,\mathfrak{B}) \end{aligned}\right| \qquad (56)$$

und schließlich

$$d\,\bar{d} = \gamma. \qquad (57)$$

Bei der Berechnung von $\overline{\mathfrak{H}_0^2}$ wollen wir nun der Einfachheit wegen annehmen, daß das einfallende Licht linear polarisiert ist, so daß $\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ist. Es ergibt sich dann nach einiger Rechnung

$$\overline{\mathfrak{H}_0^2} = \frac{e^4}{m^2 c^4 r^2}\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^3 \left\{\left(\frac{\nu}{\nu'} + \frac{\nu'}{\nu}\right)\boldsymbol{\varepsilon}^2 - 2\,(\mathfrak{n}'\,\boldsymbol{\varepsilon})^2\right\} \qquad (58)$$

oder, wenn wir den Winkel zwischen der Beobachtungsrichtung und der Wellennormale des einfallenden Lichtes mit Θ bezeichnen und den Winkel zwischen der Beobachtungsrichtung und der elektrischen Kraft der einfallenden Welle mit ϑ,

$$I = I_0\,\frac{e^4}{m^2 c^4 r^2}\,\frac{\sin^2\vartheta}{\big(1+\alpha(1-\cos\Theta)\big)^3}\left(1 + \alpha^2\,\frac{(1-\cos\Theta)^2}{2\sin^2\vartheta\,\big(1+\alpha(1-\cos\Theta)\big)}\right), \qquad (59)$$

wo $\alpha = \dfrac{h\nu}{m c^2}$, während I_0 die Intensität der einfallenden Strahlung, I die Intensität der Streustrahlung bezeichnet, von denen erstere in demselben Verhältnis zu $2\,\boldsymbol{\varepsilon}^2$ steht wie letztere zu $\overline{\mathfrak{H}_0^2}$. Wenn die einfallende Strahlung unpolarisiert ist, so müssen wir noch über alle bei gegebener Richtung der einfallenden Strahlung möglichen Richtungen von $\boldsymbol{\varepsilon}$ mitteln. Der Mittelwert von $\sin^2\vartheta$ wird hierbei gleich $\frac{1}{2}(1+\cos^2\Theta)$, so daß

$$\bar{I} = I_0\,\frac{e^4}{2\,m^2 c^4 r^2}\,\frac{1+\cos^2\Theta}{\big(1+\alpha(1-\cos\Theta)\big)^3}\left(1 + \alpha^2\,\frac{(1-\cos\Theta)^2}{(1+\cos^2\Theta)\big(1+\alpha(1-\cos\Theta)\big)}\right). \qquad (60)$$

Wenn wir die letzten Formeln, (58) bis (60), betrachten, so sehen wir, daß in ihnen der Vektor $\mathfrak{l}$ nicht vorkommt. Die Resultate sind also davon unabhängig, ob die streuenden Elektronen vorher magnetisiert worden sind oder nicht. Wie eine nähere Betrachtung des Ausdrucks (44) lehrt, gilt dies jedoch im allgemeinen nur, wenn die primäre Strahlung linear polarisiert ist. Die Streuung bei elliptisch polarisiertem einfallenden Licht ist daher nicht gleich der Summe der zu den einzelnen polarisierten

Komponenten gehörigen Streuungen, ein Umstand, der mit der eigentümlichen Polarisation der Streustrahlung nahe zusammenhängt*.

Ferner sehen wir, daß die Ausdrücke (59) und (60) sich nur durch den Faktor

$$\left(1+\alpha^2\frac{(1-\cos\Theta)^2}{2\sin^2\vartheta\,(1+\alpha(1-\cos\Theta))}\right) \text{ bzw. } \left(1+\alpha^2\frac{(1-\cos\Theta)^2}{(1+\cos^2\Theta)\,(1+\alpha(1-\cos\Theta))}\right)$$

von den entsprechenden Formeln der Dirac-Gordonschen Theorie unterscheiden, d. h. die Abweichungen der beiden Theorien sind von der Größenordnung $\left(\frac{h\nu}{mc^2}\right)^2$, während die Abweichungen der früheren Ausdrücke von der klassischen, von J. J. Thomson entwickelten Theorie der Streustrahlung von der Größenordnung $\frac{h\nu}{mc^2}$ sind**.

Aus (60) können wir leicht einen Ausdruck für den Streuungskoeffizienten einer Substanz ableiten, die in der Volumeneinheit N Elektronen enthält. Multiplizieren wir nämlich den Ausdruck (60) mit $\frac{d\Omega}{h\nu'}$, so bekommen wir die Anzahl von Quanten, die in einem Raumwinkel $d\Omega$ in der Richtung Θ von einem Elektron gestreut werden. Zu jedem gestreuten Lichtquant gehört aber ein einfallendes Lichtquant von der Größe $h\nu$, so daß der Energieverlust der einfallenden Strahlung durch Streuungen in dieser Richtung an einem Elektron gleich $\frac{\nu}{\nu'}\,d\Omega$ mal dem Ausdruck (60) ist. Durch Integration über alle Richtungen und Multiplikation mit der Anzahl von Elektronen in der Volumeneinheit bekommen wir also für den Streuungskoeffizienten

$$S=\frac{2\pi Ne^4}{m^2c^4}\left\{\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\left[\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha}-\frac{1}{\alpha}\log(1+2\alpha)\right]+\frac{1}{2\alpha}\log(1+2\alpha)-\frac{1+3\alpha}{(1+2\alpha)^2}\right\}, \tag{61}$$

der sich von dem entsprechenden von Dirac gegebenen Ausdruck wieder durch Größen von der Größenordnung α^2 unterscheidet.

Kopenhagen, Universitetets Institut for teoretisk Fysik, Okt. 1928.

---

* Vgl. Y. Nishina, l. c., wo dieser Punkt näher untersucht worden ist.

** Vgl. Nature **122**, 398, September 1928, wo die Beziehung unserer Resultate zu den Experimenten kurz berührt wurde.

Die Polarisation der Comptonstreuung nach der Diracschen Theorie des Elektrons.

Von **Y. Nishina** in Kopenhagen.

(Eingegangen am 30. Oktober 1928.)

In Fortsetzung der voranstehenden Arbeit von Klein und dem Verfasser* ist der Polarisationszustand des Lichtes, das von einem freien ruhenden Elektron gestreut wird, nach der Diracschen Theorie des Elektrons näher untersucht worden. Es zeigt sich, daß für eine gegebene Anfangsrichtung des magnetischen Moments des Elektrons die gestreuten Strahlen bei linear polarisiertem einfallenden Lichte im allgemeinen durch zwei inkohärente elliptisch polarisierte Strahlungen dargestellt werden können, was mit den Übergängen zu den beiden nach der Theorie des Magnetelektrons möglichen Endzuständen zusammenhängt. Es wird ein Ausdruck für die Intensität des zweimal rechtwinklig gestreuten Lichtes gegeben, der einen direkten Vergleich mit den experimentellen Untersuchungen des Polarisationszustandes der Comptonstreuung gestattet.

Nach der Theorie von Dirac** und Gordon*** ist der Polarisationszustand des Lichtes, das durch freie Elektronen gestreut wird, genau derselbe, wie er nach der klassischen Theorie zu erwarten wäre. Dieses Resultat scheint in Übereinstimmung zu sein mit den experimentellen Ergebnissen von Kallmann und Mark**** und Lukirsky†. Im Gegensatz zu diesem Resultat ergibt die hier entwickelte Theorie eine Polarisation, die bei kurzwelliger Strahlung beträchtlich von der klassisch zu erwartenden Polarisation abweicht.

1. Der Feldausdruck der Streustrahlung. Der Feldausdruck (44), I der Streustrahlung kann nach einer Umformung folgendermaßen geschrieben werden:

$$\mathfrak{H}_0 = \frac{(2\pi h)^3 e^2 \nu'}{2 m c^2 \varkappa r} \sqrt{\frac{E'\nu'}{mc^2\nu}} (T d - i L) e^{i\nu'\left(t - \frac{r}{c}\right)} + \text{konjugiert komplexes Glied}, \quad (1)$$

* ZS. f. Phys. **52**, 853, 1929 wird im folgenden als I zitiert.
** Proc. Roy. Soc. (A) **111**, 405, 1926.
*** ZS. f. Phys. **40**, 117, 1927.
**** Ebenda **36**, 120, 1926.
† Nature **122**, 275, 1928.

wobei $$T = \frac{1}{\nu}(\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon})(\nu - \nu')[\mathfrak{n}\mathfrak{n}'] - \nu'\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu'}\right)^2 \frac{mc^2}{h}[\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon}]$$

$$L = \mathfrak{n}\left\{(\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon})\left[\beta(\mathfrak{n}\mathfrak{s}) + \frac{2+\beta}{1+\beta}(\mathfrak{n}'\mathfrak{s})\right]\right\} - \mathfrak{n}'\frac{2}{1+\beta}(\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon})(\mathfrak{n}'\mathfrak{s})$$

$$+ \boldsymbol{\varepsilon}\left\{-\beta(\mathfrak{n}\mathfrak{n}')(\mathfrak{n}\mathfrak{s}) + \left(\beta + \frac{2+\beta}{1+\beta}[1 - (\mathfrak{n}\mathfrak{n}')]\right)(\mathfrak{n}'\mathfrak{s})\right\}$$

$$- \mathfrak{s}(\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon})\frac{\beta(2+\beta)}{1+\beta} + [\mathfrak{n}\mathfrak{n}'](2+\beta)(\mathfrak{n}[\boldsymbol{\varepsilon}\mathfrak{s}]) - [\mathfrak{n}'\mathfrak{s}]\frac{2+\beta}{1+\beta}(\mathfrak{n}'[\mathfrak{n}\boldsymbol{\varepsilon}]),$$

wo

$$\boldsymbol{\varkappa} = \nu - \nu' + \frac{2mc^2}{h} \qquad \text{und} \qquad \beta = \alpha(1 - (\mathfrak{n}\mathfrak{n}')),$$

während sonst die Bezeichnungen dieselben wie in I sind. Wir wollen als Anfangszustand ein nach der z-Richtung magnetisiertes ruhendes Elektron annehmen. Wir können dann für den Anfangszustand setzen:

$$|u_1| = |v_1| = (2\pi h)^{-3/2}, \qquad u_2 = v_2 = 0.$$

Für den Endzustand wollen wir als unabhängige Eigenfunktionen diejenigen wählen, wo entweder u_1, v_1 oder u_2, v_2 gleich Null sind. Die Berechtigung hiervon folgt daraus, daß durch Mittelung über die entsprechenden Phasen die in I gegebenen Relationen für in d, $\mathfrak{s}$ und $\bar{d}$, $\bar{\mathfrak{s}}$ bilineare Ausdrücke erhalten werden. Es ergibt sich durch diese Annahme

$$d = \mathfrak{s}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi h)^3}\sqrt{1 + \frac{mc^2}{E'}}\, e^{i\nu'\delta_1},$$

$$\mathfrak{s}_1 = i\mathfrak{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi h)^3}\sqrt{1 + \frac{mc^2}{E'}}\, e^{i\nu'\delta_2},$$

wo die Phasen δ_1 und δ_2 als vollkommen willkürlich zu betrachten sind. Wie wir sehen, zerfällt der Ausdruck (1) in zwei Glieder, denen verschiedene Phasen δ_1 und δ_2 zukommen, deren Auftreten von dem Umstand herrührt, daß der Endzustand entartet und eigentlich doppelt ist, entsprechend den zwei Einstellungsmöglichkeiten des magnetischen Moments des Elektrons in einem äußeren Magnetfeld.

Nunmehr zerlegen wir $\mathfrak{s}$ in L in drei Komponenten, indem wir die folgenden Vektoren einführen:

$$\mathfrak{x}(1,0,0), \qquad \mathfrak{y}(0,1,0), \qquad \mathfrak{z}(0,0,1),$$

$$\boldsymbol{\xi}(0, \mathfrak{n}'_3, -\mathfrak{n}'_2,), \qquad \boldsymbol{\eta}(-\mathfrak{n}'_3, 0, \mathfrak{n}'_1), \qquad \boldsymbol{\zeta}(\mathfrak{n}'_2, -\mathfrak{n}'_1, 0),$$

wo die in den Parenthesen stehenden Größen die Komponenten angeben. Dann wird

$$\mathfrak{H}_0 = \frac{(2\pi h)^3 e^2 \nu'}{2 m c^2 \varkappa r} \sqrt{\frac{E' \nu'}{m c^2 \nu}} \{d(\mathfrak{A} - i\mathfrak{B}) - \mathfrak{s}_1 (\mathfrak{D} + i\mathfrak{C})\} e^{i\nu'\left(t - \frac{r}{c}\right)}$$
$$+ \text{konjugiert komplexes Glied}$$
$$= \frac{e^2}{2\sqrt{2}\, m c^2 r} \sqrt{\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^3 \frac{\alpha\nu}{\varkappa}} \Big\{(\mathfrak{A} - i\mathfrak{B})\, e^{i\nu'\left(t - \frac{r}{c} + \vartheta_1\right)}$$
$$- (\mathfrak{D} + i\mathfrak{C})\, e^{i\nu'\left(t - \frac{r}{c} + \vartheta_2\right)}\Big\} + \text{konjugiert komplexes Glied.} \qquad (2)$$

wobei

$$\mathfrak{A} = \frac{\beta}{1+\beta}(\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon})[\mathfrak{n}\mathfrak{n}'] - \frac{(2+\beta)^2}{\alpha(1+\beta)}[\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon}],$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{n}_3 \{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon})\beta - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathfrak{n}\mathfrak{n}')\beta\} + \mathfrak{n}'_3 \Big\{\mathfrak{n}\frac{2+\beta}{1+\beta}(\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathfrak{n}'\frac{2(\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon})}{1+\beta}$$
$$+ \boldsymbol{\varepsilon}\left(\beta + \frac{2+\beta}{1+\beta}[1 - (\mathfrak{n}\mathfrak{n}')]\right)\Big\} + [\mathfrak{n}\boldsymbol{\varepsilon}]_3 [\mathfrak{n}\mathfrak{n}'](2+\beta)$$
$$- (\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon})\frac{\beta(2+\beta)}{1+\beta}\mathfrak{z} + \frac{2+\beta}{1+\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}[\mathfrak{n}\mathfrak{n}'])\boldsymbol{\zeta}.$$

$\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{D}$ folgen aus $\mathfrak{B}$ durch die folgenden zyklischen Vertauschungen:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{B} & \cdots & 3 & \cdots & \mathfrak{z} & \cdots & \boldsymbol{\zeta} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathfrak{C} & \cdots & 1 & \cdots & \mathfrak{x} & \cdots & \boldsymbol{\xi} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathfrak{D} & \cdots & 2 & \cdots & \mathfrak{y} & \cdots & \boldsymbol{\eta}
\end{array}$$

Für das elektrische Feld hat man dann

$$\mathfrak{E}_0 = [\mathfrak{H}_0, \mathfrak{n}'] = \frac{e^2}{2\sqrt{2}\, m c^2 r} \sqrt{\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^3 \frac{\alpha\nu}{\varkappa}} \Big\{(\mathfrak{A}' - i\mathfrak{B}')\, e^{i\nu'\left(t - \frac{r}{c} + \vartheta_1\right)}$$
$$- (\mathfrak{D}' + i\mathfrak{C}')\, e^{i\nu'\left(t - \frac{r}{c} + \vartheta_2\right)}\Big\} + \text{konjugiert komplexes Glied,} \qquad (3)$$

wobei

$$\mathfrak{A}' = -\frac{\beta}{1+\beta}(\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon})\mathfrak{n} - \frac{(2+\beta)^2}{\alpha(1+\beta)}\boldsymbol{\varepsilon} + (\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon})\Big\{\frac{(2+\beta)^2}{\alpha(1+\beta)} + \frac{\beta(\mathfrak{n}\mathfrak{n}')}{1+\beta}\Big\}\mathfrak{n}',$$

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{n}_3 \{\beta(\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon})[\mathfrak{n}\mathfrak{n}'] + \beta(\mathfrak{n}\mathfrak{n}')[\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon}]\}$$
$$+ \mathfrak{n}'_3 \Big\{\frac{2+\beta}{1+\beta}(\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon})[\mathfrak{n}\mathfrak{n}'] - \Big(\beta + \frac{2+\beta}{1+\beta}[1 - (\mathfrak{n}\mathfrak{n}')]\Big)[\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon}]\Big\}$$
$$- [\mathfrak{n}\boldsymbol{\varepsilon}]_3 (2+\beta)\mathfrak{n} + [\mathfrak{n}\boldsymbol{\varepsilon}]_3 (2+\beta)(\mathfrak{n}\mathfrak{n}')\mathfrak{n}'$$
$$+ (\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon})\frac{\beta(2+\beta)}{1+\beta}[\mathfrak{n}'\mathfrak{z}] - \frac{2+\beta}{1+\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}[\mathfrak{n}\mathfrak{n}'])[\mathfrak{n}'\boldsymbol{\zeta}].$$

$\mathfrak{C}'$ bzw. $\mathfrak{D}'$ entstehen aus $\mathfrak{B}'$ durch die oben genannten zyklischen Vertauschungen.

Für den allgemeinen Fall, daß das magnetische Moment des Elektrons anstatt in der z-Richtung in einer Richtung $\mathfrak{l}$ liegt, sieht man leicht, daß die entsprechenden Ausdrücke sich folgendermaßen schreiben lassen. $\mathfrak{A}'$ bleibt unverändert, während

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}' = {} & (\mathfrak{n}\mathfrak{l})\{\beta(\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon})[\mathfrak{n}\mathfrak{n}'] + \beta(\mathfrak{n}\mathfrak{n}')[\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon}]\} \\ & + (\mathfrak{n}'\mathfrak{l})\left\{\frac{2+\beta}{1+\beta}(\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon})[\mathfrak{n}\mathfrak{n}'] - \left(\beta + \frac{2+\beta}{1+\beta}[1-(\mathfrak{n}\mathfrak{n}')]\right)[\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon}]\right\} \qquad (4) \\ & - ([\mathfrak{n}\boldsymbol{\varepsilon}]\mathfrak{l})(2+\beta)\mathfrak{n} + ([\mathfrak{n}\boldsymbol{\varepsilon}]\mathfrak{l})(2+\beta)(\mathfrak{n}\mathfrak{n}')\mathfrak{n}' \\ & + (\mathfrak{n}'\boldsymbol{\varepsilon})\frac{\beta(2+\beta)}{1+\beta}[\mathfrak{n}'\mathfrak{l}] - \frac{2+\beta}{1+\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}[\mathfrak{n}\mathfrak{n}'])[\mathfrak{n}'\boldsymbol{\zeta}].\end{aligned}$$

$\mathfrak{C}'$ bzw. $\mathfrak{D}'$ entstehen aus $\mathfrak{B}'$ durch folgende zyklische Vertauschungen:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{B}' & \ldots & \mathfrak{l} & \ldots & \boldsymbol{\zeta} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{C}' & \ldots & \mathfrak{j} & \ldots & \boldsymbol{\xi} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{D}' & \ldots & \mathfrak{k} & \ldots & \boldsymbol{\eta} \end{array}$$

wobei $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ Einheitsvektoren sind, die den Bedingungen $[\mathfrak{j}\mathfrak{k}] = \mathfrak{l}$ und $[\mathfrak{k}\mathfrak{l}] = \mathfrak{j}$ genügen, während $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$ die folgenden Vektoren bezeichnen:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}\,&[\mathfrak{k}_1(\mathfrak{n}'\mathfrak{l}) - \mathfrak{l}_1(\mathfrak{n}'\mathfrak{k}),\ \mathfrak{k}_2(\mathfrak{n}'\mathfrak{l}) - \mathfrak{l}_2(\mathfrak{n}'\mathfrak{k}),\ \mathfrak{k}_3(\mathfrak{n}'\mathfrak{l}) - \mathfrak{l}_3(\mathfrak{n}'\mathfrak{k})], \\ \boldsymbol{\eta}\,&[\mathfrak{l}_1(\mathfrak{n}'\mathfrak{j}) - \mathfrak{j}_1(\mathfrak{n}'\mathfrak{l}),\ \mathfrak{l}_2(\mathfrak{n}'\mathfrak{j}) - \mathfrak{j}_2(\mathfrak{n}'\mathfrak{l}),\ \mathfrak{l}_3(\mathfrak{n}'\mathfrak{j}) - \mathfrak{j}_3(\mathfrak{n}'\mathfrak{l})], \\ \boldsymbol{\zeta}\,&[\mathfrak{j}_1(\mathfrak{n}'\mathfrak{k}) - \mathfrak{k}_1(\mathfrak{n}'\mathfrak{j}),\ \mathfrak{j}_2(\mathfrak{n}'\mathfrak{k}) - \mathfrak{k}_2(\mathfrak{n}'\mathfrak{j}),\ \mathfrak{j}_3(\mathfrak{n}'\mathfrak{k}) - \mathfrak{k}_3(\mathfrak{n}'\mathfrak{j})].\end{aligned}$$

Wenn das einfallende Licht linear polarisiert ist, sind sowohl $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ als auch $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{D}'$ reale Vektoren, und die Formeln (3) und (4) besagen, daß für eine gegebene Richtung $\mathfrak{l}$ des magnetischen Moments des Elektrons im Anfangszustand die gestreuten Strahlen als aus zwei inkohärenten, im allgemeinen elliptisch polarisierten Komponenten bestehend betrachtet werden können, wie es eben den zwei verschiedenen möglichen Übergängen in bezug auf das magnetische Moment entspricht.

2. Der Intensitätsausdruck der Comptonstreustrahlung bei elliptisch polarisiertem einfallenden Licht. Um das in Abschnitt 1 gegebene Resultat für die Berechnung der Intensität des zweimal gestreuten Lichtes — dem üblichen Verfahren bei experimentellen Untersuchungen der Polarisation der Comptonstreustrahlung entsprechend — anwenden zu können, verfahren wir folgendermaßen. Zuerst berechnen wir die Intensität der Streustrahlung für elliptisch polarisiertes ein-

fallendes Licht. Mittels der so erhaltenen Formel können wir dann die Intensität des Tertiärstrahls bekommen, wenn wir den durch Formel (3) und (4) dargestellten einmal gestreuten Strahl als einfallendes Licht für den zweiten Streuprozeß betrachten.

Wenn eine elliptisch polarisierte ebene Welle

$$\mathfrak{E} = (\varepsilon_a + i\varepsilon_b)\, e^{i\nu\left(t - \frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{r})}{c}\right)} + (\varepsilon_a - i\varepsilon_b)\, e^{-i\nu\left(t - \frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{r})}{c}\right)} \tag{5}$$

durch ein freies Elektron gestreut wird, können wir nach Formel (44), I das magnetische Feld des Streustrahls folgendermaßen schreiben:

$$\mathfrak{H} = \frac{(2\pi h)^3 e^2 \nu'}{2mc^2 \varkappa r} \sqrt{\frac{E'\nu'}{mc^3\nu}} \left\{(\mathfrak{P} - i\mathfrak{Q})\, e^{i\nu'\left(t - \frac{r}{c}\right)} + (\mathfrak{P}^* + i\mathfrak{Q}^*)\, e^{-i\nu'\left(t - \frac{r}{c}\right)}\right\}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P} = d\Big\{ & \frac{1}{\nu}(\mathfrak{n}'\varepsilon_a)(\nu - \nu')[\mathfrak{n}\mathfrak{n}'] - \nu'\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu'}\right)^2 \frac{mc^2}{h}[\mathfrak{n}'\varepsilon_a]\Big\} \\
& + \left(\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu}\right)\{(\mathfrak{s}, \mathfrak{n}\nu - \mathfrak{n}'\nu')[(\mathfrak{n}'\varepsilon_b)\mathfrak{n} - (\mathfrak{n}\mathfrak{n}')\varepsilon_b] + \varkappa[(\mathfrak{s}\mathfrak{n}')\varepsilon_b - (\mathfrak{n}'\varepsilon_b)\mathfrak{s}]\} \\
& + \frac{2}{\nu}(\mathfrak{n}'\varepsilon_b)\{(\mathfrak{n}'\mathfrak{s})(\mathfrak{n}\nu - \mathfrak{n}'\nu') - [(\mathfrak{n}\mathfrak{n}')\nu - \nu']\mathfrak{s}\} \\
& - \left(\frac{1}{\nu'} + \frac{1}{\nu}\right)\{\nu(\mathfrak{n}[\mathfrak{s}\varepsilon_b])[\mathfrak{n}\mathfrak{n}'] + \nu'(\mathfrak{n}'[\mathfrak{n}\varepsilon_b])[\mathfrak{n}'\mathfrak{s}]\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Q} = -d\Big\{ & \frac{1}{\nu}(\mathfrak{n}'\varepsilon_b)(\nu - \nu')[\mathfrak{n}\mathfrak{n}'] - \nu'\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu'}\right)^2 \frac{mc^2}{h}[\mathfrak{n}'\varepsilon_b]\Big\} \\
& + \left(\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu}\right)\{(\mathfrak{s}, \mathfrak{n}\nu - \mathfrak{n}'\nu')[(\mathfrak{n}'\varepsilon_a)\mathfrak{n} - (\mathfrak{n}\mathfrak{n}')\varepsilon_a] + \varkappa[(\mathfrak{s}\mathfrak{n}')\varepsilon_a - (\mathfrak{n}'\varepsilon_a)\mathfrak{s}]\} \\
& + \frac{2}{\nu}(\mathfrak{n}'\varepsilon_a)\{(\mathfrak{n}'\mathfrak{s})[\mathfrak{n}\nu - \mathfrak{n}'\nu'] - [(\mathfrak{n}\mathfrak{n}')\nu - \nu']\mathfrak{s}\} \\
& - \left(\frac{1}{\nu'} + \frac{1}{\nu}\right)\{\nu(\mathfrak{n}[\mathfrak{s}\varepsilon_a])[\mathfrak{n}\mathfrak{n}'] + \nu'(\mathfrak{n}'[\mathfrak{n}\varepsilon_a])[\mathfrak{n}'\mathfrak{s}]\}.
\end{aligned}$$

Dabei sind $\mathfrak{P}^*$ und $\mathfrak{Q}^*$ die konjugiert komplexen Größen zu $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{Q}$. Um den Intensitätsausdruck zu bekommen, muß man den Mittelwert

$$\overline{\mathfrak{H}^2} = \overline{2(\mathfrak{P}\mathfrak{P}^* + \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}^*)}$$

ausrechnen. $\mathfrak{P}\mathfrak{P}^*$ und $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}^*$ enthalten sowohl $d\bar{d}$- und $\mathfrak{s}\bar{\mathfrak{s}}$-Glieder als auch $d\bar{\mathfrak{s}}$- und $\mathfrak{s}\bar{d}$-Glieder. Für die ersteren kann man den Ausdruck (58), I unverändert benutzen. Die letzteren enthalten nach der Rechenregel (56), I alle den Faktor 1, der, wenn der Anfangszustand einem unmagnetisierten

Elektron entspricht, d. h. dem Mittelwert von allen möglichen nach verschiedenen Richtungen magnetisierten Elektronen, mit gleicher Wahrscheinlichkeit positiv und negativ sein kann. Wenn wir die Intensität über die möglichen Werte von $\mathfrak{l}$ mitteln, heben sich deshalb diese Glieder weg. In diesem Falle ist also die Intensität der Streustrahlung bei elliptisch polarisiertem einfallenden Lichte einfach gleich der Summe der zu den linear polarisierten Komponenten des einfallenden Lichtes nach (59), I gehörigen Intensitäten. Wir erhalten also für die mittlere Streuintensität in einer Entfernung r' vom Elektron

$$I = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3 r'^2} \frac{1}{(1+\beta)^3} \left\{ \frac{2+2\beta+\beta^2}{1+\beta} (\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2) - 2[(\mathfrak{n}''\varepsilon_a)^2 + (\mathfrak{n}''\varepsilon_b)^2] \right\}, \tag{7}$$

$$= \frac{e^4}{2\pi m^2 c^3 r'^2} \frac{1}{(1+\beta)^3} \left\{ \varepsilon_a^2 \sin^2 \Phi_a + \varepsilon_b^2 \sin^2 \Phi_b + \frac{\beta^2}{2(1+\beta)} (\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2) \right\}. \tag{8}$$

Hier bedeuten $\mathfrak{n}''$ die Beobachtungsrichtung des Streustrahls, Φ_a bzw. Φ_b die Winkel zwischen $\mathfrak{n}''$ und ε_a bzw. ε_b. Für einen Anfangszustand, der einem bestimmten Werte von $\mathfrak{l}$ entspricht, werden dagegen im allgemeinen die $d\bar{s}$- und $s\bar{d}$-Glieder übrigbleiben, wodurch der Ausdruck von $\mathfrak{l}$ abhängig wird und nicht gleich der Summe der entsprechenden Ausdrücke (59), I ist.

3. Die Intensität des Tertiärstrahls bei rechtwinkligen Streuungen. Nunmehr können wir den Intensitätsausdruck für den Tertiärstrahl bei zweimaligen Streuungen berechnen, wenn wir Ausdruck (3) mit (4) in (7) einsetzen. Beim gewöhnlichen experimentellen Verfahren benutzt man aber rechtwinklige Streuungen, für welche allein wir hier die Tertiärstrahlintensität ausrechnen wollen.

Als Primärstrahl nehmen wir eine linear polarisierte ebene Welle

$$\mathfrak{E} = \varepsilon e^{i\nu\left(t - \frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{r})}{c}\right)} + \varepsilon e^{-i\nu\left(t - \frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{r})}{c}\right)}. \tag{9}$$

Der Einfachheit halber wählen wir das Koordinatensystem so, daß

$$\left.\begin{array}{llll} \mathfrak{n}_1 = 1, & \mathfrak{n}_1' = 0, & & \mathfrak{n}_1'' \neq 0, \\ \mathfrak{n}_2 = 0, & \mathfrak{n}_2' = 1, & \text{während} & \mathfrak{n}_2'' = 0, \\ \mathfrak{n}_3 = 0, & \mathfrak{n}_3' = 0, & & \mathfrak{n}_3'' \neq 0. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Dies bedeutet, daß man sich den Primärstrahl in der x-Richtung, den Sekundärstrahl in der y-Richtung denkt, während man den Tertiärstrahl in einer Ebene beobachtet, die durch das zweite Elektron parallel der

xz-Ebene läuft. Setzt man (10) in (3) und (4) ein, und vergleicht man den so erhaltenen Ausdruck mit (5), so lassen sich die Komponenten der elektrischen Felder $\varepsilon'_a + i\varepsilon'_b$ und $\varepsilon''_a + i\varepsilon''_b$ der zwei inkohärenten Sekundärstrahlen folgendermaßen ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}
(\varepsilon'_a)_1 &= -\mu\alpha\varepsilon_2,\\
(\varepsilon'_a)_3 &= -\frac{\mu(2+\alpha)^2}{\alpha}\varepsilon_3.\\
(\varepsilon'_b)_1 &= -\mu\{\alpha l_2\varepsilon_3 - (2+\alpha) l_3\varepsilon_2 + (2+\alpha) l_1\varepsilon_3\},\\
(\varepsilon'_b)_3 &= -\mu\{-\alpha l_1\varepsilon_2 + (2+\alpha) l_2\varepsilon_3 + (2+\alpha) l_3\varepsilon_3\}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$(\varepsilon''_a)_1$ bzw. $(\varepsilon''_a)_3$ und $(\varepsilon''_b)_1$ bzw. $(\varepsilon''_b)_3$ entstehen aus $(\varepsilon'_b)_1$ bzw. $(\varepsilon'_b)_3$ durch die folgenden zyklischen Vertauschungen:

$$\begin{array}{ccccc}
(\varepsilon'_b)_1 & \cdots & | & \cdots & (\varepsilon'_b)_3\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
(\varepsilon''_a)_1 & \cdots & | & \cdots & (\varepsilon''_a)_3\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
(\varepsilon''_b)_1 & \cdots & | & \cdots & (\varepsilon''_b)_3
\end{array}$$

während

$$(\varepsilon''_a)_2 = (\varepsilon''_b)_2,$$

wobei

$$\mu = \frac{e^2}{2\sqrt{2}\, mc^2 r}\,\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}\,\frac{1}{\sqrt{2+2\alpha+\alpha^2}}.$$

Daraus ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
(\varepsilon_a)_1^2 + (\varepsilon_b)_1^2 &= (\varepsilon'_a)_1^2 + (\varepsilon'_b)_1^2 + (\varepsilon''_a)_1^2 + (\varepsilon''_b)_1^2\\
&= \mu^2\varepsilon^2\{\alpha^2 + (2+\alpha)^2\},\\
(\varepsilon_a)_3^2 + (\varepsilon_b)_3^2 &= (\varepsilon'_a)_3^2 + (\varepsilon'_b)_3^2 + (\varepsilon''_a)_3^2 + (\varepsilon''_b)_3^2\\
&= \mu^2\varepsilon^2\left\{(2+\alpha)^2 + \alpha^2\sin^2\varphi + \frac{(2+\alpha)^4}{\alpha^2}\cos^2\varphi\right\},\\
(\varepsilon_a)_1(\varepsilon_a)_3 + (\varepsilon_b)_1(\varepsilon_b)_3 &= (\varepsilon'_a)_1(\varepsilon'_a)_3 + (\varepsilon'_b)_1(\varepsilon'_b)_3\\
&\quad + (\varepsilon''_a)_1(\varepsilon''_a)_3 + (\varepsilon''_b)_1(\varepsilon''_b)_3 = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

wobei φ den Winkel zwischen dem elektrischen Vektor ε des Primärstrahls und der z-Richtung bedeutet. Für einen unpolarisierten Primärstrahl müssen wir die Ausdrücke über φ mitteln und erhalten so

$$\left.\begin{aligned}
\overline{(\varepsilon_a)_1^2 + (\varepsilon_b)_1^2} &= \mu^2\varepsilon^2\{\alpha^2 + (2+\alpha)^2\},\\
\overline{(\varepsilon_a)_3^2 + (\varepsilon_b)_3^2} &= \mu^2\varepsilon^2\left\{\frac{1}{2}\alpha^2 + (2+\alpha)^2 + \frac{(2+\alpha)^4}{2\alpha^2}\right\},\\
\overline{(\varepsilon_a)^2 + (\varepsilon_b)^2} &= \mu^2\varepsilon^2\left\{\frac{3}{2}\alpha^2 + 2(2+\alpha)^2 + \frac{(2+\alpha)^4}{2\alpha^2}\right\},\\
\overline{(\varepsilon_a)_1(\varepsilon_a)_3 + (\varepsilon_b)_1(\varepsilon_b)_3} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Setzen wir (13) in (7) ein, und berücksichtigen wir, daß die in (7) eingehende Größe β auf Grund der Frequenzänderung bei der ersten Streuung gleich $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ ist, so erhalten wir endlich als Intensitätsausdruck für den Tertiärstrahl

$$I_t = \frac{e^8}{2\,m^4 c^8 r^2 r'^2} \frac{I_0}{(1+2\alpha)^3} \left\{ \sin^2\Theta + \frac{\alpha^2(2+4\alpha+3\alpha^2)}{2(1+\alpha)^2(1+2\alpha)} \right\}. \quad (14)$$

Hier bedeuten $I_0 = \frac{c\mathfrak{E}^2}{2\pi}$ die Intensität des einfallenden Primärstrahls, Θ den Winkel zwischen den Beobachtungs- und z-Richtungen, r bzw. r' die Entfernungen des ersten Elektrons bzw. des Beobachtungspunktes von dem zweiten Elektron.

Oben haben wir als Anfangszustand des ersten Elektrons $u_2 = v_2 = 0$ genommen. Der andere Fall, $u_1 = v_1 = 0$, ändert unser Resultat nicht, denn hier sind

$$\mathfrak{s}_3 = -d \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{s}_1 = -i\mathfrak{s}_2,$$

so daß $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{D}'$ und damit auch $(\varepsilon_b')_1$, $(\varepsilon_b')_3$, $(\varepsilon_a'')_1$ und $(\varepsilon_a'')_3$ nur ihre Vorzeichen wechseln. Dies aber ändert nichts in der Formel (12). Wie eine genauere Betrachtung zeigt, gibt der Ausdruck (14) die Tertiärstrahlintensität für den Fall, daß eins — gleichgültig welches — der beiden streuenden Elektronen unmagnetisiert ist, während das andere Elektron nach einer beliebigen Richtung magnetisiert oder auch unmagnetisiert sein kann.

Das erste Glied des Ausdrucks (14) stimmt mit dem entsprechenden aus der Theorie von Dirac und Gordon abzuleitenden Ausdruck überein. Die Abweichung zwischen den beiden Theorien ist also durch das zweite Glied gegeben, das von der Größenordnung α^2 ist, wie dies auch bei der in I gegebenen Intensitätsformel der Fall war, aber außerdem von Θ unabhängig ist. Für eine gegebene Frequenz des Primärstrahls ist unsere Intensität für alle Winkel um einen konstanten Betrag größer als diejenige der Dirac-Gordonschen Formel. Dieser Betrag ist klein für gewöhnliche Röntgenstrahlen, aber von der gleichen Größenordnung wie das erste Glied für γ-Strahlen, wo $\alpha > 1$ ist. So ist z. B. bei $\Theta = 90^0$ das zweite Glied 0,6- bzw. zweimal so groß wie das erste, für $\alpha = 1$ bzw. $\alpha = 2$, entsprechend der Wellenlänge $\lambda = 2 \cdot 10^{-10}$ cm bzw. $\lambda = 1 \cdot 10^{-10}$ cm. Allerdings sind gerade in diesem Gebiet die Frequenzen von der Größenordnung derjenigen Frequenzen, die zu den physikalisch unverständlichen Übergängen zu Zuständen negativer Energie

gehören, deren Auftreten nach Dirac eine ernstliche Schwierigkeit für die Theorie bedeutet.

Die experimentellen Ergebnisse von Kallmann und Mark sind nicht geeignet für eine Entscheidung für oder gegen die Dirac-Gordonschen bzw. die hier gegebenen Formeln, da die benutzte Wellenlänge zu groß war, um den Unterschied bemerkbar zu machen. Dagegen scheinen die Lukirskyschen Ergebnisse für die Dirac-Gordonsche Theorie zu sprechen, wenn seine Schätzung (zwischen 0,07 Å und 0,1 Å) der von ihm benutzten Wellenlänge richtig ist. Wenn man nämlich den Mittelwert der angegebenen Frequenzen in unsere Formel (14) einsetzt, so bekommt man, für $\Theta = 0^0$, eine Intensität, die 5,3 % derjenigen für $\Theta = 90^0$ beträgt, anstatt 2,5 %, wie sie von Lukirsky beobachtet worden ist. Wenn die von ihm benutzte Wellenlänge gleich 0,13 Å wäre, würden seine Resultate mit unserer Theorie in Übereinstimmung stehen.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. N. Bohr und Herrn Dr. O. Klein für ihr Interesse an dieser Arbeit und für viele freundliche Ratschläge meinen herzlichen Dank aussprechen. Weiter möchte ich gern Herrn Chr. Möller, der freundlichst die Korrektur durchgesehen und mich auf einige nötige Berichtigungen in den Rechnungen aufmerksam gemacht hat, herzlichst danken.

Kopenhagen, Universitetets Institut for teoretisk Fysik, Okt. 1928.

Über die dielektrischen Eigenschaften der nematischen Flüssigkeiten im gleichzeitigen magneto- und elektrostatischen Felde.

Von **Mieczysław Jeżewski** in Krakau.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 23. November 1928.)

Es wurde die Kapazität des mit p-Azoxyanisol und p-Azoxyphenetol gefüllten Kondensators im gleichzeitigen magneto- und elektrostatischen Felde gemessen, und zwar waren die Felder parallel und senkrecht. Ein schwaches elektrostatisches Feld (ungefähr 400 V/cm) ruft keine Änderungen der Kapazität des im magnetischen Felde sich befindenden Kondensators hervor. Ein stärkeres elektrisches Feld bewirkt eine Vergrößerung der Dielektrizitätskonstante nematischer Flüssigkeiten, wenn sie im parallelen, und Verkleinerung, wenn sie im zur Plattennormalen senkrechten magnetischen Felde sich befinden.

Früher habe ich festgestellt, daß die Dielektrizitätskonstante (DK) nematischer Flüssigkeiten im elektrostatischen Felde mit zunehmender Feldstärke abnimmt*. Auch habe ich dasselbe festgestellt für das magnetische Feld parallel zur Plattennormalen**. Die Verkleinerung bei zunehmendem Felde strebt einem Grenzwerte zu. Dieser Grenzwert ist größer für das magnetische Feld als für das elektrische Feld.

Meine jetzigen Messungen beziehen sich auf die Änderungen, welche die Kapazität des mit p-Azoxyanisol und p-Azoxyphenetol gefüllten Kondensators im gleichzeitigen elektrischen und magnetischen Felde aufweist.

Die Messungen wurden in der früher beschriebenen Weise* ausgeführt, nur mit dem Unterschied, daß jetzt der Meßkondensator sich zwischen den Polen eines Elektromagnets befand. Die Plattenentfernung des hier benutzten Kondensators war 0,86 mm, also die Kapazität fast dreimal so groß wie früher. Deshalb waren die Änderungen der Kapazität viel deutlicher, die Genauigkeit der Messungen größer. Die bedeutend kleinere Entfernung der Platten verursachte, daß die untersuchten chemischen Verbindungen zwischen den Platten einen viel kleineren Widerstand bildeten. Aus diesem Grunde war das Ein- und Ausschalten der Batterie, die das elektrostatische Feld hervorruft, nicht ohne Einfluß auf

---

* Mieczysław Jeżewski, ZS. f. Phys. **51**, 159, 1928.

** M. Jeżewski, Bull. de l'Acad. Polon. (A) 1923, S. 43; Journ. de phys. et le Radium (6) **5**, 59, 1924; ZS. f. Phys. **40**, 159, 1926.

die Lage der Resonanzkurve. Man mußte die Korrektionen, welche aus Versuchen mit den in Frage kommenden Körpern in isotropem Zustande gefunden wurden, berücksichtigen. Dieser Umstand verkleinerte bedeutend die Genauigkeit der Messungen. Die Ergebnisse der Messungen sind in Skalenteilen der Skale des veränderlichen Kondensators angegeben. Der mittlere Fehler der in folgenden Tabellen enthaltenen Angaben beträgt ± 2 Skalenteile. Die magnetische Feldstärke war bei allen Messungen 4000 Gauß, die Richtung war parallel oder senkrecht zur Plattennormalen, also auch parallel oder senkrecht zum elektrischen Felde. Das elektrostatische Feld war veränderlich, und zwar von 0 bis über 1500 V/cm. Die Tabellen 1 und 2 enthalten die Resultate.

Tabelle 1.

p-Azoxyanisol.

E elektrische Feldstärke,
H magnetische Feldstärke.

E in V/cm	Änderung der Kapazität des mit p-Azoxyanisol gefüllten Kondensators in Skalenteilen des veränderlichen Kondensators		
	$H = 0$	$H = 4000$ Gauß $H \parallel E$	$H = 4000$ Gauß $H \perp E$
	Temperatur 118,6° C.		
0	0	— 126	+ 1
141	— 24	— 124	+ 1
328	— 50	— 114	— 1
608	— 65	— 106	— 12
1074	— 74	— 106	— 31
1539	— 80	— 100	— 38
	Temperatur 125,0° C.		
0	0	— 82	0
141	— 22	— 84	0
328	— 41	— 79	+ 1
608	— 56	— 74	— 10
1074	— 60	— 67	— 29
1540	— 64	— 67	— 38
	Temperatur 129,5° C.		
0	0	— 63	0
47	— 12	— 61	— 1
94	— 15	— 64	0
141	— 20	— 64	+ 1
328	— 35	— 63	0
607	— 43	— 57	— 7
1072	— 47	— 51	— 20
1537	— 50	— 44	— 28

Tabelle 2.

p-Azoxyphenetol.

E elektrische Feldstärke,
H magnetische Feldstärke.

E in V/cm	Änderung der Kapazität des mit p-Azoxyphenetol gefüllten Kondensators in Skalenteilen des veränderlichen Kondensators		
	$H = 0$	$H = 4000$ Gauß $H \parallel E$	$H = 4000$ Gauß $H \perp E$
	Temperatur 140,6° C.		
0	0	— 162	0
141	— 44	— 167	0
329	— 86	— 159	+ 1
609	— 112	— 159	— 6
1077	— 122	— 147	— 35
1548	— 128	— 143	— 79
	Temperatur 155,7° C.		
0	0	— 109	0
140	— 20	— 110	— 2
326	— 45	— 108	+ 2
558	— 64	— 109	+ 3
1023	— 82	— 106	— 16
1494	— 84	— 99	— 44
	Temperatur 165,3° C.		
0	0	— 88	0
141	— 15	— 88	+ 1
328	— 35	— 87	+ 1
609	— 47	— 82	— 1
1076	— 54	— 76	— 11
1545	— 59	— 73	— 25

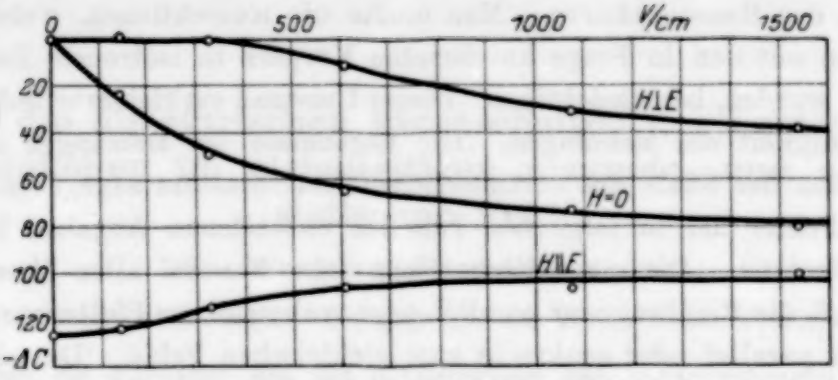


Fig. 1. p-Azoxyanisol, Temp. 118,6°.

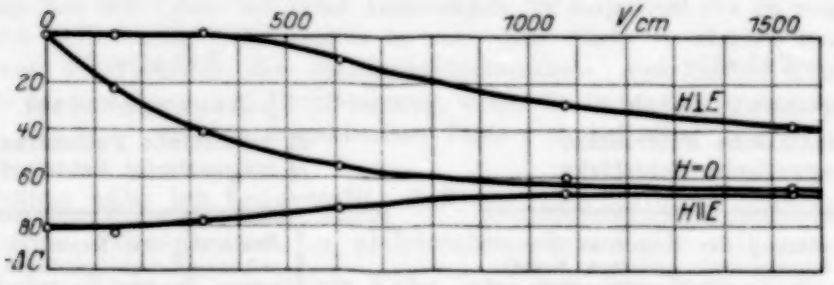


Fig. 2. p-Azoxyanisol, Temp. 125,0°.

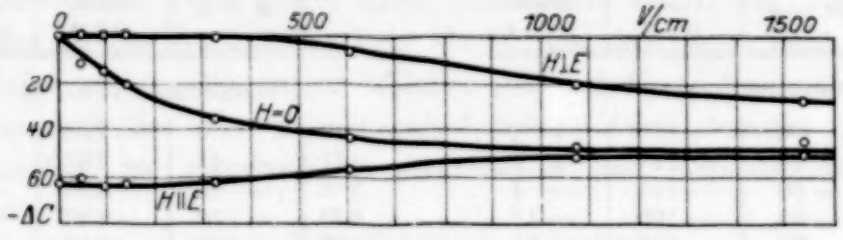


Fig. 3. p-Azoxyanisol, Temp. 129,5°.

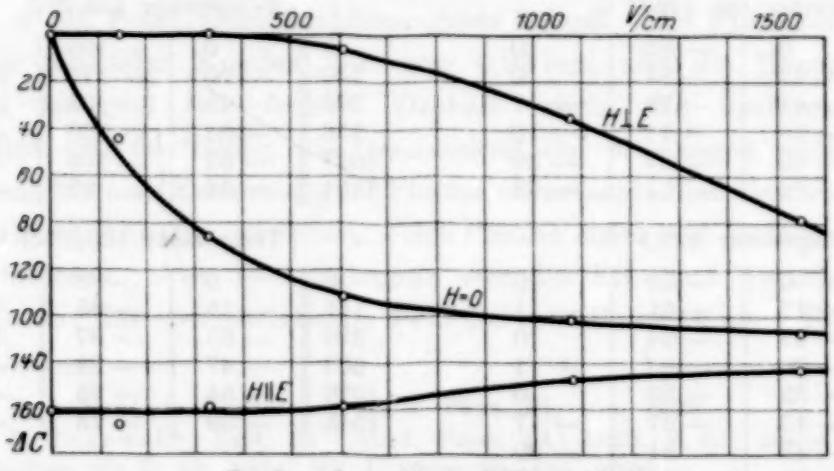


Fig. 4. p-Azoxyphenetol, Temp. 140,6°.

Die Kurven in den Fig. 1 bis 6 stellen die Abhängigkeit der Kapazitätsänderungen des mit p-Azoxyanisol und p-Azoxyphenetol gefüllten Kondensators von dem elektrischen und magnetischen Felde dar.

Durch die beschriebenen Versuche ist nachgewiesen, daß das zur Plattennormalen parallele magnetische Feld im schwachen elektrostatischen Felde (bis 300 V/cm bei p-Azoxyanisol und bis 500 V/cm bei p-Azoxyphenetol) dieselbe Verkleinerung der DK wie bei Abwesenheit

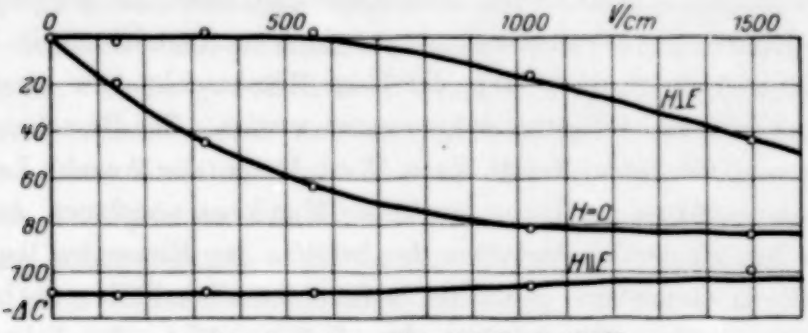


Fig. 5. p-Azoxyphenetol, Temp. 155,7°.

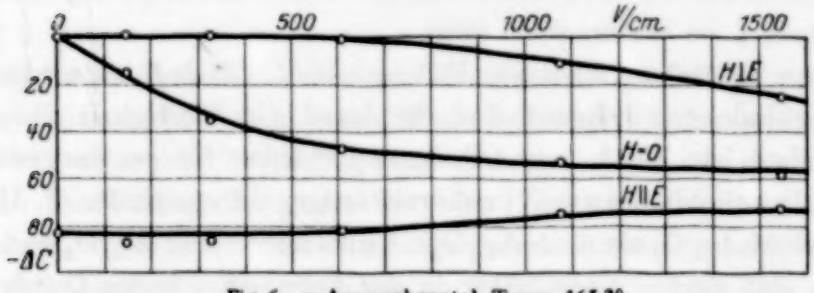


Fig 6. p-Azoxyphenetol, Temp. 165,3°.

des elektrostatischen Feldes hervorruft. Das zur Plattennormalen senkrechte magnetische Feld ruft eine Vergrößerung der DK hervor, so daß die Kapazität des Kondensators denselben Wert wie bei Abwesenheit des elektrostatischen Feldes erhält. Das parallele magnetische Feld ruft im starken elektrischen Felde eine Verkleinerung hervor, das senkrechte magnetische Feld eine Vergrößerung der DK. Die Änderungen nehmen mit zunehmendem elektrischen Felde ab.

Kraków. Physikalisches Institut der Bergakademie.

Bemerkung über die innere Austrittsarbeit bei der Elektronenemission des Silbers.

Von **John Mead Adams** in Los Angeles.

(Eingegangen am 3. November 1928.)

In einer kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit behandeln Rosenfeld und Witmer* den Zusammenhang zwischen der photoelektrisch bestimmten Austrittsarbeit A, der inneren Austrittsarbeit W_i und der äußeren Austrittsarbeit W_a, die beim Herausschleudern eines Elektrons aus einem Kristallgitter aufgewendet werden. Zur Berechnung von W_i muß man für jedes Metall einen Wert für n, die Anzahl Leitungselektronen pro Atom im Gitter, ansetzen. Man kann annehmen, daß diese Zahl im Bereich der Wertigkeiten des betreffenden Elementes liegt, und ein auf dieser Grundlage gewähltes n führt in allen Fällen zu befriedigender Übereinstimmung zwischen A und $W_a - W_i$, außer beim Silber. Hier fordern die experimentellen Daten $n = 3$, was mit der gewöhnlichen Valenzzahl 1 im Widerspruch steht.

Diese scheinbare Anomalie läßt sich vielleicht dadurch erklären, daß Silberverbindungen bekannt sind, in denen die Wertigkeit des Metalls größer als 1 ist. Luther und Pokorny** haben Körper dargestellt, die „vermutlich Oxyde des zwei- bzw. dreiwertigen Silbers sind". F. Jirsa*** fand sowohl Ag_2O_2 als auch Ag_2O_3. Austin**** fand Ag_2O_3 und Yost† schließt, daß dreiwertiges Silber in der Form eines festen Oxyds Ag_2O_3 und als Salz in stark saurer Lösung existenzfähig ist.

Nach diesen Ergebnissen scheint die Valenzzahl 3 bei Silber durchaus möglich und dementsprechend die Berechnung von W_i gestattet zu sein.

---

* ZS. f. Phys. **49**, 534, 1928.

** ZS. f. anorg. Chem. **57**, 290, 1908.

*** Chem. Listy **19**, 3, 1925 (mir nur in Chem. Abstracts **19**, 2460, 1925 zugänglich).

**** Journ. Chem. Soc. **99**, 262, 1911.

† Journ. Amer. Chem. Soc. **48**, 152, 1926.

Die Stabilität des Silberatomrumpfes.

Von **Joseph Kaplan** in Los Angeles.

(Eingegangen am 8. November 1928.)

In der vorstehenden Notiz erklärt J. M. Adams die scheinbare Anomalie, die bei der Prüfung der Beziehung $A = W_n - W_i$ beim Silber auftritt. In diesem Zusammenhang ist es von Interesse, auf die Diskussion der Wertigkeit des Silbers durch Grimm und Sommerfeld* hinzuweisen. Sie zeigten, daß die gewöhnliche Wertigkeit 1 mit der großen Stabilität der abgeschlossenen Schale aus zehn $4d$-Elektronen beim Silber übereinstimmt. Diese Stabilität zeigt sich in der fast vollständigen Analogie zwischen den Spektren des Silbers und der Alkalimetalle, wie man sie bei einem Atom erwarten sollte, in dem sich ein Elektron außerhalb einer sehr stabilen abgeschlossenen Schale befindet. Andererseits zeigen die ähnlich gebauten Atome Cu und Au diese Stabilität nicht, und folglich sind auch die Spektren dieser Elemente nicht so einfach wie das des Silbers.

Angesichts dieser Tatsachen zeigt die Notwendigkeit für die Annahme von drei Leitungselektronen beim Silber, daß, obgleich die abgeschlossene Schale aus zehn $4d$-Elektronen chemisch sehr stabil ist, sie nicht den gleichen Stabilitätsgrad gegenüber der Elektrizitätsleitung beweist. Elektronen, die man bei fast allen chemischen Reaktionen, an denen das Silber teilnimmt, als festgebunden ansehen kann, müssen bei der Betrachtung der Elektrizitätsleitung durch Metalle als so frei angesehen werden, daß sie die Rolle von Leitungselektronen übernehmen können. Das Auftreten dreiwertigen Silbers, auf das Prof. Adams hinweist, zeigt, daß die $4d$-Elektronen nicht denselben Stabilitätsgrad haben, wie eine Edelgasschale. Er genügt jedoch, um das Silber in fast allen chemischen Reaktionen einwertig zu machen. Immerhin beweist das Auftreten des dreiwertigen Silbers, auf das Dr. Adams hinweist, die Möglichkeit der Abtrennung von drei Elektronen.

---

* H. G. Grimm und A. Sommerfeld, ZS. f. Phys. **36**, 36, 1926.

Elektrische Polarisation in Isolatoren, hervorgerufen durch Beschleunigung.

Von **E. Brody** in Budapest.

(Eingegangen am 28. November 1928.)

Es wird gezeigt, daß ein Beschleunigungsfeld infolge der Verschiedenheit der Massen der Anionen und Kationen in jedem Isolator ein elektrisches Moment erregt. Die Größe des zu erwartenden Effektes wird für einige Kristalltypen und für isotrope Körper berechnet und die Möglichkeit einer versuchsmäßigen Verwirklichung diskutiert.

§ 1. Das Problem. Wird ein heteropolarer Kristall in ein elektrisches Feld gesetzt, so wird der Kristall, da die elektrische Kraft auf Ionen verschiedener Vorzeichen entgegengesetzt groß ist, polarisiert. Es fragt sich nun, ob nicht andere Kräfte den Kristall polarisieren, d. h. ein elektrisches Moment erregen können. Offenbar wird ein Kraftfeld, das die positiven und negativen Ionen verschieden stark angreift, im Kristall ein elektrisches Moment erzeugen. Es läßt sich leicht ein sehr einfaches, vielleicht das denkbar einfachste Kraftfeld dieser Art angeben, insofern die Anionen und Kationen verschiedene Massen haben, und zwar die Gravitation, oder was damit gleichwertig, aber versuchsweise leicht in einer günstigeren Größenordnung herstellbar ist, ein Beschleunigungsfeld.

Denken wir uns nämlich einen heteropolaren Kristall, z. B. einen Steinsalzkristall in einer Richtung beschleunigt, so wirkt auf das Gitter der Kationen, das sind die Natriumionen, eine Kraft anderer Größe, als auf das Gitter der Anionen, Chlorionen. Die beiden Gitter werden daher gegeneinander verschoben; ihre Schwerpunkte werden nicht mehr zusammenfallen, es entsteht also ein elektrisches Moment, der Körper wird durch die Beschleunigung elektrisch polarisiert.

§ 2. Die Größe des Effektes bei regulären Kristallen. Die Größe der erwarteten Polarisation läßt sich im folgenden einfachen Falle elementar berechnen. Denken wir uns einen regulären binären Kristall, z. B. Steinsalz. Ein elektrisches Feld von der Stärke E erregt in diesem bekanntlich ein Moment der Volumeneinheit von der Größe

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E,$$

wo ε die Dielektrizitätskonstante bedeutet.

Die polarisierende Kraft ist die Differenz der auf das Kation und auf das Anion wirkenden Kräfte

$$eE - (-eE) = 2eE,$$

wo e die Ladung der Ionen ist.

Bei der Berechnung der von der Beschleunigung hervorgerufenen Polarisation muß man überlegen, daß das elektrische Moment ebenso wie oben nur von der Differenz der auf das Anion und auf das Kation wirkenden Trägheitskräfte herrührt; deren Summe hält sich aber mit der beschleunigenden äußeren Kraft im Gleichgewicht.

Es erregt also

$$(m_1 - m_2)\,g,$$

wo m_1 und m_2 die Massen des Anions bzw. Kations und g die Beschleunigung bedeuten, dasselbe elektrische Moment wie E, die elektrische Feldstärke, wenn

$$(m_1 - m_2)\,g = 2eE. \tag{1}$$

Es wird also von der Beschleunigung g die elektrische Polarisation

$$p = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\,\frac{m_1 - m_2}{2e}\,g = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\,\frac{M_1 - M_2}{F}\,g, \tag{2}$$

wo M_1 und M_2 die Ionengewichte, F die Faradaysche Konstante 96 500 Coulomb/Mol bedeuten.

§ 3. Die Größe des Effektes im allgemeinen. Nun wollen wir das durch die Beschleunigung erregte elektrische Moment der Volumeneinheit für alle nichtleitenden Kristalle berechnen. Wir schließen uns in den Bezeichnungen und in der Methode Born an*. Wir denken uns also ein unendliches Kristallgitter, welches aus s einfachen Gittern aufgebaut ist. Die Masse der k-ten Teilchenart sei m_k, die Ladung e_k, Δ das Volumen einer Zelle, die Beschleunigung des Kristalls $\mathfrak{g}$. Dann wird die Trägheitskraft der k-ten Teilchenart pro Volumeneinheit

$$\mathfrak{f}_k = -\frac{m_k \mathfrak{g}}{\Delta}. \tag{3}$$

Die Summe dieser Kräfte hält, wie oben erwähnt wurde, der beschleunigenden, äußeren Kraft das Gleichgewicht. Die die Polarisation erregenden Kräfte sind pro Volumeneinheit

$$\mathfrak{R}_k = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{s}\sum_{k'}\mathfrak{f}_{k'} - \mathfrak{f}_k\right) = \left(\frac{\sum m_{k'}}{s} - m_k\right)\frac{\mathfrak{g}}{\Delta}. \tag{4}$$

* M. Born, Atomtheorie des festen Zustandes. Berlin und Leipzig, B. G. Teubner, 1923, oder Geiger und Scheels Handbuch der Physik Band XXIV, Kapitel 5, von M. Born und O. F. Bollnow. Berlin, Springer, 1927.

Die Verschiebung u_k des k-ten einfachen Gitters aus der Gleichgewichtslage hängt linear von den wirkenden Kräften ab:

$$u_{kx} = \sum_{k'} \sum_{y} \begin{Bmatrix} k\,k' \\ x\,y \end{Bmatrix} \Re_{k'y}, \tag{5}$$

wo die Klammersymbole $\begin{Bmatrix} k\,k' \\ x\,y \end{Bmatrix}$ durch die den Kristall zusammenhaltenden Kräfte bestimmte sind.

Das elektrische Moment der Volumeneinheit

$$\mathfrak{p}_x = \frac{1}{\Delta} \sum_{k} u_{kx}\, e_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{kk'} \begin{Bmatrix} k\,k' \\ x\,y \end{Bmatrix} e_k\, \Re_{k'y} \tag{6}$$

oder (4) eingesetzt, wird

$$\mathfrak{p}_x = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{kk'} \sum_{y} e_k \left(\frac{\Sigma m}{s} - m_{k'} \right) \begin{Bmatrix} k\,k' \\ x\,y \end{Bmatrix} \mathfrak{g}_y = -\frac{1}{\Delta^2} \sum_{kk'} \sum_{y} \begin{Bmatrix} k\,k' \\ x\,y \end{Bmatrix} e_k\, m_{k'}\, \mathfrak{g}_y \tag{7}$$

da bekanntlich*

$$\sum_{kk'} \begin{Bmatrix} k\,k' \\ x\,y \end{Bmatrix} = 0,$$

oder mit passender Bezeichnung:

$$\mathfrak{p}_x = \sum_{y} \{x\,y\}\, \mathfrak{g}_y, \tag{8}$$

ausführlicher geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}_x &= \{x\,x\}\, \mathfrak{g}_x + \{x\,y\}\, \mathfrak{g}_y + \{x\,z\}\, \mathfrak{g}_z, \\ \mathfrak{p}_y &= \{y\,x\}\, \mathfrak{g}_x + \{y\,y\}\, \mathfrak{g}_y + \{y\,z\}\, \mathfrak{g}_z, \\ \mathfrak{p}_z &= \{z\,x\}\, \mathfrak{g}_x + \{z\,y\}\, \mathfrak{g}_y + \{z\,z\}\, \mathfrak{g}_z. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die durch die Beschleunigung erregte elektrische Polarisation ist also eine lineare homogene Vektorfunktion des Beschleunigungsvektors. Die Koeffizienten dieser Vektorfunktion $\{x\,y\}$ bilden einen symmetrischen Tensor. Es lassen sich also dieselben Symmetriebetrachtungen ausführen, wie beim Tensor der Dielektrizitätskonstante. Es läßt sich insbesondere zeigen, daß nur bei Kristallen des regulären Systems die Richtung der Polarisation mit jener der erregenden Beschleunigung immer zusammenfällt, dann sind nämlich

$$\{x\,x\} = \{y\,y\} = \{z\,z\} \tag{10}$$

und

$$\{y\,z\} = \{z\,x\} = \{x\,y\} = 0. \tag{11}$$

§ 4. Die Größe des Effektes beim Diagonalgitter. In dem einfachen Falle der Diagonalgitter, d. h. solcher Gitter, deren Teilchen sämtlich auf der Würfeldiagonalen liegen, wollen wir den $\{x\,x\}$-Koeffi-

* l. c.

zienten durch die den Kristall zusammenhaltenden Kräfte ausdrücken. In diesem Falle* gilt:

$$\left.\begin{aligned} \begin{Bmatrix} k\,k' \\ x\,x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k\,k' \\ y\,y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k\,k' \\ z\,z \end{Bmatrix} = E_{kk'} \\ \text{und} \\ \begin{Bmatrix} k\,k' \\ y\,z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k\,k' \\ z\,x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k\,k' \\ x\,y \end{Bmatrix} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die Koeffizienten $E_{kk'}$ entstehen durch Auflösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\sum_{k'} D_{kk'}\, u_{k'x} = \Re_{kx} \tag{13}$$

nach den Verrückungen

$$\sum_{k'} E_{kk'}\, \Re_{k'x} = u_{kx}.$$

Wenn das Potential der zwischen der k-ten und k'-ten Teilchenart wirkenden Kräfte mit $\varphi_{kk'}$ bezeichnet wird, so sind die

$$D_{kk'} = S_e \left(\frac{\partial^2 \varphi_{kk'}}{\partial x^2}\right)_{r^e_{kk'}}, \tag{14}$$

wo S_e das bekannte Summenzeichen für das Gitter ist. Die Anzahl der Konstanten $E_{kk'}$ beträgt $\frac{s(s-1)}{2}$, wenn s die Anzahl der Teilchen in einer Zelle bedeutet.

I. Wenn $s = 1$, also das Gitter nur identische Teilchen enthält, ist $\frac{s(s-1)}{2}$ gleich 0, d. h., wie anschaulich klar, es gibt keinen Beschleunigungseffekt.

II. Hier gilt*:

$$D_{11} = D_{22} = D_{12} = -D,$$

und daraus

$$E_{11} = E_{22} = -E_{12} = -\frac{1}{4D}.$$

Wenn wir noch berücksichtigen, daß

$$e_1 = -e_2 = e,$$

so finden wir, daß

$$y_x = \frac{e}{2\Delta^2 D}(m_1 - m_2)\,\mathfrak{g}_x$$

wird. Bekanntlich* ist

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} = \frac{e^2}{D}\frac{1}{\Delta},$$

* l. c.

daher

$$\{xx\} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \frac{m_1 - m_2}{e}$$

in Übereinstimmung mit § 2.

III. Wir wollen noch den Fall durchrechnen, in welchem die Teilchen in der Zelle sitzen und die zweite und dritte Teilchenart identisch sind, wie z. B. bei CaF_2.

Wir finden bei Born*, daß dann

$$E_{11} = -\frac{2}{9D}, \quad E_{12} = E_{13} = \frac{1}{9D}, \quad E_{22} = E_{33} = -\frac{1}{9D}\frac{5D + D'}{D + 2D'},$$

$$E_{23} = \frac{1}{9D}\frac{4D - D'}{D + 2D'}$$

und

$$e_1 = 2e, \quad e_2 = e_3 = -e;$$

daraus folgt, daß

$$\{xx\} = \frac{2e}{9D\Delta^2}\left[6m_1 - \left(4 - \frac{2}{D + 2D}\right)m_2\right]. \tag{15}$$

In diesem Falle ist es also nicht mehr möglich, die Größe der durch Beschleunigung hervorgerufenen Polarisation aus der Dielektrizitätskonstante des Kristalls allein zu berechnen, sondern es ist dazu die genauere Kenntnis der im Kristall wirkenden Kräfte nötig.

§ 5. Verallgemeinerung für alle Isolatoren. Es ist klar, daß dieser Effekt nicht nur bei Kristallen mit idealen Raumgittern auftritt, obwohl dieser Fall sich am vollkommensten übersehen läßt, sondern auch bei allen Körpern, in denen die positiven und negativen Ladungen feste Lagen haben, d. h. bei allen Isolatoren, ob Kristall oder amorph, sogar bei isolierenden Flüssigkeiten und Gasen. Denselben Effekt wie die negativen Ionen ergeben auch Elektronen. Der Effekt wird aber dadurch nicht um Größenordnungen verändert, weil nicht das Verhältnis, sondern die Differenz der Ionen für die Größe des Effekts maßgebend ist. Bei isotropen Körpern folgt aus dem Symmetrieprinzip, daß die Richtung des entstehenden elektrischen Moments mit jener der Beschleunigung zusammenfällt.

§ 6. Die experimentelle Verwirklichung. Da ein elektrisches Moment, welches von 1 Volt hervorgerufen wird, schon meßbar ist, muß nach Formel (1) eine Beschleunigung von der Größenordnung 10^6 cmsec^{-2} schon einen merklichen Effekt hervorrufen. Es gibt zwei Methoden,

* l. c.

mit denen große Beschleunigungen relativ einfach herzustellen sind: Rotationen und Schwingungen. Henriot und Huguenard* haben eine Methode beschrieben, mit welcher ein Körper von 1 cm Durchmesser in Rotation mit 10000 Umdrehungen in der Sekunde versetzt werden kann. Dann entsteht eine Beschleunigung von der Größenordnung 10^9 cmsec^{-2}.

Die andere Methode zur Erregung hoher Beschleunigungen besteht in der Erregung von Schwingungen. Durch Schwingungen werden aber nicht konstante, sondern periodisch wechselnde elektrische Momente, d. h. Wechselströme hervorgerufen, was vielleicht für das Experiment vorteilhafter ist. Ja es kann festgestellt werden, daß dieser Effekt, obwohl nicht rein, schon beobachtet wurde. Giebe und Scheibe**, sowie Hettich und Schleede*** haben nämlich Kristalle auf Piezoelektrizität nach der Methode untersucht, daß die Kristalle mit Hilfe des reziproken piezoelektrischen Effektes zu raschen elektrischen Schwingungen erregt wurden. In den Abhandlungen sind die benutzten Frequenzen nicht angegeben, aber aus der Schaltungsskizze bei Hettich und Schleede können wir sie auf etwa 10^6 Hertz schätzen. Die Amplituden lassen sich nicht so leicht abschätzen, aber wahrscheinlich waren sie groß genug, um merkliche elektrische Momente durch Beschleunigung zu erregen. Wenn also Kristalle auf Piezoelektrizität mit Hilfe von Schwingungen untersucht werden, so müßte bei der Deutung der gefundenen Momente der Beschleunigungseffekt berücksichtigt werden. Die qualitativen Resultate in bezug der Existenz einer polaren Achse bleiben aber unberührt, weil die Schwingungen nicht mechanisch, sondern elektrisch durch den reziproken piezoelektrischen Effekt erregt wurden.

Ujpest, Forschungslaboratorium „Tungsram“ der Vereinigten Glühlampen- und Elektrizitäts-A.-G.

---

* E. Henriot und E. Huguenard, Journ. de phys. 8, 433, 1927.
** E. Giebe und A. Scheibe, ZS. f. Phys. **33**, 760, 1925.
*** A. Hettich und A. Schleede, ebenda **50**, 249, 1928.

Die Funkenspannung bei Drucken $p < 760$ mm Hg und das Minimumpotential, unter Berücksichtigung der Elektrodenfunktion dargestellt.

(Zweiter Nachtrag*.)

Von **Fr. Klingelfuss** in Basel.

(Eingegangen am 30. November 1928.)

Die nach der erweiterten Einsteinschen Gleichung für die Darstellung der Funktion $V_r = \varphi(p, \delta_{\ddot{u}})$ in bezug auf das Minimumpotential durchgeführte Rechnung ergibt bemerkenswerte, mit experimentell bestimmten Konstanten übereinstimmende Zahlen.

Führt man in die Gleichung (9') a. a. O.* anstatt der Wellenlänge die Frequenz $\nu = c/\lambda$ ein, so lautet die Gleichung für die Funktion $V_r = \varphi(p, \delta_{\ddot{u}})$ als erweiterte Einsteinsche Gleichung

$$e V = h\nu + h\frac{\nu_k^2}{\nu}, \tag{9''}$$

die für $\nu = \nu_k$, d. h. für die Frequenz beim Minimumpotential übergeht in

$$e V_k = 2 h \nu_k. \tag{14a}$$

Wir schreiben λ nun nicht wie bisher in Å.-E., sondern in cm und daher $\lambda_k = 82{,}171 \cdot 10^{-8}$ cm. Dann erhalten wir mit $h = 654 \cdot 10^{-29}$ und $c = 3 \cdot 10^{10}$:

$$e V_k = 2 h \nu_k = 4{,}7742 \cdot 10^{-10} \text{ Erg}. \tag{14b}$$

Nach Gleichung (9) ist $V_k = 300$ Volt $= 1$ CGS-Einh. im elst. Maß; setzen wir das ein, so läßt sich aus (14b) die Elementarladung berechnen und man erhält

$$e = \frac{2 h \nu_k}{V_k} = 4{,}7742 \cdot 10^{-10} \text{ elst. Einh.},$$

und damit einen Wert, der mit der Millikanschen Zahl für die Elementarladung noch in der dritten Dezimale übereinstimmt.

Mit $e = 4{,}7742 \cdot 10^{-10}$ elst. Einh. ergibt sich somit

$$V_k = \frac{2 h \nu_k}{e} = 1 \text{ CGS-Einh.}, \tag{15}$$

und mit $e/c = 1{,}5914 \cdot 10^{-20}$ el. magn. Einh.:

$$V_k = \frac{2 h \nu_k c}{e} = 3 \cdot 10^{10} \text{ CGS-Einh.}, \tag{15a}$$

* ZS. f. Phys. **52**, 126 und 746, 1928.

also nach beiden Gleichungen $V_k = 300$ Volt, in Übereinstimmung mit dem nach (9) a. a. O.* berechneten Minimumpotential.

Nach (15a) läßt sich auch schreiben, für $e = 4{,}7742 \cdot 10^{-10}$ gesetzt:

$$2 h \nu_k c = e \cdot 3 \cdot 10^{10} = 14{,}3226 \text{ Erg cm sec}^{-1}, \qquad (15a')$$

und man erhält dadurch eine Zahl, die numerisch mit der c_2-Konstante im Wien-Planckschen Strahlungsgesetz übereinstimmt**. Nun ist e el. magn. Einh. $\times 3 \cdot 10^{10} = e$ elst. Einh. Man kann daher auch schreiben:

$$e_{\text{el. magn. Einh.}} \cdot c^2 = 2 h \nu_k c = c_2. \qquad (16)$$

c^2 erhält hier nach vorstehendem die Dimension einer Geschwindigkeit $\times$ einem Potential $[l^{5/2} m^{1/2} t^{-2}] \text{ sec}^{-1}$. Die Beurteilung vorstehender, unter Benutzung der Gleichungen aus der Elektrodenfunktion sich ergebenden bemerkenswerten Resultate muß dem Atomphysiker überlassen bleiben.

Basel, den 27. November 1928.

* ZS. f. Phys. **52**, 126, 1928.

** Vgl. Roth-Scheel, Konstanten der Atomphysik S. 32, 1923, wo $c_2 = \beta b \simeq 14{,}3 + \Delta$ angegeben ist.

Autorenregister.

Adams, John Mead. Bemerkung über die innere Austrittsarbeit bei der Elektronenemission des Silbers. S. 882.

Akulov, N. Über die Magnetostriktion der Eiseneinkristalle. S. 389.

Ambarzumian, V. Über die Beziehung zwischen der Lösung und der Resolvente der Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichts. S. 263.

Anand, Chetan s. Seth.

Atkinson, R. d'E. Berichtigung. S. 300.

Bakker, C. J., Bruin, T. L. de und Zeeman, P. Bemerkung zu der Arbeit: Der Zeemaneffekt des Argonfunkenspektrums (Ar II). S. 299.

Bauer, Hans. Die Brechung der Materiewellen vom Standpunkte der speziellen Relativitätstheorie. S. 221.

Becquerel, Jean. Über das Vorhandensein zweier verschiedener magnetischer Drehvermögen in einem einachsigen Kristall längs der Achse und längs einer Achsennormale. S. 342.

— und Haas, W. J. de. Zerlegung des Faradayeffekts in zwei Erscheinungen verschiedenen Ursprungs. Diamagnetische und paramagnetische Rotationspolarisation. Magnetisierungsgesetz fester Kristalle. S. 678.

Bengtsson, E. und Hulthén, E. Über eine experimentelle Prüfung der Kombinationsregeln unter den Bandenspektren. S. 275.

Bessonow, N. A. s. Kusnezow.

Bleeker, W. Über das Intensitätsverhältnis in den Flügeln stark umgekehrter Multipletts. S. 808.

Bloch, Felix. Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern. S. 555.

Boas, H. Über die optische Abbildung von Nichtselbstleuchtern. S. 287.

Bothe, W. und Fränz, H. Untersuchungen über die durch α-Strahlen erregte Röntgenstrahlung. S. 466.

Brill, Alfred. Die Temperaturstrahlung der Fixsterne. S. 767.

Brody, E. Elektrische Polarisation in Isolatoren, hervorgerufen durch Beschleunigung. S. 884.

Brüche, E. und Littwin, W. Experimentelle Beiträge zur Radiometerfrage. S. 318.

— — Ähnliche Eigenschaften und ähnliche Radiometerkurven von N_2—CO und CO_2—N_2O. S. 334.

Bruin, T. L. de s. Bakker.

Burger, H. C. und Cittert, P. H. van. Berichtigung. S. 300.

Cittert, P. H. van s. Burger.

Dayal, Mahabir s. Seth.

Donat, K. s. Philipp.

Druyvesteyn, M. J. Über die Ionisation durch Elektronen in einem homogenen elektrischen Felde. S. 197.

Dworsky, Arnold. Ein neuer Versuch über die Mitführung des Äthers. S. 141.

Edlén, Bengt. Präzisionsmessungen in der K-Serie der Elemente 30 Zn bis 44 Ru. S. 364.

Engel, A. v. Zur Kenntnis des Wechselstromlichtbogens in Flüssigkeiten. S. 145.

Enskog, D. Magnetismus und Kernbau. S. 203.

Finkelnburg, Wolfgang. Über das Molekülspektrum des Wasserstoffs mit Wellenlängenmessungen von 3667 Linien zwischen λ 4861 (H_β) und 3314 Å.-E. S. 27.

Fränz, H. s. Bothe.

Frenkel, J. Die Wellenmechanik des rotierenden Elektrons und die Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes. S. 356.

Fujioka, Yoshio. Experimentaluntersuchungen über die Heliumbanden. S. 657.

Gamow, G. Zur Quantentheorie der Atomzertrümmerung. S. 510.

— und Houtermans, F. G. Zur Quantenmechanik des radioaktiven Kerns. S. 496.

Gerlach, W. und Little, N. Die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität von Gläsern. S. 464.

Goldhammer, A. D. Untersuchungen über die Anfangsströme im Quarz. S. 708.

Haas, W. J. de s. Becquerel.

Hámos, L. v. Bemerkungen zur Wirkungsweise des elektrooptischen Momentverschlusses von I. W. Beams und Deutung einiger damit ausgeführter Versuche. S. 549.

Hertzrücken, S. D. s. Laschkarew.

Herzberg, Gerhard. Über die Bandenspektren von CO, nach Versuchen mit der elektrodenlosen Ringentladung (mit einem Anhang über die Swan- und Cyanbanden). S. 815.

Herzog, R. O. und Jancke, W. Über Deformationsversuche bei Faserstoffen. S. 755.

Holtsmark, J. Zur Theorie der Elektronenstreuung und der Stoßerregung. S. 485.

Houtermans, F. G. s. Gamow.

Hulthén, E. s. Bengtsson.

Hund, F. Über Zuordnungsfragen, insbesondere über die Zuordnung von Multiplettermen zu Seriengrenzen. S. 601.

Jaeger, Robert. Eine Kompensationsmethode zur Messung schwacher Ströme. S. 627.

Jancke, W. s. Herzog.

Jeżewski, Mieczysław. Über dielektrische Anisotropie der nematischen Flüssigkeiten im magnetischen Felde. S. 268.

— Über die dielektrischen Eigenschaften der nematischen Flüssigkeiten im gleichzeitigen magneto- und elektrostatischen Felde. S. 878.

Kaplan, Joseph. Die Stabilität des Silberatomrumpfes. S. 883.

Karnop, R. und Sachs, G. Versuche über die Rekristallisation von Metallen. II. S. 301.

Kjandsky, G. A. Über Kapazitätsmessungen mittels piezoelektrischer Oszillatoren und Resonatoren. S. 743.

Klein, O. und Nishina, Y. Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac. S. 853.

Klemperer, Otto. Über die Befreiung des Elektrons aus der Metalloberfläche durch langsame positive Ionen. S. 650.

Klingelfuss, Fr. Die Funkenspannung bei Drucken $p < 760$ mm Hg und das Minimumpotential, unter Berücksichtigung der Elektrodenfunktion dargestellt. S. 126, 746, 890.

Klumb, H. und Pringsheim, Peter. Über die Überführung angeregter $2\,^3P_1$-Hg-Atome in den metastabilen Zustand $2\,^3P_0$. S. 610.

Krömer, Erwin. Zeemaneffekt und Termordnung im Spektrum des einfach ionisierten Chroms. S. 531.

Kuhn, W. Zur Frage nach der Energieübertragung bei Kernstößen. S. 151.

Kusnezow, W. D., Bessonow, N. A. und Pitschenin, N. F. Besonderer Fall des Mechanismus der äußeren Reibung. S. 420.

Lasareff, P. Über die theoretischen Grundlagen der Flimmerphotometrie. Erste Mitteilung. Die Gesetze der Flimmerphotometrie beim Dunkelsehen. S. 119.

Laschkarew, W. E. und Hertzrücken, S. D. Eine Verbesserung des Totalreflektometers für Röntgenstrahlen. S. 739.

Laue, M. v. Notiz zur Quantentheorie des Atomkerns. S. 726.

Leiss, Carl. Neues Absorptionsgefäß für variable Flüssigkeitsschichten. S. 748.

— Evakuierbare Funkenstrecke. S. 750.

Little, N. s. Gerlach.

Littwin, W. s. Brüche.

McKeehan, L. W. Magnetostriktion: Bemerkungen zu einer Mitteilung von Herrn Alfred Schulze. S. 752.

MacMahon, Andrew M. Zur Kenntnis der Alkalihalogenidphosphore mit Kupferzusatz. S. 336.

Mark, H. und Wolf, Karl. Über die Polarisation der charakteristischen Röntgenstrahlung. S. 1.

— — Berichtigung. S. 600.

Mayer, Herbert. Über eine experimentelle Methode zur Messung von Molekularstrahlung. S. 235.

Meitner, Lise. Das β-Strahlenspektrum des Radiothors als Absorptionsspektrum seiner γ-Strahlen. S. 637.
— Das γ-Strahlenspektrum des Radiothors in Emission. S. 645.
Nishina, Y. Die Polarisation der Comptonstreuung nach der Diracschen Theorie des Elektrons. S. 869.
— s. Klein.
Nyberg, Nikolaus. Zum Aufbau des Farbenkörpers im Raume aller Lichtempfindungen. S. 406.
Philipp, K. und Donat, K. Die weitreichenden α-Teilchen des Radiums C. S. 759.
Pitschenin, N. F. s. Kusnezow.
Pokrowski, G. I. Über die Lichtzerstreuung in Wasser. S. 448.
Pose, Heinz. Experimentelle Untersuchungen über die Diffusion langsamer Elektronen in Edelgasen. S. 428.
Pringsheim, Peter s. Klumb.
Raschevsky, N. v. Beitrag zur Theorie der physikalisch-chemischen Periodizität. S. 372.
Rosen, B. Über diffuse Molekülspektra. S. 16.
Rosenfeld, L. Quantenmechanische Theorie der natürlichen optischen Aktivität von Flüssigkeiten und Gasen. S. 161.
Rupp, E. Über Elektronenbeugung an einem geritzten Gitter. S. 8.
Sachs, G. s. Karnop.
Salessky, N. A. Über die Anfangsleitfähigkeit von Gips und Steinsalz. S. 695.
Sauter, Fritz. Intensitätsproblem und Lichtquantentheorie. (Der Comptonsche Streuprozeß.) S. 225.
Schaposchnikow, K. Zum Davisson-Germereffekt. S. 451.
Seth, J. B., Anand, Chetan u. Dayal, Mahabir. Änderung der Magnetisierungsintensität eines Eisendrahtes beim Recken. S. 382.
Sexl, Theodor. Zur Theorie des Einplattenradiometers. S. 249.
Shoji, H. Berichtigung. S. 754.
Sirk, H. Über den Zusammenhang zwischen Oberflächenspannung und Verdampfungswärme. S. 21.
Snoek jun., J. L. Zur Prüfung der Schrödingerschen Theorie. II. S. 654.
Söderman, Martin. Die K-Strahlung der leichtesten Elemente (Al bis Be). S. 795.
Steiner, Karl. Die Polarisation des Elektronenstoßleuchtens bei Edelgasen. S. 516.
Stumpen, H. Nachtrag zu der Arbeit: Bestimmungen von Schwächungskoeffizienten verschiedener Metalle und organischer Verbindungen im kurzwelligen Röntgengebiet. S. 150.
Suhrmann, Rud. und Theissing, Hans. Über den Einfluß des Wasserstoffs auf die lichtelektrische Elektronenemission des Kaliums. S. 453.
Taylor, John B. Das magnetische Moment des Lithiumatoms. S. 846.
Theissing, Hans s. Suhrmann.
Vrkljan, V. S. Bemerkung über die Freiheitsgrade in der Wellenmechanik. S. 735.
Weizel, W. Entkopplung des Elektronenbahndrehimpulses von der Molekülachse durch die Rotation von He_2. S. 175.
Wiśniewski, Felix Joachim von. Fortpflanzung des Lichtes durch fremde Kraftfelder. III. S. 280.
Wolf, Franz. Versuch über die Polarisationsfähigkeit eines Elektronenstrahls. S. 314.
—, Karl s. Mark.
Wolff, Hans Th. Zur Theorie der lichtelektrischen Wirkung. S. 158.
Zeeman, P. s. Bakker.
Zwikker, C. Messungen der spezifischen Wärme von Wolfram zwischen 90 und 2600° abs. S. 668.